

# Section 9 : Gestion de portefeuille obligataire (3<sup>e</sup> partie)

## GSF-3100 Marché des capitaux

Simon-Pierre Boucher<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Département de finance, assurance et immobilier  
Faculté des sciences de l'administration  
Université Laval

Automne 2021

# Régimes de retraite à prestations déterminées (PD)

Historiquement, les régimes de retraite à prestations déterminées (PD) étaient principalement gérés uniquement en gardant à l'esprit les actifs.

L'hypothèse émise par les promoteurs était que si les actifs augmentaient comme l'indiquent les principaux indices du marché pour les différentes catégories d'actifs, ils seraient en quelque sorte suffisants à long terme pour satisfaire les obligations.

Depuis l'adoption de la Loi sur la protection des régimes de retraite de 2006, les promoteurs de régimes de retraite à PD doivent désormais marquer leur passif projeté sur le marché en fonction des taux d'actualisation prescrits qui ont été introduits progressivement en 2012 (Liability-Driven Investing (LDI)).

# Responsabilités d'un régime de retraite à prestation déterminé

Pour gérer efficacement les risques de responsabilité, nous commençons à examiner comment les passifs futurs d'un régime de retraite prestation déterminé sont projetés sur la durée de vie des participants.

Les modalités du régime de retraite prestation déterminé établissent les conditions d'acquisition des droits et le montant à verser aux participants à la retraite à différents âges.

La prévision des passifs nécessite de faire des hypothèses sur le taux d'inflation et la durée de vie prévue des membres.

# Risques liés aux responsabilités des fonds de pension

Le passif projeté d'une caisse de retraite prestation déterminé comporte trois risques:

- le risque de taux d'intérêt,

- le risque d'inflation

- le risque de longévité

# Risques liés aux responsabilités des fonds de pension

## Le risque de taux d'intérêt

Le risque de taux d'intérêt des passifs projetés peut être quantifié de la même manière que pour les actifs: **calcul de la duration des passifs.**

Nous appelons cette durée la durée de la responsabilité.

La durée du passif est importante dans la formulation d'une stratégie de LDI, car la couverture du risque de taux d'intérêt implique un appariement de la durée en dollars des actifs et des passifs.

# Risques liés aux responsabilités des fonds de pension

## Le risque d'inflation

Le risque d'inflation pour un régime de retraite à prestation déterminé est le risque que le taux d'inflation réel subi au cours de la période de projection soit supérieur à celui présumé dans la projection du passif.

## Le risque de longévité

Le risque de longévité pour un régime de retraite prestation déterminé est le risque que l'espérance de vie réelle des participants au régime au-delà de leur date de retraite dépasse l'espérance de vie présumée dans la projection du passif.

Le montant qui devra effectivement être payé au participant au régime dépassera le montant projeté.

# Le déficit de financement

Le déficit de financement est la différence entre la valeur marchande des actifs et la valeur des passifs.

$$DF = PVP - MVA$$

Où

$DF$  = déficit de financement

$PVP$  = Valeur projetée du passif

$MVA$  = Valeur marchande de l'actif du fonds

# Risque de déficit

Le risque de déficit de financement est le montant en dollars par lequel le déficit de financement augmentera en raison de changements défavorables dans les facteurs qui ont une incidence sur les actifs et les passifs.

Qui comprennent les risques suivants:

- Taux d'intérêt

- Inflation

- Longévité

- Crédit

- liquidité

- devises

- remboursement anticipé

# Risque de déficit

La volatilité du déficit de financement dépend de la volatilité de ces facteurs de risque.

Le problème avec la volatilité du déficit de financement est que les exigences réglementaires de financement peuvent exiger des cotisations supplémentaires de la part du promoteur du régime de retraite à prestation déterminé

# Ratio de financement

Une autre façon d'évaluer la santé d'un régime de retraite à prestation déterminé consiste à examiner l'actif du régime en pourcentage de son passif projeté.

Plus le ratio de financement est bas, plus le déficit de financement est grand.

$$RF = \frac{MVA}{PVP}$$

Où

$RF$  = Ratio de financement

$PVP$  = Valeur projetée du passif

$MVA$  = Valeur marchande de l'actif du fonds

# Couverture du risque de taux d'intérêt

## Immunsation

L'immunsation est l'investissement des actifs de sorte qu'elle soit à l'abri d'un changement général du taux d'intérêt.

