Exercice 3 :(8points)

Soit ABC un triangle équilatéral de coté a, $(a > 0)$

On désigne par O le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit à ABC et par I le milieu de $[AB]$

Soit l'application f du plan dans lui meme qui à tout point M associe le point M'

telle que $2\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{M'B} + \overrightarrow{M'C}$

1) *Montrer que f est la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$*

2) a) *Construire les points B' et C' images respectives de B et C par f*

b) *Montrer que le quadrilatère $BCC'B'$ est un rectangle (On note à la suite O' son centre)*

c) *Exprimer en fonction du réel a l'aire de $BCC'B'$*

3) a) *Montrer que les points A, O et O' sont alignés*

b) *Montrer que le quadrilatère $OCO'B$ est un losange*

c) *Déterminer l'image de la droite (OB) puis déduire que $f(O) = O'$*

4) *Soit J lebarycentre des points pondérés $(B; 3)$et $(C'.1)$. Montrer que $f(I) = J$*

Exercice 3 : (6 pts)

1) a) O est le centre du cercle circonscrit à ABC et ABC équilatéral donc O est le centre de gravité de ABC

b) $M \in P$, $f(M) = M'$ équivaut : $2\overrightarrow{M'A} = \overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M'C}$

équivaut : $3\overrightarrow{M'A} = \overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{M'B} + \overrightarrow{M'C}$

équivaut : $3\overrightarrow{M'A} = 3\overrightarrow{M'O}$; (O bar $(A,1)$; $(B,1)$; $(C,1)$)

équivaut : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AO}$ (1 pt)

$\overrightarrow{AO}$ vecteur constant donc l'application f est la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$.

2) a) $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$ (1 pt)

équivaut : $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AO}$

b) $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$ donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}$

donc le quadrilatère $BCC'B'$ est un parallélogramme.

ABC équilatéral et O son centre de gravité donc $(AO) \perp (BC)$

$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AO}$ donc $(BB') \parallel (AO)$ d'où $(BB') \perp (BC)$.

Ainsi $BCC'B'$ est un rectangle (1 pt)

c) ABC équilatéral de côté a donc la longueur
de toute hauteur (issue ...) est $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

O centre de gravité de ABC donc $AO = \frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Comme $\vec{BB'} = \vec{AO}$ Alors $BB' = AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Donc $\mathcal{A}_{BCC'B'} = BC \times BB' = a \times \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Par suite $\mathcal{A}_{BCC'B'} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

3

3) a) O' centre du rectangle BCC'B' donc O'B = O'C
Comme OB = OC et AB = AC
donc O, O' et A sont des pts de la médiatrice de [BC]
ils sont donc alignés (1pt)
b) O' centre de BCC'B' donc
O' milieu de [CB'] d'après pythagore (CBB' triangle rectangle en B)
on trouve $CO' = \frac{1}{2}\sqrt{BC^2 + BB'^2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.
et comme $CO = \frac{2}{3} h = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ Alors $CO' = CO$.
Puis OB = OC, O'B = O'C et O'C = CO
Alors O'B = O'C = OC = OB donc
le quadrilatère OCO'B est un losange. (1pt)
c) OCO'B est un losange donc (OB) // (CO')
Comme $h(B) = B'$ et $B' \in (CO')$ Alors
$h((OB)) = (CO')$ (1pt)

Comme $(AO) \cap (CO') = \{O'\}$; $(O' \in (AO))$

donc $f(O) = O'$

4) J bpp $(B, \frac{?}{3})$, $(C', 1)$

$\vec{BJ} = \frac{1}{4}\vec{BC'}$ or O' milieu de $[BC']$

donc $\vec{BC'} = 2\vec{BO'}$ d'ou $\vec{BJ} = \frac{1}{2}\vec{BO'}$

donc J milieu de $[BO']$

D'autre part $f(B) = B'$ et $f(O) = O'$

Alors $\vec{BO} = \vec{B'O'}$ donc $[BO]$ et $[OB']$ ont même milieu qui est autre que J

Ainsi I milieu de $[AB]$

donc $f(I)$ milieu de $[f(A) f(B)] = [OB']$

d'où $f(I) = J$

Exercice 2 :(5 pts)

Soit P un polynôme de degré 4 vérifiant la relation suivante:

Pour tout $x \in \mathbb{R}$; $(x+4)P(x) = xP(x+1)$.

