Série d'exercices:"Calculs dans IR" les pages sont numérotés de 1 -5

Exercice N° 1

1. On donne les réels $a = \sqrt{37 - 20\sqrt{3}}$ et $b = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$
   (a) Calculer $(2 - \sqrt{3})^2$ et $(2\sqrt{3} - 5)^2$
   (b) Écrire a et b à l'aide d'un seul radical.
   (c) En déduire que $a - 2b$ est entier.
2. (a) Soit n un entier naturel non nul, montrer que :
$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$
   (b) Calculer alors :
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90}$$

Exercice N° 2

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: les réels $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ et $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ sont inverses
   (b) Calculer :
$$S = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2023}+\sqrt{2024}}$$
2. (a) Sachant que $|x - 1| < \frac{1}{2}$, montrer que $|x^2 - 1| < \frac{5}{4}$
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}^+$: Montrer que $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$ et que $2(\sqrt{x} - 1) \leq x - 1$
   (c) Montrer que si $|x| < 1$ alors $\left|\frac{2x+1}{x+2}\right| < 1$
3. (a) Soit $0 < a < 3$ et $0 < b < 3$. Montrer que $\frac{a+b}{ab+9} < \frac{1}{3}$
   (b) Soit $a > 0$ et $b > 0$ tels que : $a > b$, $a^2 + \frac{1}{b^2} = 21$ et $\frac{a}{b} = 2$
      — Montrer que $\frac{a}{b} > \frac{b}{a}$
      — Calculer : $a + \frac{1}{b}$, $a^3 + \frac{1}{b^3}$ et $\left|a - \frac{1}{b}\right|$
4. Soit $x > 0$ et $y > 0$ tels que $x \leq y$
   (a) Montrer que $\sqrt{y - x} \geq \sqrt{y} - \sqrt{x}$
   (b) Déduire que pour tout réel $a \in [0, 4]$, $\sqrt{a - a^2} \geq \sqrt{a+1} - \sqrt{a^2+1}$

Exercice N° 3

Soit x, y et z trois réels strictement positifs

1. (a) Montrer que $\frac{xy}{x+y} \leq \frac{x+y}{4}$
   (b) Déduire que si $x + y = 2$ alors $xy \leq 1$
2. (a) Montrer que $\frac{8}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2} \leq \frac{2}{\sqrt{xy}}$
   (b) Déduire que $\frac{8}{(\sqrt{3}+2)^2} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$
3. Montrer que $\frac{2xy}{x^2+y^2} \leq 1$
4. (a) Montrer que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{2(x+y)}{x^2+y^2}$
   (b) Déduire que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{x+y}{x^2+y^2} + \frac{x+z}{x^2+z^2} + \frac{y+z}{y^2+z^2}$
5. (a) Montrer que $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$
   (b) Déduire que $(x+y) \cdot (x+z) \cdot (y+z) \geq x \cdot y \cdot z$
6. (a) Montrer que $\frac{3}{x+y+\frac{1}{z}} \leq \frac{x+y+z}{3}$
   (b) Déduire que $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}$

Exercice N° 4

Le plan étant muni d'un repère orthonormé (O, I, J) on donne les points :

$$A(1,1), B(0,2), C(a, 2a-3) \text{ avec } a \in \mathbb{N}$$

1. (a) Montrer que pour n'importe quelle valeur de a, les points A, B et C ne sont pas alignés.
   (b) Déterminer la valeur de a pour que le triangle ABC soit un triangle rectangle en A
2. Dans toute la suite on prend $a = 3$, et soit $D(2, 4)$
   (a) Montrer que $ABDC$ est un parallélogramme
   (b) En déduire que $ABDC$ est un rectangle
   (c) Montrer que $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$
3. (a) Construire le point E tel que : $\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
   (b) Déterminer les coordonnées des points O et E dans le repère $(A, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$

Exercice N° 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\sqrt{x-4} + \sqrt{9-x} = \sqrt{2x-1}$
2. $x + \sqrt{x-20} = 0$
3. $\frac{x^2-6x+5}{2x^2-11x+5} = \frac{x^2+4x+3}{x^2+14x+13}$
4. $\frac{2x-1}{x} = \frac{4x-1}{2x+3}$
5. $\sqrt{1-2x} = 3$
6. $|2x-3| \leq 2|x-1|$
7. $\frac{x+2}{3x-1} < 1$

Exercice N° 6

1. Soient a, b et c trois réels strictement positifs.
   (a) Montrer que : $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.
   (b) Déduire que : $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 40 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

3. Soient x et y deux nombres tels que $2x - y = 3$. Déterminer la valeur minimale de $A = x^2 + y^2$.
4. Dans un repère orthonormé du plan soit l'ensemble $C = \{M(x,y), x^2 - 2y^2 + xy + x + 5y - 2 = 0\}$. Déterminer l'ensemble C.