## Immunsation pour une période

La stratégie d'immunsation à période unique n'est pas une stratégie utilisée par les régimes de retraite prestation déterminé pour couvrir le risque de taux d'intérêt, car elle consiste à ne couvrir qu'un seul paiement de passif à l'avenir.

La stratégie est utilisée par les compagnies d'assurance-vie pour couvrir le risque de taux d'intérêt d'un produit d'assurance populaire

# Risque d'immunisation

Le risque d'immunisation est le risque de réinvestissement.

Le portefeuille qui présente le moins de risque de réinvestissement aura le moins de risque d'immunisation.

Lorsqu'il existe une forte dispersion des flux de trésorerie autour de la date d'échéance du passif, le portefeuille est exposé à un risque de réinvestissement élevé

Lorsque les flux de trésorerie sont concentrés autour de la date d'échéance du passif, comme dans le cas du portefeuille bullet, le portefeuille est soumis à un faible risque de réinvestissement.

## Mesure du risque d'immunisation

L'objectif de la construction d'un portefeuille immunisé est donc de faire correspondre la durée du portefeuille à la durée du passif et de sélectionner le portefeuille qui minimise le risque d'immunisation  $M^2$ .

$$M^2 = \frac{CF_1(1-H)^2}{1+y} + \frac{CF_1(2-H)^2}{(1+y)^2} + \dots + \frac{CF_1(n-H)^2}{(1+y)^n}$$

où

$CF_t$  = flux de trésorerie du portefeuille à la période  $t$

$H$  = durée (en années) de l'horizon d'investissement ou de la date d'échéance du passif

$y$  = rendement du portefeuille

$n$  = délai de réception du dernier flux de trésorerie.

# Durée de Macaulay

Supposons qu'un investisseur achète une obligation à coupon semestriel de  $n$  ans pour  $P_0$  au moment 0 et la conserve jusqu'à l'échéance.

Les montants des paiements qu'elle reçoit sont différents à des moments différents, une façon de résumer l'horizon est de considérer la moyenne pondérée du temps des flux de trésorerie.

Nous utilisons les valeurs actuelles des flux de trésorerie (et non leurs valeurs nominales) pour calculer les pondérations.

## Durée de Macaulay

Prenons un investissement qui génère des flux de trésorerie de montant  $C_t$  au temps  $t = 1, \dots, n$ , mesurés en périodes de paiement. Supposons que le taux d'intérêt soit de  $i$  par période de paiement et que l'investissement initial soit  $P$ .

On note la valeur actuelle de  $C_t$  par  $PV(C_t)$ , qui est donnée par

$$PV(C_t) = \frac{C_t}{(1+i)^t}$$

On peut donc avoir le prix de l'obligation comme suit:

$$P = \sum_{t=1}^n PV(C_t)$$

## Durée de Macaulay

En utilisant  $PV(C_t)$  comme facteur de proportion, nous définissons la pondération moyenne du temps des flux de trésorerie, notée  $D$

$$\begin{aligned} D &= \sum_{t=1}^n t \left[ \frac{PV(C_t)}{P} \right] \\ &= \sum_{t=1}^n t w_t \end{aligned}$$

Où

$$w_t = \frac{PV(C_t)}{P}$$

# Stratégies d'immunisation

Les institutions financières sont souvent confrontées au problème de la prise en charge d'un passif d'un montant donné dans le futur.

Nous considérons un passif de montant  $V$  à payer  $T$  périodes plus tard.

Une stratégie simple pour répondre à cette obligation consiste à acheter un obligation à coupon de valeur nominale  $V$ , qui arrive à échéance au moment  $T$

Cette stratégie s'appelle l'appariement des flux de trésorerie

Lorsque l'appariement des flux de trésorerie est adopté, l'obligation est toujours remplie, même en cas de fluctuation du taux d'intérêt

Les obligations zéro-coupon de l'échéance requise peuvent ne pas être disponibles sur le marché.

# Stratégies d'immunisation

L'immunisation est une stratégie de gestion d'un portefeuille d'actifs de manière à ce que l'entreprise soit à l'abri des fluctuations des taux d'intérêt

Pour la situation simple ci-dessus, la stratégie d'immunisation à date cible peut être adoptée.

Cela implique de détenir un portefeuille d'obligations dont la valeur s'accumulera jusqu'à  $V$  au temps  $T$  au taux d'intérêt actuel du marché.

