

Section 02 : Régression et Moindres Carrés Ordinaires (Séance 3)

GSF-6053: Économétrie Financière

Simon-Pierre Boucher¹

¹Département de finance, assurance et immobilier
Faculté des sciences de l'administration
Université Laval

25 Janvier 2022

Références

Obligatoires:

- ▶ **Notes de cours:** Section 2 (Professeure: Marie-Hélène Gagnon)
- ▶ **Woolridge:** chapitres 2 à 7

Complémentaires:

- ▶ **Gujarati et Porter:** chapitres 1 à 9.
- ▶ **Greene:** chapitres 2, 3, 4, 5, 9, 14, 20, appendices C et D

Plan de la séance

Maximum de Vraisemblance

MLE: Modèle de régression linéaire

Propriétés Estimateur MLE ET MCO

Propriétés de $\hat{\sigma}^2$

Estimateur de la variance sans biais

Maximum de Vraisemblance

MLE: Modèle de régression linéaire

Propriétés Estimateur MLE ET MCO

Propriétés de $\hat{\sigma}^2$

Estimateur de la variance sans biais

Maximum de Vraisemblance

- ▶ Le maximum de vraisemblance est une méthode générale pour estimer les paramètres d'un modèle statistique.
- ▶ Nous aurons une série d'observations d'une variable aléatoire y et un modèle statistique potentiel pour cette variable.
 - ▶ Ce modèle peut inclure la dépendance de y sur d'autres variables prédictives.
 - ▶ Ainsi qu'une distribution statistique pour la portion non-expliquée de la variation de y .
- ▶ Selon le maximum de vraisemblance, les meilleurs estimés des paramètres d'un modèle sont ceux qui maximisent la probabilité des valeurs observées de la variable

Maximum de Vraisemblance

- ▶ Fonction de densité pour une variable aléatoire Y conditionné sur un ensemble de paramètres θ

$$f(Y | \theta)$$

- ▶ La fonction de densité jointe de n observations est simplement le produit des densités individuels

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n | \theta) = \prod_{i=1}^n f(y_i | \theta) = L(\theta | Y)$$

- ▶ Ensemble de paramètres θ est inconnu.
 - ▶ Nous voulons les valeurs de Y provenant de l'échantillon.
- ▶ Donner à θ la valeur qui maximise la probabilité d'obtenir un échantillon identique à celui qu'on dispose.

Maximum de Vraisemblance

MLE: Modèle de régression linéaire

Propriétés Estimateur MLE ET MCO

Propriétés de $\hat{\sigma}^2$

Estimateur de la variance sans biais

MLE: Modèle de régression linéaire

- Hypothèse distributionnelle sur les u_t

$$u_t \sim iid N(0, \sigma^2)$$

- Loi conjointe des $u_1, u_2, \dots, u_T$

$$f(u_1, u_2, \dots, u_T) = \prod_{t=1}^T f(u_t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^T e^{-\frac{\sum_{t=1}^T (u_t)^2}{2\sigma^2}}$$

- Intéressés à la loi conjointes des y_t
- Effectué un changement de variable:

$$u_t = Y_t - X_t' \beta$$

MLE: Modèle de régression linéaire

- Loi conjointe des Y_t (Vraisemblance)

$$\begin{aligned} f(Y_1, Y_2, \dots, Y_T) &= \prod_{t=1}^T g(Y_t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^T e^{-\frac{\sum_{t=1}^T (Y_t - X_t' \beta)^2}{2\sigma^2}} \\ &= (2\pi\sigma^2)^{-T/2} e^{-\frac{(Y - X\beta)'(Y - X\beta)}{2\sigma^2}} \end{aligned}$$

- On veut ensuite obtenir la Log-Vraisemblance en prenant le logarithme de la fonction de vraisemblance.

$$L = -\frac{T}{2} \log(2\pi) - \frac{T}{2} \log(\sigma^2) - \frac{1}{2} \times \frac{(Y - X\beta)'(Y - X\beta)}{\sigma^2}$$

MLE: Modèle de régression linéaire

- ▶ Maximiser la log-vraisemblance en fonction de β et σ^2
- ▶ **En fonction de β**

