

Section 03 : Volatilité dans le marché obligataire

GSF-3100 Marché des capitaux

Simon-Pierre Boucher¹

¹Département de finance, assurance et immobilier
Faculté des sciences de l'administration
Université Laval

Automne 2021

Propriétés reliées à la volatilité

- ▶ Les changements de prix en pourcentage d'une obligation dépendent grandement du type d'obligation.
- ▶ Petit changement dans le rendement requis sur une obligation
 - ▶ Changement en pourcentage du prix d'une obligation est similaire pour une hausse et une baisse de taux.
- ▶ Grand changement dans le rendement requis sur une obligation
 - ▶ Changement en pourcentage du prix d'une obligation est différente pour une hausse et une baisse de taux.
- ▶ Pour un grand changement dans le rendement requis
 - ▶ $\downarrow$ taux = $\uparrow$ prix = plus grande
 - ▶ $\uparrow$ taux = $\downarrow$ prix = plus faible

Caractéristiques affectant la volatilité

1. Taux de coupon

$TC \downarrow$	$\Longleftrightarrow$	Volatilité $\uparrow$
$TC \uparrow$	$\Longleftrightarrow$	Volatilité $\downarrow$

2. Échéance

$n \uparrow$	$\Longleftrightarrow$	Volatilité $\uparrow$
$n \downarrow$	$\Longleftrightarrow$	Volatilité $\downarrow$

3. Taux de rendement

$r \uparrow$	$\Longleftrightarrow$	Volatilité $\downarrow$
$r \downarrow$	$\Longleftrightarrow$	Volatilité $\uparrow$

Anticipation sur les taux d'intérêts

Si un investisseur anticipe une baisse des taux d'intérêts, il est préférable qu'il ajuste son portefeuille d'obligations pour avoir les caractéristiques suivantes.

- ▶ Faible taux de coupon
- ▶ Longue échéance
- ▶ Faible taux de rendement

Si un investisseur anticipe une hausse des taux d'intérêts, il est préférable qu'il ajuste son portefeuille d'obligations pour avoir les caractéristiques suivantes.

- ▶ Taux de coupon élevé
- ▶ Courte échéance
- ▶ Taux de rendement élevé

Mesures de la volatilité

Prix d'un point de base

Cette mesure nous dit quel est le changement en dollar du prix d'une obligation suite à un changement d'un point de base du taux de rendement requis.

- ▶ Un point de base est équivalent à 0.01%
- ▶ Si la variation en dollar est grande suite à une variation d'un point de base du rendement, on peut dire que cette obligation est plus volatile.

Mesures de la volatilité

Valeur en rendement d'une variation de prix

Cette mesure nous dit quel est le changement dans le rendement d'une obligation suite à une variation de prix donnée.

- ▶ La variation de prix reflète le changement minimal dans la cote du marché:
 - ▶ Marché obligataire gouvernemental américain: $\frac{1}{32}$
 - ▶ Marchés corporatif et municipal: $\frac{1}{8}$
- ▶ Si la variation du rendement est grande suite à une variation de prix donnée, on peut dire que cette obligation est moins volatile.

Mesures de la volatilité

Durée

La durée (D) est une mesure de volatilité qu'il est possible de trouver en prenant la dérivé première de la fonction de prix de l'obligation par rapport au rendement.

$$D = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Nous allons définir notre fonction de prix comme suit:

$$P = \frac{C}{1+y} + \frac{C}{(1+y)^2} + \dots + \frac{C}{(1+y)^n} + \frac{M}{(1+y)^n}$$

Afin de faciliter la dérivé première, nous allons modifier notre fonction de prix afin d'avoir les exposants au numérateur.

$$P = C \times (1+y)^{-1} + \dots + C \times (1+y)^{-n} + M \times (1+y)^{-n}$$

Mesures de la volatilité

Durée

On effectue maintenant la dérivée première.

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y} = & -C \times (1+y)^{-2} - 2C \times (1+y)^{-3} - \dots \\ & -nC \times (1+y)^{-(n+1)} - nM \times (1+y)^{-(n+1)}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-C}{(1+y)^2} + \frac{-2C}{(1+y)^3} + \dots + \frac{-nC}{(1+y)^{(n+1)}} + \frac{-nM}{(1+y)^{(n+1)}}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-1}{1+y} \times \left[\frac{C}{(1+y)^1} + \frac{2C}{(1+y)^2} + \dots + \frac{nC}{(1+y)^n} + \frac{nM}{(1+y)^n} \right]$$

Mesures de la volatilité

Durée

En divisant par P , on obtient la variation du prix en % due à une petite variation du rendement.

