Cheatsheet Matematika
(Robert Mařík, 14. prosince 2023)

Funkce

- Funkce jsou zobrazení mající na vstupu a výstupu reálná čísla. Používají se k vyjádření vzájemných relací zkoumaných veličin.
- Podle toho, zda zachovávají uspořádání vzorů i pro obrazy dělíme na rostoucí, klesající a ostatní (bez monotonie).
- Podle toho, zda a jakým způsobem jsou symetrické dělíme na sudé, liché a ostatní (bez parity).
- Nejjednoduššími funkcemi jsou přímá úměrnost (násobení konstantou, $y = kx$) a nepřímá úměrnost (násobení převrácené hodnoty konstantou, $y = \frac{k}{x} = k\frac{1}{x}$).
- Je-li $y = f(x)$, říkáme, že y závisí na x. Veličina y je závislá veličina, veličina x je nezávislá veličina.

Spojitost a limita (velmi zjednodušeně)

- Spojité funkce mají relativně malé změny funkčních hodnot při relativně malých změnách vstupních dat. Např. nejsou skoky.
- Limita umožňuje doplnit funkční hodnotu funkce tak, aby se stala spojitou (odstranitelná nespojitost).

Derivace

Dává do souvislosti změny závislé a nezávislé veličiny.

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} := \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

- Rychlost s jakou se mění f při změnách x.
- Změna f vyvolaná jednotkovou změnou x.
- Pro $f(t)$ je $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ rychlost růstu veličiny f (v čase).
- Jednotka derivace veličiny f podle x je stejná jako jednotka podílu těchto veličin.

Konečné diference

Konečné diference slouží k numerickému aproximování derivace. Slouží také k odhadu derivace funkce dané tabulkou.

Dopředná diference: $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Centrální diference: $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$

Druhá diference: $\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2} = f''(x) \approx \frac{f(x-h)-2f(x)+f(x+h)}{h^2}$

Aplikace derivace

- Rovnice pro růst rychlostí úměrnou funkční hodnotě je
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = kx.$$
Rovnice pro růst rychlostí úměrnou vzdálenosti od stacionárního stavu je
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k(M-x).$$
Řešením těchto modelů je možné získat časový průběh hledané funkce.
- Lineární aproximace funkce f v okolí bodu x_0 je
$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}(x-x_0).$$
- Okamžitá rychlost. Derivace vystupuje všude tam, kde nestačí průměrná rychlost, ale požadujeme rychlost okamžitou. Je proto v matematické formulace naprosté většiny fyzikálních zákonů, pokud se nechceme specializovat pouze na děje probíhající konstantními rychlostmi (jako ve středoškolské fyzice).
- Rovnice vedení tepla (pro parciální derivace) – obsahuje časové i prostorové derivace, protože teplo se šíří v prostoru a teplota v daném místě se při vedení tepla mění s časem.
- Řešení rovnice $f(x) = 0$ je možno provést iteracemi
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$
kde $f'(x_n) = \frac{\mathrm{d}f(x_n)}{\mathrm{d}x}$ je derivace v bodě x_n a iterační proces začne v nepříliš špatném počátečním odhadu řešení x_0 (Newtonova metoda). Každý jeden krok metody zdvojnásobí počet desetinných míst při přibližném řešení rovnice.

Vzorce pro derivování

(1) $(c)' = 0$
(2) $(x^n)' = nx^{n-1}$
(3) $(e^x)' = e^x$
(4) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
(5) $(\sin x)' = \cos x$
(6) $(\cos x)' = -\sin x$
(7) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
(8) $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
(9) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
(10) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
(11) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
2. $(cu)' = cu'$
3. $(uv)' = u'v + uv'$
4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$
5. $\Big(u(v(x))\Big)' = u'(v(x))v'(x)$

Neurčitý integrál

Neurčitý integrál je opak derivace, kdy z rychlosti změny určíme časový průběh měnící se veličiny. Je dána až na aditivní konstantu související s výchozím stavem. Píšeme

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x),$$

kde $F(x)$ je funkce splňující $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = f(x)$.

Vzorce pro integrování

(1) $\int dx = x + c$
(2) $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
(3) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$
(4) $\int e^x\,dx = e^x + c$
(5) $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
(6) $\int \cos x\,dx = \sin x + c$
(7) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c$
(8) $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x + c$
(9) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c$
(10) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + c$
(11) $\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$

Určitý Newtonův integrál

Newtonův integrál je opak derivace, kdy z rychlosti změny a z časového intervalu určíme změnu veličiny na daném intervalu. Na rozdíl od neurčitého integrálu je určitý integrál dán jednoznačně a není nutná informace o počátečním stavu. Počítáme vztahem

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$

kde $F(x)$ je funkce splňující $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = f(x)$.