1°) Montrer que 0 ; -1 ; -2 et -3 sont 4 racines de P.

2°) Sachant que $P(1) = 24$.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $P(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$.

3°) a. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $x\big(P(x+1) - P(x)\big) = 4P(x)$.

b. En déduire la valeur de $S = (2 \times 3 \times 4) + (3 \times 4 \times 5) + (4 \times 5 \times 6) + \cdots + 17 \times 18 \times 19$.

$P(1) \qquad \frac{P(2)}{2} \qquad \frac{P(3)}{3}$

Exercice 3 :(8 pts)

Dans l'annexe ci-jointe, ABC est un triangle tel que $AB = 4$ et $AC = 3$. $\mathscr{C}$ est le cercle de centre A et passant par B.

On désigne par f l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M, on associe le point M' tel que $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{BC}$.

1°) Montrer que f est la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.

2°) Soit E le barycentre des points pondérés $(A ; 2)$ et $(B ; -1)$

et G le barycentre des points pondérés $(A ; -7)$ et $(C ; 4)$.

a. Montrer que $f(A) = E$.

b. Montrer que $G \in \mathscr{C}$.

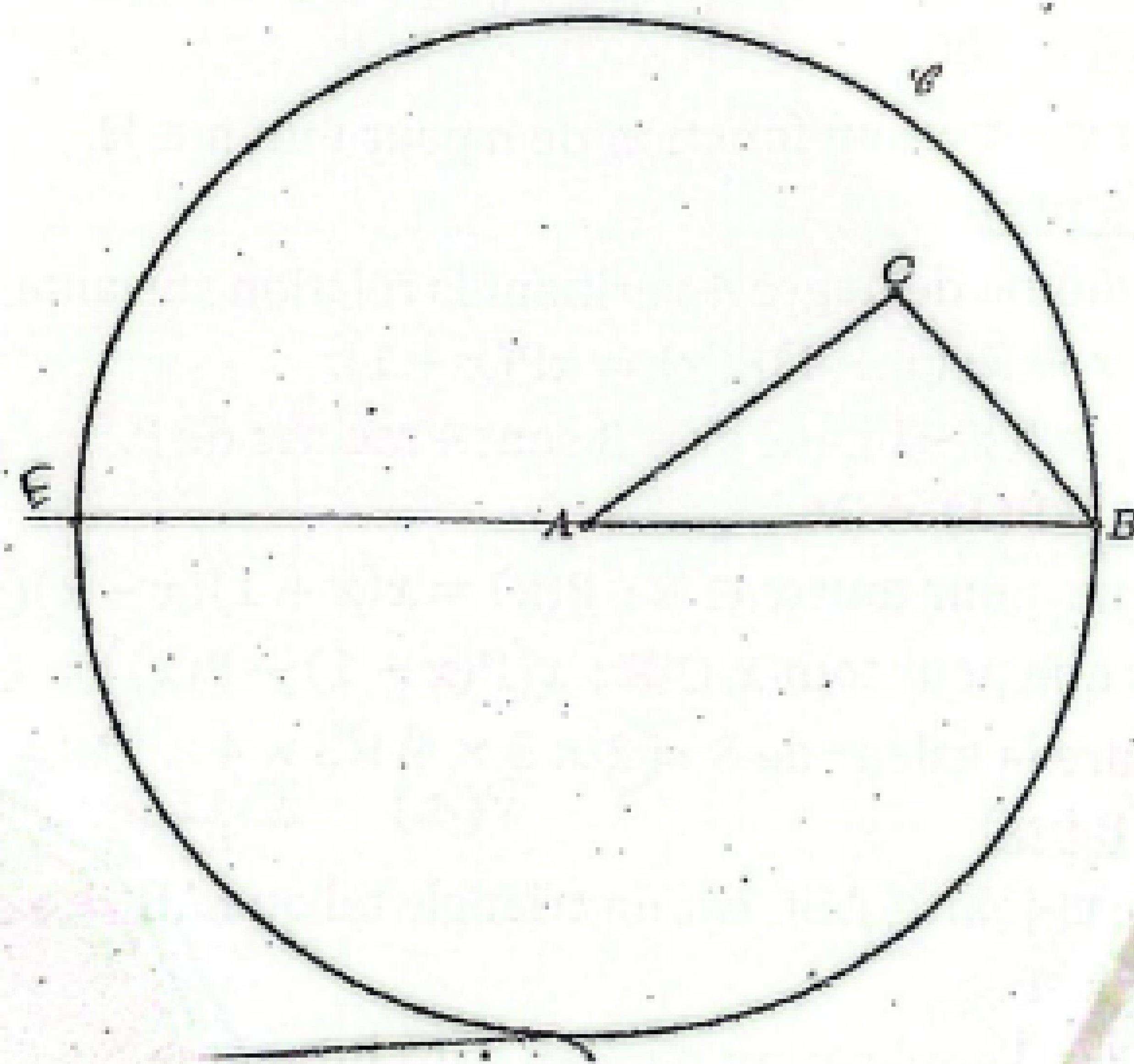
3°) Soit Δ la médiatrice du segment $[EG]$.