$$\frac{\partial P}{\partial y} \times \frac{1}{P} = \frac{\partial P/P}{\partial y}$$

$$\frac{\partial P/P}{\partial y} = \frac{-1}{1+y} \times \frac{\frac{C}{(1+y)^1} + \frac{2C}{(1+y)^2} + \dots + \frac{nC}{(1+y)^n} + \frac{nM}{(1+y)^n}}{P}$$

Mesures de durée

Deux mesures de durée ont été développées à partir de cette dérivée:

1. Durée de Macaulay
2. Durée modifiée

Mesures de durée

Durée de macaulay

La durée de macaulay (D) peut être calculée à l'aide de l'équation suivante.

$$D = \frac{\frac{C}{(1+y)^1} + \frac{2C}{(1+y)^2} + \dots + \frac{nC}{(1+y)^n} + \frac{nM}{(1+y)^n}}{P}$$

$$D = \sum_{t=1}^n w_t t$$

où $w_t = \frac{FM_t(1+y)^{-t}}{P}$

La durée de macaulay (D) représente la moyenne pondérée des échéances t des flux monétaires FM_t , où chaque pondération correspond à la contribution au prix de l'obligation P du flux monétaire.

Mesures de durée

Durée de modifiée

La durée modifiée est simplement une transformation de la durée de macaulay. On peut donc exprimer la durée modifiée comme étant une fonction de la durée de macaulay.

$$D_m = \frac{D}{1+y} = -\frac{\partial P/P}{\partial y}$$

- ▶ La durée modifiée est liée à une variation du prix en pourcentage due à une petite variation du taux de rendement.
- ▶ Le signe négatif rappelle qu'il existe une relation inverse entre le prix et le taux de rendement.
- ▶ La durée modifiée est une meilleure mesure de la volatilité que la durée de Macaulay.

Mesures de durée

Durée de modifiée

On peut également exprimer la durée modifiée en deux parties:

- ▶ terme de coupon
- ▶ terme de valeur nominale

$$D_m = \frac{\frac{C}{y^2} \left[1 - \frac{1}{(1+y)^n} \right] + \frac{n(M-C/y)}{(1+y)^{n+1}}}{P}$$

Propriétés de la durée

De façon générale, la durée de macaulay est toujours plus petite ou égale au temps avant l'échéance de notre obligation.

$$D \leq n$$

Pour ce qui est de la durée modifiée, elle est toujours strictement inférieure au temps avant l'échéance de notre obligation.

$$D_m < n$$

Par contre, si le taux de coupon est de 0 ($TC = 0$), c'est à dire que nous avons une obligation zéro-coupon, alors la durée de macaulay est égale au temps avant l'échéance de notre obligation et la durée modifiée est strictement inférieure au temps avant l'échéance de notre obligation.

$$D = n$$

Propriétés de la durée

En gardant les paramètres de notre obligation constants, on peut poser les propriétés suivantes.

- ▶ Une hausse du taux de coupon et par le fait même du coupon lui même, entrainera une baisse de la durée de macaulay et de la durée modifiée.

$$\uparrow TC \quad \Longleftrightarrow \quad \downarrow D$$

$$\uparrow TC \quad \Longleftrightarrow \quad \downarrow D_m$$

- ▶ Une augmentation du temps avant l'échéance, entrainera normalement une augmentation de la durée de macaulay et de la durée modifiée.

$$\uparrow n \quad \Longleftrightarrow \quad \uparrow D$$

$$\uparrow n \quad \Longleftrightarrow \quad \uparrow D_m$$

Propriétés de la durée

- Une hausse du rendement requis entrainera une baisse de la durée de macaulay et de la durée modifiée.

$$\uparrow y \quad \Longleftrightarrow \quad \downarrow D$$

$$\uparrow y \quad \Longleftrightarrow \quad \downarrow D_m$$

Approximation de la variation de prix

- ▶ Un aspect intéressant de la durée modifiée est qu'elle nous permet d'approximer la variation en dollar du prix d'une obligation.
- ▶ Nous allons représenter une variation de prix en dollar par ΔP et non ∂P .
- ▶ En effet, ∂ représente un changement infinitésimal du prix, c'est à dire un changement à la limite de 0.

