

Section 02 : Régression et Moindres Carrés Ordinaires (Séance 2)

GSF-6053: Économétrie Financière

Simon-Pierre Boucher¹

¹Département de finance, assurance et immobilier
Faculté des sciences de l'administration
Université Laval

18 Janvier 2022

Références

Obligatoires:

- ▶ **Notes de cours:** Section 2 (Professeure: Marie-Hélène Gagnon)
- ▶ **Woolridge:** chapitres 2 à 7

Complémentaires:

- ▶ **Gujarati et Porter:** chapitres 1 à 9.
- ▶ **Greene:** chapitres 2, 3, 4, 5, 9, 14, 20, appendices C et D

Plan de la séance

Modèle de Régression

Moindres Carrés Ordinaires (En sommation)

Moindres Carrés Ordinaires (Format Matricielle)

Exemple Numérique

Modèle de Régression

Moindres Carrés Ordinaires (En sommation)

Moindres Carrés Ordinaires (Format Matricielle)

Exemple Numérique

Modèle de Régression

- ▶ Espérance conditionnelle d'une variable indépendante (**X**) conditionnelle à la valeur connue des régresseurs (**Y**)

$$E(Y|X_i) = f(X_i)$$

Où $f(X_i)$ est une fonction des variables explicatives **X**

- ▶ Relation conditionnelle linéaire

$$E(Y|X_i) = \beta_1 + \beta_2 X_i$$

- ▶ Composite de Y :
 - ▶ Partie systématique ou déterministe, $E(Y|X_i)$
 - ▶ Partie aléatoire et non systématique, μ_i

Modèle de Régression

- ▶ Modèle de Régression Linéaire Simple

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \mu_i$$

- ▶ Prendre espérance des deux cotés

$$E(Y_i|X_i) = E(Y|X_i) + E(\mu_i)$$

Sachant $E(Y_i|X_i) = E(Y|X_i)$ alors $E(\mu_i) = 0$

- ▶ Les paramètres obtenus à partir d'un échantillon sont des estimateurs (notés avec $\hat{}$)

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i$$

$$Y_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i + \hat{\mu}_i$$

$\hat{\mu}_i$ représente l'estimateur du terme d'erreur, le résidu

Modèle de Régression

Moindres Carrés Ordinaires (En sommation)

Moindres Carrés Ordinaires (Format Matricielle)

Exemple Numérique

Moindres Carrés Ordinaires (En sommation)

- Définissons les résidus

$$\hat{\mu}_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_i$$

- Choisir estimateurs de $\hat{\beta}_1$ et $\hat{\beta}_2$ de façon à minimiser la somme des carrés des résidus

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N \hat{\mu}_i^2 &= [\hat{\mu}_1^2 + \hat{\mu}_2^2 + \dots + \hat{\mu}_N^2] \\ &= \sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_i)^2\end{aligned}$$

Moindres Carrés Ordinaires (En sommation)

- ▶ Minimiser la somme des carrés des résidus par rapport à $\hat{\beta}_1$ et $\hat{\beta}_2$

$$\min_{\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2} \sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_i)^2 = \min_{\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2} \sum_{i=1}^N \hat{\mu}_i^2$$

- ▶ Équation normales

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^N \hat{\mu}_i^2}{\partial \hat{\beta}_1} = -2 \sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_i) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^N \hat{\mu}_i^2}{\partial \hat{\beta}_2} = -2 \sum_{i=1}^N X_i (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_i) = 0 \quad (2)$$

Moindres Carrés Ordinaires (En sommation)

- Solution de $\hat{\beta}_1$ à l'aide de l'équation (1)

$$-2 \sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^N Y_i - N\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^N X_i = 0$$

$$N\hat{\beta}_1 = \sum_{i=1}^N Y_i - \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^N X_i$$

Moindres Carrés Ordinaires (En sommation)

- Solution de $\hat{\beta}_1$ à l'aide de l'équation (1)

On pose la propriété suivante:

- $\sum_{i=1}^N Y_i = N\bar{Y}$
- $\sum_{i=1}^N X_i = N\bar{X}$

$$N\hat{\beta}_1 = N\bar{Y} - N\hat{\beta}_2\bar{X}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{N\bar{Y}}{N} - \frac{N\hat{\beta}_2\bar{X}}{N}$$

Solution de $\hat{\beta}_1$

$$\hat{\beta}_1 = \bar{Y} - \hat{\beta}_2\bar{X}$$

Moindres Carrés Ordinaires (En sommation)

