Tests d'Hypothèses

GSF-6053

Hiver 2025

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Tests d'Hypothèses **2**
- 2.1 Introduction aux Tests d'Hypothèses . . . 2
  - 2.1.1 Formulation des Hypothèses . . . 2
  - 2.1.2 Types de Tests . . . 3
- 2.2 Étapes d'un Test d'Hypothèse . . . 3
- 2.3 Interprétation des Résultats . . . 3
- 2.4 La p-value . . . 4
- 2.5 Erreur de Type I et Type II . . . 4
- 2.6 Puissance du Test . . . 4

3 Application : Tests de Student **4**
- 3.1 Contexte de l'Application . . . 5
- 3.2 Objectifs des Tests . . . 7
- 3.3 Résultats des Tests . . . 7
- 3.4 Interprétation Économique . . . 9

Solutions **9**

Bibliographie **13**

1 Introduction

Ce document présente une étude approfondie des tests d'hypothèses en économétrie financière, en mettant l'accent sur les tests de Student. Il est structuré en trois parties principales : une introduction aux tests d'hypothèses, une application pratique des tests de Student dans le cadre du CAPM, et les solutions détaillées des exercices proposés.

2 Tests d'Hypothèses

Les tests d'hypothèses sont des outils fondamentaux en économétrie pour évaluer la validité des suppositions concernant les paramètres d'un modèle. Ils permettent de prendre des décisions éclairées basées sur les données observées. Cette section détaille les étapes essentielles pour réaliser un test d'hypothèse efficace.

2.1 Introduction aux Tests d'Hypothèses

Un test d'hypothèse consiste à formuler deux hypothèses contradictoires : l'hypothèse nulle (H_0) et l'hypothèse alternative (H_1). Le but est de déterminer si les données disponibles permettent de rejeter H_0 en faveur de H_1.

2.1.1 Formulation des Hypothèses

— **Hypothèse nulle (H_0)** : C'est l'hypothèse de base que l'on cherche à tester. Elle représente souvent une situation de statu quo ou une absence d'effet. Par exemple, H_0 pourrait stipuler qu'un paramètre est égal à une valeur spécifique ou qu'il n'a pas d'effet significatif.

— **Hypothèse alternative (H_1)** : Elle représente ce que l'on cherche à prouver. H_1 peut être bilatérale (différent de) ou unilatérale (supérieur à ou inférieur à).

2.1.2 Types de Tests

— **Test Bilatéral** : Utilisé lorsque l'hypothèse alternative indique une différence dans les deux sens ($\neq$).

— **Test Unilatéral** : Utilisé lorsque l'hypothèse alternative spécifie une direction particulière ($>$ ou $<$).

2.2 Étapes d'un Test d'Hypothèse

Pour effectuer un test d'hypothèse, suivez les étapes suivantes :

1. **Formulation des Hypothèses** : Définir clairement H_0 et H_1.
2. **Choix de la Statistique de Test** : Sélectionner une statistique appropriée (t, F, Wald, LR, LM, etc.) en fonction du modèle et des hypothèses.
3. **Détermination du Niveau de Significativité (α)** : Choisir le seuil de probabilité pour rejeter H_0. Les niveaux courants sont 5%, 1% ou 10%.
4. **Définition de la Région Critique** : Déterminer les valeurs critiques de la statistique de test qui délimitent la région où H_0 sera rejetée.
5. **Calcul de la Statistique de Test** : Utiliser les données de l'échantillon pour calculer la valeur de la statistique de test.
6. **Prise de Décision** : Comparer la statistique de test avec les valeurs critiques pour décider de rejeter ou non H_0.

2.3 Interprétation des Résultats

— **Rejet de H_0** : Si la statistique de test tombe dans la région critique, on rejette H_0 en faveur de H_1.

— **Non-rejet de H_0** : Si la statistique de test ne tombe pas dans la région critique, on ne dispose pas de preuves suffisantes pour rejeter H_0.

2.4 La p-value

La p-value est une mesure cruciale dans les tests d'hypothèses. Elle représente la probabilité d'observer une statistique de test au moins aussi extrême que celle obtenue, sous l'hypothèse que H_0 est vraie.