Approximation de la variation de prix

Si nous posons maintenant l'équation de la durée modifiée suivante:

$$D_m = -\frac{\partial P/P}{\partial y}$$

- ▶ On peut voir que dans la formule de la durée modifiée, les changements de taux y et de prix P sont de nature infinitésimale.
- ▶ Afin d'approximer la variation du prix P , nous substituons ∂P par ΔP et ∂y par Δy .
- ▶ Afin de rendre la formule valide, il faut modifier le signe égal = par le signe d'approximation $\approx$.

$$D_m \approx -\frac{\Delta P/P}{\Delta y}$$

Approximation de la variation de prix

On peut ensuite effectuer une manipulation algébrique afin d'approximer la variation du prix de notre obligation avec la durée modifiée.

$$\frac{\Delta P}{P} \approx D_m \Delta y$$

$$\Delta P \approx D_m P \Delta y$$

- ▶ On voit dans cette formule que l'approximation de la variation du prix de notre obligation est une fonction de la durée modifiée, du prix lui-même et de la variation du taux de rendement requis.
- ▶ Étant donné qu'il s'agit d'une approximation, il faut être prudent avec la valeur que nous obtiendrons.
- ▶ Plus la variation de y , (Δy) sera petite, plus la valeur obtenue par approximation sera précise.

Introduction à la convexité

- ▶ Comme nous l'avons mentionné dans la section précédente, la durée offre une mesure acceptable pour la volatilité du prix d'une obligation.
- ▶ On sait déjà que cette mesure est imparfaite pour de grande variation du taux de rendement.
- ▶ Une solution lorsque nous avons une forte variation du taux de rendement est d'utiliser une mesure de convexité.
- ▶ En effet, la durée ne tient pas en compte la convexité existant dans la relation prix et taux de rendement.

Introduction à la convexité

- ▶ Pour la durée, nous avons utilisé la dérivé première de notre fonction de prix par rapport au taux de rendement.
- ▶ Dans le cas de la convexité, il nous suffit de dérivé à nouveau par rapport au taux de rendement. Plus précisément, on prend la dérivé seconde de notre fonction de prix par rapport au taux de rendement.

$$Conv = \frac{\partial^2 P / P}{\partial y^2}$$

Mesure de convexité

- ▶ Nous allons maintenant voir la formule de la convexité.
- ▶ La première que nous allons voir est celle faisant la somme des flux monétaires actualisés.

$$Conv = \frac{\sum_{t=1}^n \frac{t(t+1)C}{(1+y)^{t+2}} + \frac{n(n+1)M}{(1+y)^{n+2}}}{P}$$

- ▶ La deuxième formule remplace la série de coupons actualisés par une annuité dans le but de simplifier la première.

$$Conv = \frac{\frac{2C}{y^3} \left[1 - \frac{1}{(1+y)^n} \right] - \frac{2Cn}{y^2(1+y)^{n+1}} + \frac{n(n+1)(M-C/y)}{(1+y)^{n+2}}}{P}$$

Unités de mesure de la convexité

- ▶ Comme pour la durée, la convexité est exprimée en nombre de période de coupon.
- ▶ À la différence de la durée, l'unité de mesure de la convexité est élevée au carré. On parlera donc de (période de coupon²).
- ▶ Il existera également une mesure de convexité en dollar qui se trouve en multipliant la mesure convexité par le prix de l'obligation.

$$Conv^{\$} = Conv \times P$$

Propriétés de la convexité

1. Taux de rendement

$r \downarrow \iff \text{Convexité} \uparrow$

$r \uparrow \iff \text{Convexité} \downarrow$

2. Taux de coupon

$TC \uparrow \iff \text{Convexité} \downarrow$

$TC \downarrow \iff \text{Convexité} \uparrow$

Approximation (quadratique)

En utilisant la durée et la convexité, il nous sera possible d'approximer la variation du prix d'une obligation grâce à l'expansion de Taylor. Voici la formule obtenue après quelques manipulations.

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -D_m \Delta y + \frac{1}{2} \text{Conv}(\Delta y)^2$$

où

- ▶ D_m = durée modifiée
- ▶ Conv = convexité
- ▶ y = taux de rendement
- ▶ Δy = variation dans le taux de rendement
- ▶ P = prix de notre obligation
- ▶ ΔP = variation dans le prix de notre obligation

Hypothèses importantes pour durée et convexité

- ▶ Les mesures présentées supposent une structure à terme des taux d'intérêt horizontale et des mouvements de taux parallèles.
- ▶ Elles sont valides pour des obligations standards. Elles ne s'appliquent pas toujours lorsqu'il y a des clauses optionnelles.
- ▶ En particulier, l'objectif de la durée est de mesurer la sensibilité du prix par rapport au taux d'intérêt. La durée correspond à une moyenne pondérée des échéances presque exclusivement pour des obligations standards.

Durée et convexité effectives

Il est possible d'approximer la durée modifiée et la convexité pour obtenir des mesures valides pour n'importe quel type d'obligations et n'importe quelle forme de la structure à terme des taux. Les mesures obtenues sont appelées la durée et la convexité effectives:

$$D_m \approx \frac{P_- - P_+}{2(P_0)(\Delta y)}$$

$$Conv \approx \frac{P_+ + P_- - 2P_0}{(P_0)(\Delta y)^2}$$