- Solution de $\hat{\beta}_2$ à l'aide de l'équation (2)

$$-2 \sum_{i=1}^N X_i (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^N X_i Y_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^N X_i - \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^N X_i^2 = 0$$

Sachant $\bar{Y} - \hat{\beta}_2 \bar{X}$

$$\sum_{i=1}^N X_i Y_i - [\bar{Y} - \hat{\beta}_2 \bar{X}] \sum_{i=1}^N X_i - \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^N X_i^2 = 0$$

Moindres Carrés Ordinaires (En sommation)

- Solution de $\hat{\beta}_2$ à l'aide de l'équation (2)

$$\sum_{i=1}^N X_i Y_i - \bar{Y} \sum_{i=1}^N X_i \hat{\beta}_2 \bar{X} \sum_{i=1}^N X_i - \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^N X_i^2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^N X_i Y_i - N\bar{X}\bar{Y} + \hat{\beta}_2 N\bar{X}^2 - \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^N X_i^2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^N X_i Y_i - N\bar{X}\bar{Y} = \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^N X_i^2 - \hat{\beta}_2 N\bar{X}^2$$

$$\sum_{i=1}^N X_i Y_i - N\bar{X}\bar{Y} = \hat{\beta}_2 \left[\sum_{i=1}^N X_i^2 - N\bar{X}^2 \right]$$

Moindres Carrés Ordinaires (En sommation)

- Solution de $\hat{\beta}_2$ à l'aide de l'équation (2)

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^N X_i Y_i - N \overline{X} \overline{Y}}{\sum_{i=1}^N X_i^2 - N \overline{X}^2}$$

Sachant que

- $\sum_{i=1}^N X_i Y_i - N \overline{X} \overline{Y} = \sum_{i=1}^N (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})$
- $\sum_{i=1}^N X_i^2 - N \overline{X}^2 = \sum_{i=1}^N (X_i - \overline{X})^2$

Solution de $\hat{\beta}_2$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^N (X_i - \overline{X})^2}$$

Modèle de Régression

Moindres Carrés Ordinaires (En sommation)

Moindres Carrés Ordinaires (Format Matricielle)

Exemple Numérique

Moindres Carrés Ordinaires (Format Matricielle)

- Vecteur de la variable à expliquer ($\mathbf{n} \times \mathbf{1}$)

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

- Matrice de variables explicatives ($\mathbf{n} \times (\mathbf{k}+1)$)

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & \cdots & \cdots & x_{k2} \\ 1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & \cdots & \cdots & x_{kn} \end{bmatrix}$$

Moindres Carrés Ordinaires (Format Matricielle)

- Vecteur de coefficients associés ($\mathbf{k+1} \times \mathbf{1}$)

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}$$

- Vecteur associé au terme d'erreur ($\mathbf{n} \times \mathbf{1}$)

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Moindres Carrés Ordinaires (Format Matricielle)

► Modèle Univarié

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & \cdots & \cdots & x_{k2} \\ 1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & \cdots & \cdots & x_{kn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Que nous réécrivons comme suit:

$$Y = X\beta + u$$

Moindres Carrés Ordinaires (Format Matricielle)

- ▶ Hypothèses distributionnelles sur u

- ▶ $u \sim iid$ et $E(u) = 0$
- ▶ $V(u) = \sigma^2 I$
- ▶ $u \sim iid N(0, \sigma^2)$

$$E(u) = \begin{pmatrix} E(u_1) = 0 \\ E(u_2) = 0 \\ \vdots \\ E(u_n) = 0 \end{pmatrix}$$

- ▶ Il n'y a pas de corrélation sérielle des erreurs

$$V(u) = E(uu') = \sigma^2 I$$

- ▶ Découle de l'indépendance

$$COV = [u_i, u_j] = 0$$

Pour $i \neq j \forall i$ et $\forall j$

Moindres Carrés Ordinaires (Format Matricielle)

$$E(uu') = E \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} (u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n)$$

$$E(uu') = E \begin{pmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 & \cdots & u_1 u_n \\ u_1 u_2 & u_2^2 & \cdots & u_2 u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1 u_n & u_2 u_n & \cdots & u_n^2 \end{pmatrix}$$

$$E(uu') = \begin{pmatrix} E(u_1^2) & E(u_1 u_2) & \cdots & E(u_1 u_n) \\ E(u_1 u_2) & E(u_2^2) & \cdots & E(u_2 u_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(u_1 u_n) & E(u_2 u_n) & \cdots & E(u_n^2) \end{pmatrix}$$

Moindres Carrés Ordinaires (Format Matricielle)