Montrer que Δ est l'image de la droite (BG) par f.

4°) La paralléle à la droite (AC) passant par E coupe Δ en un point K. Déterminer $f(G)$.

5°) La paralléle à la droite (BC) passant par A coupe (KE) en un point F.

Montrer que F est le barycentre des points E et K affectés des coefficients qu'on déterminera.


C
E
A
B

52

Ex2

1) $(x+4).P(x) = x\,P(x+1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

donc $(0+4).P(0) = 0 \times P(1)$

cà $P(0) = 0$

" 0 est une racine de P

.) $(-1+4)\times P(-1) = -1 \times P(0)$

cà $P(-1) = 0$

" (-1) est une racine de P

.) $(-2+4).P(-2) = -2 \times P(-2+1)$

cà $2\times P(-2) = -2\times P(-1) = 0$

" $P(-2) = 0$

" (-2) est une racine de P

.) $(-3+4).P(-3) = -3\times P(-3+1)$

cà $P(-3) = -3\times P(-2) = 0$

" $P(-3) = 0$

" (-3) est une racine de P

cl : $0 ; -1 ; -2$ et -3 sont 4 racines de P

.) P un polynôme de degré 4 donc il admet au plus 4 racines distinctes

or $0 ; -1 ; -2$ et -3 sont 4 racines de P

racines de P

donc $P(x) = a(x+1)(x+2)(x+3)\times x$ $(a \in \mathbb{R}^*)$

donc $P(1) = a(1+1)(1+2)(1+3)$

cà $24 = a \times 2 \times 3 \times 4 = 24a$

" $a = \frac{24}{24} = 1$

1

donc $P(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$

pour tout $x \in \mathbb{R}$

3) a)

$x(P(x+1) - P(x)) =$

$= x((x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - x(x+1)(x+2)(x+3))$

$= x((x+2)(x+1)(x+3)(x+4-x))$

$= x(x+2)(x+1)(x+3)\times 4 = 4P(x)$

donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$x(P(x+1) - P(x)) = 4P(x)$

b) $S = 2\times3\times4 + 3\times4\times5 + \dots + 17\times18\times19$

on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$P(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$

donc $S = \frac{P(1)}{1} + \frac{P(2)}{2} + \frac{P(3)}{3} + \dots + \frac{P(16)}{16}$