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = \frac{1}{\sigma^2} \times \frac{\partial (Y'Y - 2Y'X\beta + \beta'X'X\beta)}{\partial \beta} = 0$$

Condition de première ordre:

$$-2X'Y + 2X'X\beta = 0$$

$$-X'Y + X'X\beta = 0$$

$$X'X\beta = X'Y$$

Estimateur β par MLE:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

MLE: Modèle de régression linéaire

► En fonction de σ^2

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma^2} = \frac{\partial \left[-\frac{T}{2} \log(\sigma^2) - \frac{1}{2} \times \frac{(Y - X\beta)'(Y - X\beta)}{\sigma^2} \right]}{\partial \sigma^2} = 0$$

► Nous allons dériver par rapport à σ^2 en deux parties

► 1er terme:

$$\frac{\partial \left[-\frac{T}{2} \log(\sigma^2) \right]}{\partial \sigma^2} = -\frac{T}{2} \times \frac{1}{\sigma^2}$$

► 2e terme:

$$\frac{\partial \left[-\frac{1}{2} \times \frac{(Y - X\beta)'(Y - X\beta)}{\sigma^2} \right]}{\partial \sigma^2} = \frac{\partial \left[-\frac{1}{2} \times (\sigma^2)^{-1} (Y - X\beta)'(Y - X\beta) \right]}{\partial \sigma^2}$$

MLE: Modèle de régression linéaire

► En fonction de σ^2

► Suite pour le 2e terme:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \left[-\frac{1}{2} \times (\sigma^2)^{-1} (Y - X\beta)'(Y - X\beta) \right]}{\partial \sigma^2} \\ &= \frac{T}{2} \times (\sigma^2)^{-2} (Y - X\beta)'(Y - X\beta) \\ &= \frac{1}{2} \times \sigma^{-4} (Y - X\beta)'(Y - X\beta) \\ &= \frac{T}{2} \times \frac{(Y - X\beta)'(Y - X\beta)}{\sigma^4} \end{aligned}$$

MLE: Modèle de régression linéaire

► En fonction de σ^2

- On additionne les deux termes et nous avons notre condition de première ordre

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma^2} = -\frac{T}{2} \times \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2} \times \frac{(Y - X\beta)'(Y - X\beta)}{\sigma^4}$$

- On veut maintenant isoler σ^2 pour obtenir l'estimateur $\hat{\sigma}^2$

$$\frac{1}{2} \times \frac{(Y - X\beta)'(Y - X\beta)}{\sigma^4} = \frac{T}{2} \times \frac{1}{\sigma^2}$$

- On peut multiplier par $2\sigma^2$ de chaque coté pour simplifier

$$\frac{(Y - X\beta)'(Y - X\beta)}{\sigma^2} = T$$

Estimateur $\hat{\sigma}^2$ pour la méthode des MLE

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(Y - X\beta)'(Y - X\beta)}{T}$$

Maximum de Vraisemblance

MLE: Modèle de régression linéaire

Propriétés Estimateur MLE ET MCO

Propriétés de $\hat{\sigma}^2$

Estimateur de la variance sans biais

Propriétés Estimateur MLE ET MCO

- ▶ Pour $\hat{\beta}$ des MCO et MLE, leurs résultats coïncident

Estimateur **BLUE**

- ▶ Best linear unbiased estimator
 - ▶ Estimateur sans biais
 - ▶ Estimateur ayant une variance minimal
- ▶ L'estimateur des moindres carrés ordinaires est BLUE
- ▶ L'estimateur $\hat{\sigma}^2$ du Maximum de vraisemblance est biaisé vers le bas
- ▶ On peut trouver une alternative sans biais

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta})}{T - K}$$

Propriétés Estimateur MLE ET MCO

Estimateur **BLUE**

- ▶ **Sans biais** : Espérance de l'estimateur égale à la vraie valeur du paramètre

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

- ▶ **Efficace**: Si l'estimateur atteint la borne de Cramér-Rao (autrement dit, l'inverse de la matrice d'information de Fisher)
- ▶ On veut un estimateur ayant la variance la plus petite possible
 - ▶ Cela donne une meilleure précision