Exercice N° 8

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\frac{-2}{3}x + 1 \times |2x-9| < 0$
2. $\frac{-3x+2}{-3} - \frac{1}{2} \geq \frac{-5}{3}$
3. $(2x-1)(-3x+4) \geq 0$
4. $x^2(1-x)(2x+8) \leq 0$
5. $x^2 - 4x < 4$
6. $(4-x^2)(-3x+7) > 0$
7. $\left(\frac{x-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{x-2}{2}\right)(x+3) < \left(\frac{5x-1}{6}\right)(x-4)$
8. $(1+x^2)(1-x^2) > 0$
9. $9 - x^2 > 3 + x$
10. $x^2 - 3x + 2 < 0$
11. $|2x+3| \leq -3$

12. $|2x+3| \geq -1$
13. $|2x+3| \leq 5$
14. $|2x+3| \geq 2$
15. $\frac{|x|+3}{|x|-2} \leq 0$
16. $(2x-1)(1-x) > 0$
17. $\frac{x^2-4x}{1-x} \leq 0$
18. $\frac{5-2x}{1-x} > 0$
19. $\sqrt{\frac{5-2x}{1-x}} < 1$

Exercice N° 10

Soient a et b deux réels strictement positifs et distincts :

1. Montrer que $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$.
2. Montrer que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{a+b}$.
3. (a) Montrer que $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$.
   (b) En déduire que pour a distinct de 1, on a : $a + \frac{1}{a} > 2$.

Exercice N° 11

Soient x et y deux réels tels que $|x| < 1$ et $|y| < 1$. Montrer que $\left|\frac{x+y}{xy+1}\right| < 1$.

Exercice N° 12

1. Écrire sans le symbole de la valeur absolue chacun des réels suivants :

$$|1-\sqrt{2}|;\ |\pi-\sqrt{3}|;\ |2\sqrt{2}-1-\sqrt{3}|;\ |3\sqrt{2}-2\sqrt{3}|;\ |-3+\frac{1}{3}+\sqrt{2}|$$

2. Soit x un réel appartenant à l'intervalle $[-1, 1]$.
   (a) Simplifier l'écriture de l'expression $A(x) = 2|1-x| + |2x-2|$.
   (b) En déduire $A(0,33)$ et $A(-0,001)$.
   (c) Donner un encadrement de l'expression $B(x) = x + 2|1-x| + |2x-2|$.
3. Soient a, b et c trois réels. On pose $m = \frac{a+b+c}{2}$. Montrer que $(m-a)^2 + (m-b)^2 + (m-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - m^2$.

Exercice N° 14

On donne deux réels a et b tels que : $2 < a < 3$ et $-2 < b < -1$.

1. Encadrer les réels suivants : $\frac{1}{3}a - 3$ et $-2b + 4$.
2. (a) Encadrer chacune des expressions suivantes : $a^2 + b^2$, $\frac{1}{ab}$ et $a^2 - b^2$.
   (b) Comparer les réels suivants : $\frac{a^2+b^2}{ab}$ et $\frac{a^2-b^2}{ab}$.
   (c) Montrer que : $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} < \frac{5}{ab}$.