Rappel:

$$\text{Var}(u) = E(u)^2 - [E(u)]^2$$

Avec Hypothèse d'indépendance:

$$V(u) = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \sigma^2 & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma^2 \end{pmatrix} = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Dérivation MCO (Format Matricielle)

$$\hat{\beta} = \text{ARGMIN}_{\beta}(\hat{u}'\hat{u})$$

$$\hat{\beta} = \text{ARGMIN}_{\beta}((Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta}))$$

Distribution des termes de la multiplication matricielle:

$$(Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta}) = Y'Y - Y'X\hat{\beta} - \hat{\beta}'X'Y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}$$

Sachant

$$Y'X\hat{\beta} = \hat{\beta}'X'Y$$

Alors:

$$(Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta}) = Y'Y - 2Y'X\hat{\beta} + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}$$

Dérivation MCO (Format Matricielle)

- Dérivé de la somme des résidus au carrés par rapport à β

$$\frac{\partial(RSS)}{\partial \hat{\beta}} = \frac{\partial(Y'Y - 2Y'X\hat{\beta} + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}}$$

Sachant

$$\frac{\partial([Y'X]\hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}} = [Y'X] = X'Y$$

$$\frac{\partial(\hat{\beta}'[X'X]\hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}} = 2[X'X]\hat{\beta}$$

Dérivation MCO (Format Matricielle)

$$\frac{\partial(RSS)}{\partial \hat{\beta}} = -2X'Y + 2X'X\hat{\beta} = 0$$

$$X'Y = X'X\hat{\beta}$$

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

Estimateur de $\hat{\beta}$ par MCO

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

Dérivation MCO (Format Matricielle)

- ▶ Il n'existe pas d'estimateur de σ^2 pour la méthode des Moindres carrés ordinaires
- ▶ On peut estimer empiriquement comme suit

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2 = \frac{\hat{u}'\hat{u}}{n}$$

Modèle de Régression

Moindres Carrés Ordinaires (En sommation)

Moindres Carrés Ordinaires (Format Matricielle)

Exemple Numérique

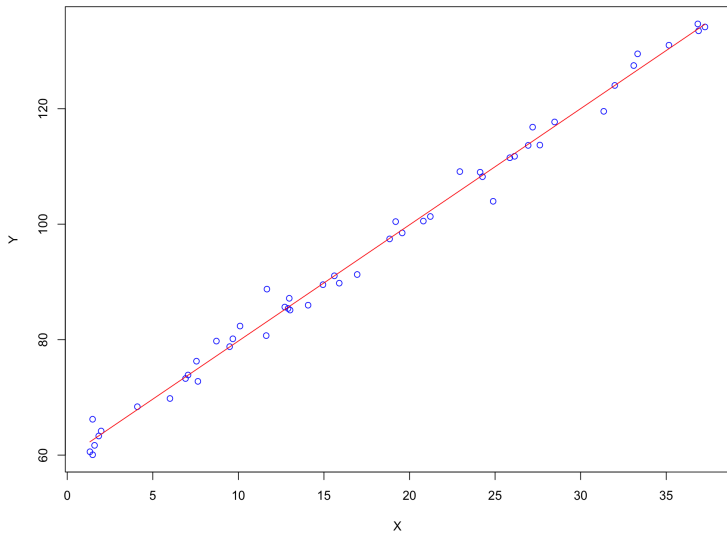
Exemple Numérique

- ▶ Nous allons générer des variables aléatoires à l'aide d'un modèle dont nous allons déterminer les paramètres.
- ▶ Nous allons utiliser un modèle linéaire simple ayant le format suivant:

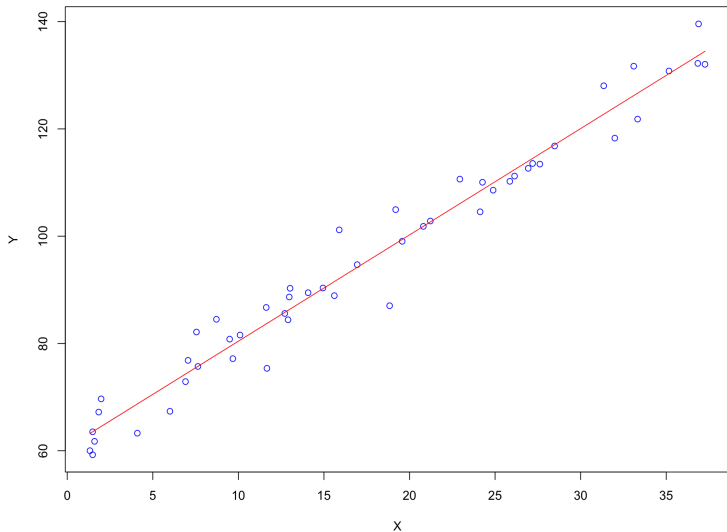
$$y = \beta_1 + \beta_2 x_i + \epsilon_i$$