Le portefeuille doit cependant être construit de telle manière que sa durée de Macaulay  $D$  soit égale à la date cible du passif  $T$

# Stratégies d'immunisation

Supposons que le taux de rendement actuel soit  $i$ , la valeur actuelle du portefeuille d'obligations, notée  $P(i)$ , doit être

$$P(i) = \frac{V}{(1+i)^T}$$

Si le taux d'intérêt reste inchangé jusqu'au moment  $T$ , ce portefeuille obligataire s'accumulera jusqu'à la valeur  $V$ , à la date d'échéance du passif.

Si le taux d'intérêt augmente, le portefeuille d'obligations perdra de la valeur. Cependant, les paiements de coupons généreront des intérêts plus élevés et compenseront cela.

En revanche, si le taux d'intérêt baisse, la valeur du portefeuille obligataire augmente, avec un ralentissement ultérieur de l'accumulation des intérêts.

# Stratégies d'immunisation

Dans les deux cas, comme nous le verrons, la valeur du portefeuille obligataire s'accumule finalement à  $V$  au temps  $T$ , à condition que la duration Macaulay  $D$  du portefeuille soit égale à  $T$ .

Nous considérons la valeur de l'obligation pour un petit changement ponctuel du taux d'intérêt.

Si le taux d'intérêt passe à  $i + \Delta i$  immédiatement après l'achat de l'obligation, le prix de l'obligation devient  $P(i + \Delta i)$  qui, au temps  $T$ , s'accumule à  $P(i + \Delta i)(1 + i + \Delta i)^T$  si le taux d'intérêt reste à  $i + \Delta i$ .

# Stratégies d'immunisation

Nous approchons  $(1 + i + \Delta i)^T$  au premier ordre de  $\Delta i$  pour obtenir

$$(1 + i + \Delta i)^T \approx (1 + i)^T + T(1 + i)^{T-1}\Delta i$$

$$P(i + \Delta i)(1 + i + \Delta i)^T \approx P(i)(1 - D^*\Delta i) \left[ (1 + i)^T + T(1 + i)^{T-1}\Delta i \right]$$

Où

$$D^* = \frac{D}{1+i}$$

$$T = D$$

# Stratégies d'immunisation

$$\begin{aligned}P(i + \Delta i)(1 + i + \Delta i)^T &\approx P(i) \left[ (1 + i)^D - D^* \Delta i (1 + i)^D + D(1 + i)^{D-1} \Delta i \right] \\&= P(i)(1 + i)^D \\&= V\end{aligned}$$

## Exercice : énoncé

Une entreprise doit payer 100 millions de dollars dans 3,6761 ans. Le taux d'intérêt actuel du marché est de 5,5%. Vous savez que sur le marché il y a l'obligation suivante de disponible.

Obligation avec échéance de 4 ans avec un coupon de 6% payable annuellement et offrant un rendement à l'échéance de 5,5%.

Démontrez la stratégie de financement que l'entreprise devrait adopter avec l'obligation.

Considérez les scénarios où il y a un changement immédiat et unique du taux d'intérêt à 5%

## Exercise : Solution

| $t$   | $C_t$ | $PV(C_t)$ | $w_t$  | $t w_t$ |
|-------|-------|-----------|--------|---------|
| 1     | 6     | 5.6872    | 0.0559 | 0.0559  |
| 2     | 6     | 5.3907    | 0.053  | 0.106   |
| 3     | 6     | 5.1097    | 0.0502 | 0.1506  |
| 4     | 106   | 85.565    | 0.8409 | 3.3636  |
| Total |       | 101.7526  | 1      | 3.6761  |

## Exercice : Solution

On trouve la Valeur présente du coupon reçu en  $t = 1$

$$PV(C_1) = \frac{6}{(1 + 0.055)^1} = 5.6872$$

On trouve la Valeur présente du coupon reçu en  $t = 2$

$$PV(C_2) = \frac{6}{(1 + 0.055)^2} = 5.3907$$

On trouve la Valeur présente du coupon reçu en  $t = 3$

$$PV(C_3) = \frac{6}{(1 + 0.055)^3} = 5.1097$$

## Exercice : Solution

On trouve la Valeur présente du coupon et de la valeur nominal reçu en  $t = 4$

$$PV(C_4) = \frac{100 + 6}{(1 + 0.055)^4} = 85.565$$

On peut donc avoir le prix de l'obligation comme suit:

$$\begin{aligned} P &= \sum_{t=1}^4 PV(C_t) \\ &= PV(C_1) + PV(C_2) + PV(C_3) + PV(C_4) \\ &= 5.6872 + 5.3907 + 5.1097 + 85.565 \\ &= 101.7526 \end{aligned}$$