Propriétés Estimateur MLE ET MCO

- ▶ Borne de Cramer-Rao : Pour tout estimateur régulier et sans biais, sa variance est bornée par l'inverse de la matrice d'information.
- ▶ La matrice d'information est quant à elle une façon de mesurer la quantité d'information sur les paramètres dans θ contenue dans X .
- ▶ Une définition équivalente serait que la variance d'un estimateur sans biais sera toujours au moins aussi grande que l'inverse de la matrice d'information :

Inverse de la matrice d'information

$$\begin{aligned} [I(\theta)]^{-1} &= \left(-E \left[\frac{\partial^2 \log L(\theta)}{\partial \theta^2} \right] \right)^{-1} \\ &= \left(E \left[\left(\frac{\partial \log L(\theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right] \right)^{-1} \end{aligned}$$

Propriétés Estimateur MLE ET MCO

Matrice d'information et Hessienne

- ▶ La matrice d'information est simplement une matrice hessienne d'une d'une fonction.
- ▶ Il s'agit essentiellement d'une matrice de dérivé seconde:
- ▶ On suppose une fonction $f(x_1, x_2)$ et on représente la hessienne de cette fonction par $H_{i,j}(f)$
- ▶ On doit représenter $H_{i,j}(f)$ comme étant l'ensemble des dérivés secondes partiels possible.

$$H_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

- ▶ Il y aura donc 4 dérivés secondes partiels possibles
 - ▶ $i = 1$ et $j = 1$, alors ∂x_1^2
 - ▶ $i = 1$ et $j = 2$, alors $\partial x_1 \partial x_2$
 - ▶ $i = 2$ et $j = 1$, alors $\partial x_2 \partial x_1$
 - ▶ $i = 2$ et $j = 2$, alors ∂x_2^2

Propriétés Estimateur MLE ET MCO

Matrice d'information

Dans le cas du modèle linéaire estimé par MLE

- ▶ On aura 4 dérivés seconde étant donnée que nous avons deux paramètres à estimer, soit β et σ^2 .
 - ▶ En haut à gauche: $\partial\beta\partial\beta$
 - ▶ En haut à droite: $\partial\beta\partial\sigma^2$
 - ▶ En bas à gauche: $\partial\sigma^2\partial\beta$
 - ▶ En bas à droite: $(\partial\sigma^2)^2$

$$I(\beta, \sigma^2) = -E \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta'} \right) & \left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\sigma^2} \right) \\ \left(\frac{\partial^2 L}{\partial\sigma^2\partial\beta'} \right) & \left(\frac{\partial^2 L}{(\partial\sigma^2)^2} \right) \end{bmatrix}$$

- ▶ Nous allons maintenant résoudre les 4 dérivés secondes partiels possibles:

Propriétés Estimateur MLE ET MCO

En haut à gauche

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 L}{\partial \beta \partial \beta'} &= \frac{\partial^2 \left[-\frac{T}{2} \log(2\pi) - \frac{T}{2} \log(\sigma^2) - \frac{1}{2} \times \frac{(Y - X\beta)'(Y - X\beta)}{\sigma^2} \right]}{\partial \beta \partial \beta'} \\ &= \frac{\partial \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \times (-2X'Y + 2X'X\hat{\beta}) \right]}{\partial \beta} \\ &= -\frac{1}{\sigma^2} (X'X)\end{aligned}$$

Propriétés Estimateur MLE ET MCO

En haut à droite

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 L}{\partial \beta \partial \sigma^2} &= \frac{\partial^2 \left[-\frac{T}{2} \log(2\pi) - \frac{T}{2} \log(\sigma^2) - \frac{1}{2} \times \frac{(Y - X\beta)'(Y - X\beta)}{\sigma^2} \right]}{\partial \beta \partial \sigma^2} \\&= \frac{\partial \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \times (-2X'Y + 2X'X\hat{\beta}) \right]}{\partial \sigma^2} \\&= \frac{1}{2\sigma^4} \times (-2X'Y + 2X'X\hat{\beta}) \\&= \frac{1}{\sigma^4} \times (X'Y - X'X\hat{\beta}) \\&= -\frac{1}{\sigma^4} \times (X'[Y - X\hat{\beta}]) \\&= -\frac{1}{\sigma^4} (X'u)\end{aligned}$$