— **Interprétation** :
  — Une p-value faible ($< \alpha$) indique que l'observation est peu probable sous H_0, suggérant le rejet de H_0.
  — Une p-value élevée ($\geq \alpha$) suggère que l'observation est compatible avec H_0, et donc, on ne rejette pas H_0.

— **Utilisation** : Plutôt que de comparer directement la statistique de test aux valeurs critiques, on peut utiliser la p-value pour évaluer la force des preuves contre H_0.

2.5 Erreur de Type I et Type II

— **Erreur de Type I (α)** : Rejeter H_0 alors qu'il est vrai.

— **Erreur de Type II (β)** : Ne pas rejeter H_0 alors qu'il est faux.

2.6 Puissance du Test

La puissance d'un test est la probabilité de rejeter H_0 lorsqu'il est effectivement faux ($1 - \beta$). Une puissance élevée est souhaitable car elle indique une forte capacité à détecter un effet lorsque celui-ci existe.

3 Application : Tests de Student

Les tests de Student, ou tests t, sont couramment utilisés pour évaluer la significativité des coefficients dans les modèles de régression linéaire. Ils permettent de déterminer si un paramètre est statistiquement différent d'une valeur hypothétique (généralement zéro).

3.1 Contexte de l'Application

Nous disposons des résultats d'une régression linéaire estimant le Modèle d'Évaluation des Actifs Financiers (CAPM) pour Bombardier avec 120 observations mensuelles. Les résultats de la régression sont les suivants :

Call :	`lm(formula = r_b ~ r_m, data = data)`			
Residuals :	Min -0.25289, 1Q -0.09023, Median -0.02297, 3Q 0.07237, Max 0.38469			
Coefficients :	**Estimate**	**Std. Error**	**t value**	**Pr(>|t|)**
(Intercept)	-0.15834	0.01213	-13.057	$< 2 \times 10^{-16***}$
r_m	1.87996	0.65239	2.882	0.0047^{**}

Table 1 – Résultats de la régression CAPM pour Bombardier

Note : Les codes de significativité sont les suivants : *** $p < 0.001$, ** $p < 0.01$, * $p < 0.05$.

3.2 Objectifs des Tests

Réaliser les tests suivants à un niveau de significativité de 5% :

1. Tester, à l'aide d'une statistique de Student, si l'intercept (β_0) est nul.
2. Tester si l'intercept (β_0) est plus grand ou égal à 0.
3. Tester si le coefficient bêta de Bombardier (β_1) est plus petit ou égal au bêta du marché ($\beta_m = 1$).
4. Tester si le coefficient bêta de Bombardier (β_1) est égal au bêta du marché ($\beta_m = 1$).
5. Tester si le coefficient bêta de Bombardier (β_1) est plus grand ou égal au bêta du marché ($\beta_m = 1$).

3.3 Résultats des Tests

Les résultats des tests d'hypothèses sont présentés dans le tableau suivant :

Test	**Statistique t**	**Valeur Critique**	**Décision**
a) Bilatéral : $\beta_0 = 0$	-13.057	1.980	Rejeter H_0
b) Unilatéral gauche : $\beta_0 \geq 0$	-13.057	-1.658	Rejeter H_0
c) Unilatéral droite : $\beta_1 \leq 1$	1.349	1.658	Ne pas rejeter H_0
d) Bilatéral : $\beta_1 = 1$	1.349	1.980	Ne pas rejeter H_0
e) Unilatéral gauche : $\beta_1 \geq 1$	1.349	-1.658	Ne pas rejeter H_0

TABLE 2 – Résumé des tests d'hypothèses réalisés

3.4 Interprétation Économique

Les résultats indiquent que :

- **Intercept** (β_0) :
  - **Test a)** : Nous rejetons H_0 bilatéralement, ce qui suggère que l'intercept est significativement différent de zéro.
  - **Test b)** : Nous rejetons H_0 unilatéralement, indiquant que l'intercept est significativement inférieur à zéro.
- **Bêta** (β_1) :
  - **Test c)** : Nous ne rejetons pas H_0 unilatéralement, ce qui suggère que β_1 n'est pas significativement supérieur à 1.
  - **Test d)** : Nous ne rejetons pas H_0 bilatéralement, indiquant que β_1 n'est pas significativement différent de 1.
  - **Test e)** : Nous ne rejetons pas H_0 unilatéralement, ce qui suggère que β_1 n'est pas significativement inférieur à 1.