## Exercice : Solution

On veut ensuite trouver les pondérations  $w_t$  en utilisant l'équation suivante:

$$w_t = \frac{PV(C_t)}{P}$$

On trouve  $w_1$

$$w_1 = \frac{PV(C_1)}{P} = \frac{5.6872}{101.7526} = 0.0559$$

On trouve  $w_2$

$$w_2 = \frac{PV(C_2)}{P} = \frac{5.3907}{101.7526} = 0.053$$

## Exercise : Solution

On trouve  $w_3$

$$w_3 = \frac{PV(C_3)}{P} = \frac{5.1097}{101.7526} = 0.0502$$

On trouve  $w_4$

$$w_4 = \frac{PV(C_4)}{P} = \frac{85.565}{101.7526} = 0.8409$$

## Exercice : Solution

Par la suite, on trouve  $tw_t$

$$t \times w_1 = 1 \times w_1 = 1 \times 0.0559 = 0.0559$$

$$t \times w_2 = 2 \times w_2 = 2 \times 0.053 = 0.106$$

$$t \times w_3 = 3 \times w_3 = 3 \times 0.0502 = 0.1506$$

$$t \times w_4 = 4 \times w_4 = 4 \times 0.8409 = 3.6761$$

## Exercice : Solution

Nous avons tous les variables nécessaires afin de trouver la durée de macaulay

$$\begin{aligned} D &= \sum_{t=1}^4 t \left[ \frac{PV(C_t)}{P} \right] \\ &= \sum_{t=1}^4 t w_t \\ &= 1 \times w_1 + 2 \times w_2 + 3 \times w_3 + 4 \times w_4 = 3.6761 \end{aligned}$$

## Exercice : Solution

La valeur actuelle de l'obligation devrait être

$$\frac{1000000000\$}{(1.055)^{3.6761}} = 82133800\$$$

Le prix de l'obligation est de 101,7526% de la valeur nominale et la duration de Macaulay est de 3,6761 années, date cible du paiement.

l'obligation achetée doit avoir une valeur nominale de

$$\frac{82133800\$}{1.017526} = 80719100\$$$

## Exercice : Solution

À la fin de l'année 3, la valeur cumulée des paiements de coupon est

$$\begin{aligned} & C_1(1.055)^2 + C_2(1.055)^1 + C_3(1.055) \\ &= (80719100\$ \times 0.06)(1.055)^2 + (80719100\$ \times 0.06)(1.055)^1 \\ &+ (80719100\$ \times 0.06) \\ &= 15343200\$ \end{aligned}$$

Et le prix de l'obligation est (l'obligation arrivera à échéance dans 1 an avec un paiement de coupon de 6% et un remboursement de 80 719 100\$)

$$\frac{80719100\$ \times 0.06 + 80719100\$}{1.055} = 81101700\$$$

## Exercice : Solution

Ainsi, le prix de l'obligation plus les valeurs des coupons accumulés au temps 3,6761 ans est

$$(81101700\$ + 15343200\$)(1.055)^{0.6761} = 100000000\$$$

## Exercice : Solution

Supposons que le taux d'intérêt tombe à 5% immédiatement après l'achat de l'obligation, la valeur du coupon accumulé 3 ans plus tard est

$$\begin{aligned} & C_1(1.05)^2 + C_2(1.05)^1 + C_3(1.05) \\ &= (80719100\$ \times 0.06)(1.05)^2 + (80719100\$ \times 0.06)(1.05)^1 \\ &+ (80719100\$ \times 0.06)(1.05) \\ &= 15268000\$ \end{aligned}$$

Et le prix de l'obligation est

$$\frac{80719100\$ \times 0.06 + 80719100\$}{1.05} = 81487000\$$$

## Exercice : Solution

Le total de la valeur de l'obligation et des paiements de coupon accumulés après 3,6761 années est

$$(81487000\$ + 15268000\$)(1.05)^{0.6761} = 100000000\$$$