Exercice N° 15

1. On pose $x = \frac{\sqrt{2}-3}{1+\sqrt{2}}$
   (a) Démontrer que $x = 5 - 4\sqrt{2}$
   (b) Sachant que $1,41 \leq \sqrt{2} \leq 1,42$, donner sans calculatrice un encadrement de x.
2. On donne $A = \frac{a^2-1}{1+a^2}$ et $B = \frac{2a}{1+a^2}$, avec a réel quelconque. Montrer que les nombres A, B et $A^2 - B^2$ appartiennent à l'intervalle $[-1, 1]$.
3. Soient a et b deux réels strictement positifs, montrer que :
   (a) $\frac{3a-b}{a} \leq \frac{4a}{a+b}$
   (b) $\frac{2a}{a+1} \leq \sqrt{a} \leq \frac{a+1}{2}$
   (c) $(1+a)(1+b) \geq 4\sqrt{ab}$

4. Soient a, b et c trois réels strictement positifs.
   (a) Montrer que $\frac{2ab}{a^2+b^2} \leq 1$
   (b) Montrer que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{2(a+b)}{a^2+b^2}$
   (c) En déduire que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{a+c}{a^2+c^2} + \frac{b+c}{b^2+c^2}$

Exercice N°16

1. Écrire sous forme $a + b\sqrt{c}$, où a, b et c sont des entiers.
   (a) $\sqrt{16 - 6\sqrt{7}}$
   (b) $\sqrt{43 + 30\sqrt{2}}$
   (c) $\sqrt{18 + 2\sqrt{77}}$
2. Écrire sans radicaux au dénominateur :
   (a) $-\sqrt{7}$
   (b) $\sqrt{6 + \sqrt{3}}$
   (c) $\sqrt{7 - 1}$
   (d) $\sqrt{7 + 1}$
   (e) $\sqrt{3 - 1} - \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}$
   (f) $\sqrt{3 - 1}$
3. On donne les réels : $A = 9 + 4\sqrt{5}$ et $B = 9 - 4\sqrt{5}$
   (a) Écrire plus simplement $\frac{A}{B}$
   (b) Écrire A et B sous la forme d'un carré.
   (c) Simplifier l'écriture suivante : $A\sqrt{A} + B\sqrt{B}$
4. (a) Écrire sans radical au dénominateur : $\frac{1}{\sqrt{3}+2} - \frac{1}{\sqrt{3}-2}$
   (b) Soit un entier naturel n :
      i. Montrer que $\frac{-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$
      ii. En déduire la valeur de $X = \frac{-1}{1+\sqrt{2}} + \frac{-1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{-1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}$

Exercice N°20

1. Soit la somme $S = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{10}$. Calculer $x \cdot S$ puis $(1 - x) \cdot S$
2. On suppose que x est différent de 1 ; montrer que $S = \frac{x^{11}-1}{x-1}$
3. En déduire les valeurs des sommes suivantes :

$$S_1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 1024$$

et

$$S_2 = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + \cdots + 3^{10}$$

Exercice N°21

x, y étant deux réels de l'intervalle $I =]-1, 1[$

1. Donner un encadrement du réel $\frac{x+4}{x+3}$
2. Montrer que $\frac{x \cdot y}{1+xy} \in I$
3. Lorsqu'on augmente le numérateur et le dénominateur de la fraction $\frac{3}{4}$ d'un réel x on obtient $\frac{7}{9}$. Déterminer x.
4. Vérifier que pour tout entier naturel $k > 1$, on a $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$
5. En déduire que pour tout entier naturel $n > 1$, on a :

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 1 - \frac{1}{n}$$

Exercice N°22

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

En déduire la valeur de

$$A = \frac{1}{\sqrt{2+1}} + \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{2}}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{9+\sqrt{8}}}$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$2\sqrt{n+1} < \frac{1}{\sqrt{n}} + 2\sqrt{n}$$

En déduire que

$$\frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{10}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{15}} > 2$$

Exercice N°23

x, y et z trois réels strictement positifs :

1. Montrer que : $x^2 + y^2 \geq 2xy$
2. Montrer alors que :
   (a) $2(x^2 + y^2) \geq (x+y)^2$
   (b) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$
3. En déduire que :

$$\frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

Soit a et b deux réels strictement positifs :

1. Montrer que :

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b$$

2. Montrer que : si $a \leq b$ et $a + b = 1$, alors on a :

$$\sqrt{a^2+b^2} \leq \frac{b}{\sqrt{a}}$$

Série d'exercices:"Calculs dans IR"

Les pages sont numérotées de 1 à 3.

Exercice N° 1

A) Soient a et b deux réels positifs tel que $a \geq b \geq 0$

$$U = \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} + \sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}.$$

(a) Développer $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ puis $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$.

(b) Montrer que $U = 2\sqrt{a}$.