- ▶ L'intercepte de notre modèle sera de $\beta_1 = 60$.
 - ▶ La pente de notre modèle sera de $\beta_2 = 2$.
 - ▶ Nous allons faire l'hypothèse que notre terme d'erreur suit une loi normale de moyenne 0 et variance 4 ($\epsilon \sim N(0, 4)$).
- ▶ Il nous est maintenant possible de déterminer une valeur pour chaque y_i en utilisant les x_i .
- ▶ Pour les x_i nous allons générer uniformément 40 observations entre 0 et 40.

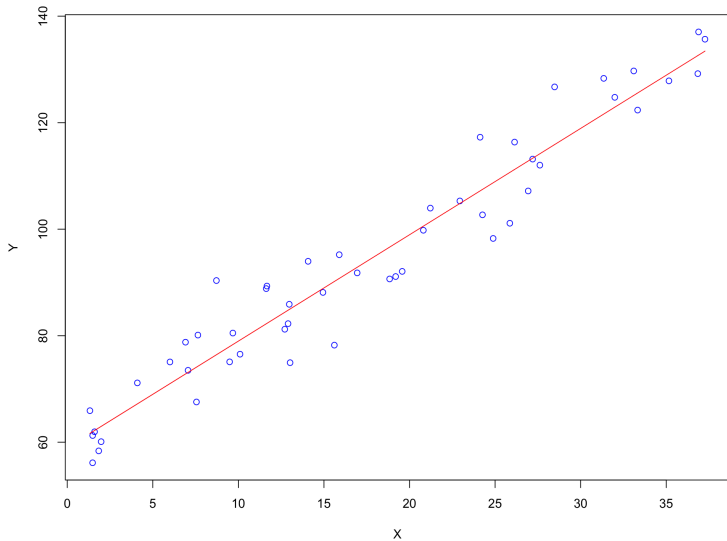
Nuage de points et régression linéaire ($\epsilon \sim N(0, 2)$)



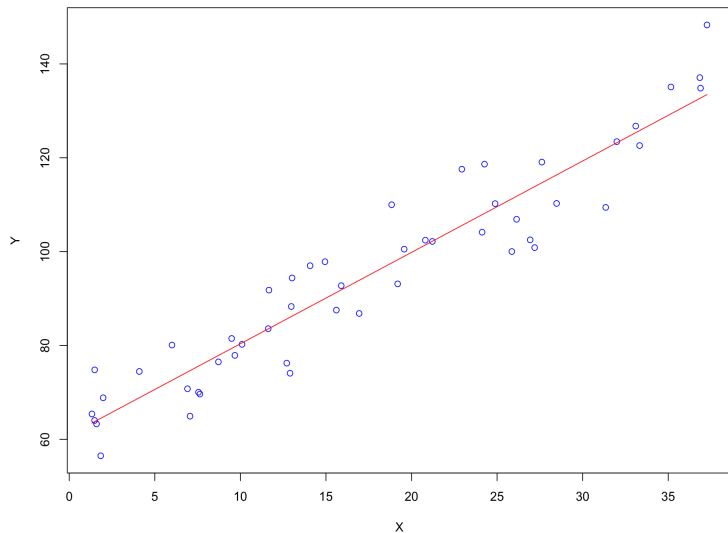
Nuage de points et régression linéaire ($\epsilon \sim N(0, 4)$)



Nuage de points et régression linéaire ($\epsilon \sim N(0, 6)$)



Nuage de points et régression linéaire ($\epsilon \sim N(0, 8)$)



Exemple Numérique

	$\epsilon \sim N(0, 2)$	$\epsilon \sim N(0, 4)$	$\epsilon \sim N(0, 6)$	$\epsilon \sim N(0, 8)$
(Intercept)	59.30*** (0.68)	59.28*** (1.35)	60.89*** (2.43)	55.68*** (2.31)
x	2.02*** (0.03)	2.03*** (0.06)	2.00*** (0.10)	2.13*** (0.10)
R ²	0.99	0.96	0.89	0.91
Adj. R ²	0.99	0.96	0.89	0.91
Num. obs.	50	50	50	50

*** $p < 0.001$; ** $p < 0.01$; * $p < 0.05$

Table: Table de régression