Určitý Riemannův integrál

Riemannův integrál umožňuje vypočítat součet nekonečné mnoha malých příspěvků k aditivní veličině. V praxi náhrada za nemožnost použít násobení v případě nekonstantních parametrů. Například dráha pohybu je rychlost násobená časem v případě pohybu konstantní rychlostí. V případě pohybu nekonstantní rychlostí je dráha místo součinu integrál rychlosti jako funkce času.

Riemannův integrál se počítá stejně jako Newtonův.

Autonomní DR 1. řádu

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(y)$$

Konstantních řešení je tolik, kolik je nulových bodů funkce $f(y)$.

Stabilní konstantní řešení jsou v bodech, kde je funkce f klesající.

Netabilní konstantní řešení jsou v bodech, kde je funkce f rostoucí.

Vektory, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$,

Skalární součin vektorů $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Vektorový součin vektorů

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Délka vektoru $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Matice

Součin matice a sloupcového vektoru je lineární kombinace sloupců matice, kdy koeficienty jsou komponentami vektoru.

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 22 \\ 15 \end{pmatrix} = 22 \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} + 15 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140 \\ -51 \end{pmatrix}$$

Determinanty

Determinant 2×2 $\qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Determinant 3×3

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei - afh + bfg - bdi + cdh - ceg$$

Matice rotace pootočí bod nebo vektor o úhel θ proti směru hodinových ručiček. Inverze je poootočení o $-\theta$.

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Zobrazení dané maticcí A má v souřadnicích pootočených o θ proti směru hodinových ručiček matici $R(-\theta)AR(\theta)$.

Vlastní čísla a vektory

Vlastní vektory jsou vektory, které se zobrazí do stejného směru, poměr délek je vlastní číslo. Tj. vektor $\vec{u}$ je vlastním vektorem matice A příslušným vlastnímu číslu λ, pokud platí

$$A\vec{u} = \lambda\vec{u}.$$

Všechna vlastní čísla najdeme jako kořeny rovnice

$$|A - \lambda I| = 0.$$

Symetrická pozitivně definitní matice má tolik reálných vlastních čísel, kolik je její dimenze.

Je-li λ vlastní číslo, je vlastní vektor řešení rovnice

$$(A - \lambda I)\vec{u} = 0.$$

Vlastní směry pro dřevo odpovídají anatomickým směrům dřeva. V těchto směrech má odezva na podnět stejný směr jako podnět. Poměr velikosti odezvy a velikosti podnětu je roven vlastnímu číslu. Například pro difuzi vody je největší vlastní číslo v podélném směru, protože v tomto směru vede dřevo vodu nejlépe.

Rovnice kontiuity vyjadřuje celkovou bilanci stavové veličiny a nárůst množství způsobený přítomností zdrojů a změnami v toku přenášejícího tuto stavovou veličinu.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma - \nabla \cdot \vec{\jmath}$$

u ... stavová veličina

$\frac{\partial u}{\partial t}$ ... rychlost růstu stavové veličiny

σ ... vydatnost zdrojů stavové velčiny

$\vec{\jmath}$ ... tok stavové veličiny

$-\nabla \cdot \vec{\jmath}$ ... úbytek toku stavové veličiny (záporně vzatá divergence toku)

Difuzní rovnice je rovnice kontinuty doplněná předpokladem, že tok je úměrný záporně vzatému gradientu stavové veličiny.

$$\vec{\jmath} = -D\nabla\vec{u}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma + \nabla \cdot \big(D\nabla u\big)$$

Difuzní rovnice v kartézských souřadnicích

Budeme uvažovat diagonální difuzní koeficient. Například homogenní materiál, nebo otrotropní materiál ve kterém volíme osy v souladu s materiálovými vlastnostmi.

Obecný tvar difuzní rovnice v kartézských souřadnicích je

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma + \frac{\partial}{\partial x}\left(D_x \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D_y \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(D_z \frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Ve *stacionárním případě* (sledujeme stav po dosažení rovnováhy) položíme navíc $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$.

Pro *bezzdrojový případ* (stavová veličina nemůže vznikat ani zanikat) položíme navíc $\sigma = 0$.

Studujeme-li materiál současně *homogenní* a s *lineárními materiálovými vlastnostmi* (v všech místech má materiál stejné vlastnosti a ty se nemění při změně stavové veličiny), potom kvaziderivace

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D_x \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

upravíme a použijeme druhé derivace

$$D_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(a pro ostatní proměnné analogicky).

U *izotropního materiálu* (má ve všech směrech stejné vlastnosti) nerozlišujeme materiálové charakteristiky v jednolivých směrech, klademe $D_x = D_y = D_z = D$.

Pro méně dimenzí použijeme pouze odpovídající počet difuzních členů. Jednotlivé předpoklady je možno libovolně kombinovat.