B) x et y sont deux réels qui vérifient : $\frac{7}{5} < x < 4$ et $-5 < y < -2$

(a) Encadrer $-3x+y$, xy et $(x+y)^2$.

(b) Déduire un encadrement de x^2+y^2.

Exercice N° 2

Indiquer la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée.

1. Une baisse de 25% suivie d'une augmentation de 20% est :
   (a) Une baisse de 5%
   (b) Une baisse de 5,5%
   (c) Une baisse de 10%
2. Une valeur approchée par excès à 10^{-2} près du réel $\sqrt{5}$ est :
   (a) 2,24
   (b) 2,23
   (c) 2,22
3. Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan,

$$\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} \text{ et } \vec{v} = (m^2-1)\vec{i} + \vec{j}.$$

   $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de l'ensemble des vecteurs si et seulement si :
   (a) $m \neq \sqrt{\frac{3}{2}}$
   (b) $m \neq -\sqrt{\frac{3}{2}}$
   (c) $m \neq \sqrt{\frac{3}{2}}$ et $m \neq -\sqrt{\frac{3}{2}}$
4. Montrer que pour tout $x \in]0,1[$: $\frac{1}{x} \leq \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{x}$. Déduire que : $10 \leq \sqrt{101} \leq 10\sqrt{2}$.

Exercice N° 3

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   (a) $\sqrt{6x-5} = 2$
   (b) $\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+1} = \frac{1}{x^2-1}$
   (c) $|3x-2| > 2x-4$
2. Soit x un réel strictement positif tel que $x^2 + \frac{1}{x^2} = 14$ calculer alors $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.
3. Soient x et y deux réels positifs tels que $x \geq y$.
   (a) Montrer que $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x-y}$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{(n+1)^3} - \sqrt{(n-1)^3} \leq \sqrt{6n^2+2}$.
   (c) On pose $S = \sqrt{3 \times 1^2 + 1} + \sqrt{3 \times 3^2 + 1} + \cdots + \sqrt{3 \times 2017^2 + 1} + \sqrt{3 \times 2019^2 + 1}$.
   Montrer que $S \geq 2020\sqrt{1010}$.

Exercice N° 4

Soit a, b et c trois réels tels que : $a + b + c = 0$

1. (a) Factoriser $a^3 + b^3$.
   (b) Montrer que $a^2 + b^2 = c^2 - 2ab$.
   (c) En déduire que $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.
2. Résoudre $(-2x+1)^3 + (3x-4)^3 + (-x+3)^3 = 0$.

Exercice N° 5

Soit $B = (\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée de l'ensemble des vecteurs du plan.

1. Soient $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i}$ et $\vec{v} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$.
   Montrer que $B' = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormée de l'ensemble des vecteurs du plan.
2. Soit $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan.
   On donne les points $A(-2; 1)$, $B(3; -2)$, $C(6; 3)$ et $D\left(4; \frac{5}{2}\right)$.
   (a) Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.
   (b) Montrer que les points A, C et D sont alignés.
   (c) Calculer les distances AB et BC et en déduire l'aire du triangle ABC.

Exercice N° 6

1. Soit les deux réels x et y tels que :

$$x = \sqrt{2}(1 - 3\sqrt{2}) + 2\sqrt{3}\left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)$$

$$y = |\sqrt{3} - 1| + |\sqrt{2} - 5| - 4$$

   (a) Montrer que $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ et $y = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.
   (b) En déduire que x est l'inverse de y puis que $\sqrt{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$.
   (c) Calculer x^2 et y^2. En déduire que $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 10$.
2. (a) Montrer que : $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}$.
   (b) En déduire la simplification de

$$A = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+\sqrt{2}}}}$$

Exercice N° 7

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   (a) $\frac{3x-1}{\sqrt{x}} = \frac{3x}{\sqrt{x}-2}$
   (b) $\sqrt{5x-4} \geq \sqrt{x+1}$
2. Dans un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 6$ et $AC = 2$. On place les points D et E respectivement sur $[AC]$ et $[AB]$ tels que $AD = BE = x$.
   (a) Déterminer un encadrement de x.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $-x^2 + 6x - 6 = 0$.
   (c) Déduire la valeur de x pour que l'aire du triangle ADE soit égale à la moitié de celle du triangle ABC.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$B = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

   (a) Simplifier l'expression B.
   (b) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $B \geq \frac{96875}{100000}$.