$x(P(x+1) - P(x)) = 4P(x)$

cà $P(x+1) - P(x) = \frac{4P(x)}{x}$

$S = \frac{P(1)}{1} + \frac{P(2)}{2} + \frac{P(3)}{3} + \dots + \frac{P(16)}{16}$

cà $4S = \frac{4P(1)}{1} + \frac{4P(2)}{2} + \dots + \frac{4P(16)}{16}$

" $4S = P(2) - P(1) + P(3) - P(2) + \dots + P(17) - P(16)$

" $4S = P(17) - P(1)$

1,5

$S = \frac{P(17) - P(1)}{4} = \frac{17\times18\times19\times20 - 24}{4}$

$\boxed{S = 29064}$

Ex3

1) $\vec{MC} = \vec{M'A} + \vec{BC}$

signifie $\vec{MM'} + \vec{M'C} = \vec{M'A} + \vec{BC}$

" $\vec{MM'} = \vec{M'A} + \vec{CM'} + \vec{BC}$

" $\vec{MM'} = \vec{CA} + \vec{BC} = \vec{BA}$

" $t_{\vec{BA}}(M) = M'$ or $f(M) = M'$ } donc $\boxed{f = t_{\vec{BA}}}$

1

2) a) E le barycentre de $(A, 2)$ et $(B, -1)$

signifie $\vec{AE} = \frac{-1}{-1+2} \vec{AB} = -\vec{AB} = \vec{BA}$

" $\vec{AE} = \vec{BA}$

" $\boxed{f(A) = E}$

1

b) G barycentre de $(A, -7)$ et $(C, 4)$

signifie $\vec{AG} = \frac{-4}{-3} \vec{AC}$

donc $AG = \frac{4}{3} AC = \frac{4}{3} \times 3 = 4$

donc $AG = AB = 4$

$\mathscr{C}$ le cercle de centre A passant par B donc de rayon AB

donc $\boxed{G \in \mathscr{C}}$

1

3) $\vec{AE} = \vec{BA}$

signifie A milieu de $[EB]$

$\mathscr{C}$ le cercle de centre A passant par B

donc $[EB]$ est le diamètre de $\mathscr{C}$

$G \in \mathscr{C}$, $G \neq B$ (ABC triangle donc $B \notin (AC)$ et $G \in (AC)$)

$G \neq E$ ($G \notin (AB)$ et $E \in (AB)$)

donc EBG triangle rectangle en G

donc $(BG) \perp (EG)$

Δ médiatrice de $[EG]$ donc

$\Delta \perp (EG)$, $(BG) \perp (EG)$ } donc $\Delta \parallel (BG)$

$f(B) = A$

$\Delta \parallel (BG)$

$A \in \Delta$ (car Δ médiatrice de $[EG]$, $G \in \mathscr{C}$, $E \in \mathscr{C}$, $\mathscr{C}$ de centre A donc $AG = AE$)

$B \in (BG)$

donc $\boxed{f((BG)) = \Delta}$

2

4) $f(A) = E$, $(AC) \parallel (EK)$, $A \in (AC)$, $E \in (EK)$ } donc $f((AC)) = (EK)$

$f((AC)) = (EK)$

$f((BG)) = \Delta$

$(EK) \cap \Delta = \{K\}$

$(AC) \cap (BG) = \{G\}$ (G barycentre de $(A, -7)$ et $(C, 4)$ donc $G \in (AC)$)

donc $\boxed{f(G) = K}$

1

G barycentre de $(A, -7)$ et $(C, 4)$

$\vec{CG} = \frac{-7}{-3} \vec{CA} = \frac{7}{3} \vec{CA}$

$3\vec{CG} - 7\vec{CA} = \vec{0}$

C barycentre de $(G, 3)$ et $(A, -7)$

$(BC) \parallel (AF)$, $f(B) = A$, $A \in (AF)$, $B \in (BC)$ } donc $f((BC)) = (AF)$

$f((BC)) = (AF)$, $f((AC)) = (EK)$, $(AF) \cap (EK) = \{F\}$, $(BC) \cap (AC) = \{C\}$ } donc $f(C) = F$

$f(C) = F$, $f(G) = K$

$f(A) = E$

(3)

donc F barycentre de (E,-1) et (K,3)

9/