Sachant $Y - X\hat{\beta} = u$

Propriétés Estimateur MLE ET MCO

En bas à gauche

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 L}{\partial \sigma^2 \partial \beta'} &= \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \beta \partial \sigma^2} \right)' \\ &= -\frac{1}{\sigma^4} (X' u)' \\ &= -\frac{1}{\sigma^4} (u' X)\end{aligned}$$

Propriétés Estimateur MLE ET MCO

En bas à droite

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 L}{(\partial \sigma^2)^2} &= \frac{\partial^2 \left[-\frac{T}{2} \log(2\pi) - \frac{T}{2} \log(\sigma^2) - \frac{1}{2} \times \frac{(Y-X\beta)'(Y-X\beta)}{\sigma^2} \right]}{(\partial \sigma^2)^2} \\ &= \frac{\partial \left[-\frac{T}{2\sigma^2} + \frac{(Y-X\beta)'(Y-X\beta)}{2\sigma^4} \right]}{\partial \sigma^2} \\ &= \frac{T}{2\sigma^4} - \frac{(Y-X\beta)'(Y-X\beta)}{\sigma^6}\end{aligned}$$

Propriétés Estimateur MLE ET MCO

- Espérance mathématique de chacune des dérivés

En haut à gauche

$$\begin{aligned} E\left(-\frac{\partial^2 L}{\partial \beta \partial \beta'}\right) &= E\left(-\left[-\frac{1}{\sigma^2}(X'X)\right]\right) \\ &= \frac{1}{\sigma^2}(X'X) \end{aligned}$$

Propriétés Estimateur MLE ET MCO

En haut à droite

$$\begin{aligned} E\left(-\frac{\partial^2 L}{\partial \beta \partial \sigma^2}\right) &= E\left(-\left[-\frac{1}{\sigma^4}(X'Y - X'X\beta)\right]\right) \\ &= \frac{1}{\sigma^4}(X'E(Y) - X'X\beta) \\ &= \frac{1}{\sigma^4}(X'X\beta - X'X\beta) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Sachant $E(Y) = X\beta$

Propriétés Estimateur MLE ET MCO

En bas à gauche

$$E \left(-\frac{\partial^2 L}{\partial \sigma^2 \partial \beta'} \right) = 0$$

En bas à droite

$$\begin{aligned} E \left(-\frac{\partial^2 L}{(\partial \sigma^2)^2} \right) &= E \left(- \left[\frac{T}{2\sigma^4} - \frac{(Y - X\beta)'(Y - X\beta)}{\sigma^6} \right] \right) \\ &= -\frac{T}{2\sigma^4} + \frac{E[(Y - X\beta)'(Y - X\beta)]}{\sigma^6} \end{aligned}$$

Propriétés Estimateur MLE ET MCO

En bas à droite

Utilisons la trace:

$$\begin{aligned} E[(Y - X\beta)'(Y - X\beta)] &= E(u'u) \\ &= E(\text{Trace}(u'u)) \\ &= E(\text{Trace}(uu')) \\ &= \text{Trace}(E(uu')) \\ &= \text{Trace}(\sigma^2 I_T) \\ &= T\sigma^2 \end{aligned}$$

Propriétés Estimateur MLE ET MCO

En bas à droite

Donc:

$$\begin{aligned} E \left(-\frac{\partial^2 L}{(\partial \sigma^2)^2} \right) &= -\frac{T}{2\sigma^4} + \frac{T\sigma^2}{\sigma^6} \\ &= -\frac{T}{2\sigma^4} + \frac{T}{\sigma^4} \\ &= -\frac{T}{2\sigma^4} + \frac{2T}{2\sigma^4} \\ &= \frac{T}{2\sigma^4} \end{aligned}$$

Propriétés Estimateur MLE ET MCO

Matrice d'information

$$I(\beta, \sigma^2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma^2}(X'X) & 0 \\ 0 & \frac{T}{2\sigma^4} \end{bmatrix}$$

Inverse matrice d'information

$$I^{-1}(\beta, \sigma^2) = \begin{bmatrix} \sigma^2(X'X) & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma^4}{T} \end{bmatrix}$$

Propriétés Estimateur MLE ET MCO

Espérance

On sait déjà que l'estimateur $\hat{\beta}$ possède la solution suivante:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

Sachant $Y = X\beta + u$

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'[X\beta + u]$$

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'u$$

Sachant également $(X'X)^{-1}X'X = I$

$$\hat{\beta} = \beta + (X'X)^{-1}X'u$$

Propriétés Estimateur MLE ET MCO

Espérance

On applique l'espérance de chaque coté de l'équation

$$\begin{aligned}E(\hat{\beta}) &= E(\beta + (X'X)^{-1}X'u) \\ &= \beta + (X'X)^{-1}X'E(u)\end{aligned}$$

Sachant $E(u) = 0$

$$E(\hat{\beta}) = \beta$$

On peut donc maintenant affirmer que $\hat{\beta}$ est un estimateur sans biais de β

Propriétés Estimateur MLE ET MCO

Variance

On peut exprimer la variance de $\hat{\beta}$ comme suit:

$$\text{Var}(\hat{\beta}) = E[(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)']$$

Sachant l'équation que nous avons déjà obtenus dans le calcul de l'espérance:

$$\hat{\beta} = \beta + (X'X)^{-1}X'u$$

Alors il nous est possible d'exprimer la déviation de l'estimateur $\hat{\beta}$ par rapport à sa vraie valeur β .

$$\hat{\beta} - \beta = (X'X)^{-1}X'u$$

Propriétés Estimateur MLE ET MCO

Variance

On peut donc incorporer l'équation de $(\hat{\beta} - \beta)$ dans l'équation de la variance de $\hat{\beta}$

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\beta}) &= E[((X'X)^{-1}X'u)((X'X)^{-1}X'u)'] \\ &= E[(X'X)^{-1}X'uu'X(X'X)^{-1}] \\ &= (X'X)^{-1}X'E(uu')X(X'X)^{-1} \end{aligned}$$

Sachant $E(uu') = \sigma^2 I$

$$\text{Var}(\hat{\beta}) = (X'X)^{-1}X'\sigma^2IX(X'X)^{-1}$$

Sachant $(X'X)^{-1}X'X = I$

$$\text{Var}(\hat{\beta}) = \sigma^2(X'X)^{-1}$$

On voit donc que la variance de $\hat{\beta}$ atteint la borne de Cramér-Rao ou l'inverse de la matrice d'information

Maximum de Vraisemblance

MLE: Modèle de régression linéaire

Propriétés Estimateur MLE ET MCO

Propriétés de $\hat{\sigma}^2$

Estimateur de la variance sans biais

Propriétés de $\hat{\sigma}^2$

On sait que:

$$\frac{(Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta})}{\sigma^2} \sim \chi^2(T - K)$$

- ▶ Sachant $\hat{u}_t = Y - X\hat{\beta}$
 - ▶ $\hat{u}_t$ sont normales par hypothèses
 - ▶ $\hat{u}_t' \hat{u}_t$ suit une loi chi carré

Propriétés de $\hat{\sigma}^2$

On peut montrer que l'espérance de ce terme est la suivante:

$$E \left[\frac{(Y - X\beta)'(Y - X\beta)}{\sigma^2} \right] = (T - K)$$

On peut montrer que la variance de ce terme est la suivante:

$$V \left[\frac{(Y - X\beta)'(Y - X\beta)}{\sigma^2} \right] = 2(T - K)$$

Propriétés de $\hat{\sigma}^2$

On sait que l'estimateur $\hat{\sigma}^2$ est le suivant:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(Y - X\beta)'(Y - X\beta)}{T}$$

Espérance de $\hat{\sigma}^2$

$$E(\hat{\sigma}^2) = E\left(\frac{(Y - X\beta)'(Y - X\beta)}{T}\right)$$

Propriétés de $\hat{\sigma}^2$

- ▶ On peut multiplier le numérateur et le dénominateur par σ^2 afin d'écrire l'équation de l'espérance comme suit:

$$E(\hat{\sigma}^2) = E\left(\frac{(Y - X\beta)'(Y - X\beta)}{\sigma^2} \times \frac{\sigma^2}{T}\right)$$

- ▶ Sachant $E\left[\frac{(Y - X\beta)'(Y - X\beta)}{\sigma^2}\right] = (T - K)$ on peut formuler à l'équation de $\hat{\sigma}^2$ comme suit:

$$\frac{\sigma^2}{T}(T - K)$$

Propriétés de $\hat{\sigma}^2$

- ▶ On voit que cet estimateur est biaisé et la borne de Cramér-Rao ne peut s'appliquer dans ce cas.
- ▶ Cependant, si T devient suffisamment grand, alors:

$$T - K \approx T$$

- ▶ On voit clairement que le biais s'annule

$$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{\sigma^2}{T}(T) = \sigma^2$$

Maximum de Vraisemblance

MLE: Modèle de régression linéaire

Propriétés Estimateur MLE ET MCO

Propriétés de $\hat{\sigma}^2$

Estimateur de la variance sans biais

Estimateur de la variance sans biais

- L'estimateur de la variance sans biais est représenté par $\hat{S}^2$

$$\hat{S}^2 = \frac{(Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta})}{T - K}$$

Espérance de $\hat{S}^2$

$$E(\hat{S}^2) = E \left[\frac{(Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta})}{T - K} \right]$$

- On peut multiplier le numérateur et le dénominateur par σ^2 afin d'écrire l'équation de l'espérance de $\hat{S}^2$ comme suit:

$$E(\hat{S}^2) = E \left[\frac{(Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta})}{\sigma^2} \times \frac{\sigma^2}{T - K} \right]$$

Estimateur de la variance sans biais

- Sachant $E \left[\frac{(Y - X\beta)'(Y - X\beta)}{\sigma^2} \right] = (T - K)$ on peut formuler à l'équation de l'espérance de $\hat{S}^2$ comme suit:

$$\begin{aligned} E(\hat{S}^2) &= (T - K) \times \frac{\sigma^2}{T - K} \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

- On voit donc que l'estimateur de la variance $\hat{S}^2$ est sans biais étant donnée que son espérance égale la vraie valeur de la variance σ^2

Estimateur de la variance sans biais

Variance de $\hat{S}^2$

$$V(\hat{S}^2) = V \left[\frac{(Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta})}{T - K} \right]$$

- ▶ On peut multiplier le numérateur et le dénominateur par σ^2 afin d'écrire l'équation de la variance de $\hat{S}^2$ comme suit:

$$V(\hat{S}^2) = V \left[\frac{(Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta})}{\sigma^2} \times \frac{\sigma^2}{T - K} \right]$$

- ▶ On peut sortir $\frac{\sigma^2}{T-K}$ de l'opérateur variance en élevant ce terme à la puissance 2.

$$V(\hat{S}^2) = \frac{\sigma^4}{(T - K)^2} V \left[\frac{(Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta})}{\sigma^2} \right]$$

Estimateur de la variance sans biais

Variance de $\hat{S}^2$

- ▶ Sachant $V \left[\frac{(Y - X\beta)'(Y - X\beta)}{\sigma^2} \right] = 2(T - K)$, on peut écrire la variance de $\hat{S}^2$ comme suit:

$$\begin{aligned} V(\hat{S}^2) &= \frac{\sigma^4}{(T - K)^2} \times [2(T - K)] \\ &= \frac{2\sigma^4}{T - K} \end{aligned}$$

- ▶ On voit clairement que $V(\hat{S}^2)$ n'atteint pas la borne de Cramer-Rao étant donnée que cette variance est plus grande que celle donnée par la borne.

$$\frac{2\sigma^4}{T - K} > \frac{2\sigma^4}{T}$$