Ces résultats suggèrent que le modèle CAPM estimé pour Bombardier présente un intercept négatif significatif, mais le coefficient bêta n'est pas significativement différent de celui du marché ($\beta_m = 1$). Cela indique que Bombardier présente une sensibilité similaire aux mouvements du marché, conformément aux attentes du modèle CAPM.

Solutions

a) Test bilatéral sur l'intercept ($\beta_0 = 0$)

$$H_0 : \beta_0 = 0 \quad \text{contre} \quad H_1 : \beta_0 \neq 0$$

Calcul de la Statistique de Test

$$t = \frac{\hat{\beta}_0 - 0}{SE(\hat{\beta}_0)} = \frac{-0.15834}{0.01213} \approx -13.057$$

Détermination de la Valeur Critique

Pour un test bilatéral avec un niveau de significativité de 5% et 118 degrés de liberté ($df = 118$), la valeur critique est approximativement 1.980.

Prise de Décision

$$|t| = 13.057 > 1.980 \Rightarrow \text{Rejeter } H_0$$

Conclusion : L'intercept est significativement différent de zéro.

b) Test unilatéral que l'intercept est plus grand ou égal à 0 ($\beta_0 \geq 0$)

$$H_0 : \beta_0 \geq 0 \quad \text{contre} \quad H_1 : \beta_0 < 0$$

Calcul de la Statistique de Test

$$t = \frac{\hat{\beta}_0 - 0}{SE(\hat{\beta}_0)} = \frac{-0.15834}{0.01213} \approx -13.057$$

Détermination de la Valeur Critique

Pour un test unilatéral à gauche avec $\alpha = 5\%$ et 118 degrés de liberté, la valeur critique est environ -1.658.

Prise de Décision

$$t = -13.057 < -1.658 \Rightarrow \text{Rejeter } H_0$$

Conclusion : L'intercept est significativement inférieur à zéro.

c) Test unilatéral pour tester si $\beta_1 \leq 1$

$$H_0 : \beta_1 \leq 1 \quad \text{contre} \quad H_1 : \beta_1 > 1$$

Calcul de la Statistique de Test

$$t = \frac{\hat{\beta}_1 - 1}{SE(\hat{\beta}_1)} = \frac{1.87996 - 1}{0.65239} \approx 1.349$$

Détermination de la Valeur Critique

Pour un test unilatéral à droite avec $\alpha = 5\%$ et 118 degrés de liberté, la valeur critique est environ 1.658.

Prise de Décision

$$t = 1.349 < 1.658 \Rightarrow \text{Ne pas rejeter } H_0$$

Conclusion : Il n'y a pas suffisamment de preuves pour conclure que le bêta de Bombardier est supérieur à 1.

d) Test bilatéral pour tester si $\beta_1 = 1$

$$H_0 : \beta_1 = 1 \quad \text{contre} \quad H_1 : \beta_1 \neq 1$$

Calcul de la Statistique de Test

$$t = \frac{\hat{\beta}_1 - 1}{SE(\hat{\beta}_1)} = \frac{1.87996 - 1}{0.65239} \approx 1.349$$

Détermination de la Valeur Critique

Pour un test bilatéral avec $\alpha = 5\%$ et 118 degrés de liberté, la valeur critique est environ 1.980.

Prise de Décision

$$|t| = 1.349 < 1.980 \Rightarrow \text{Ne pas rejeter } H_0$$

Conclusion : Il n'y a pas suffisamment de preuves pour conclure que le bêta de Bombardier est différent de 1.

e) Test unilatéral pour tester si $\beta_1 \geq 1$

$$H_0 : \beta_1 \geq 1 \quad \text{contre} \quad H_1 : \beta_1 < 1$$

Calcul de la Statistique de Test

$$t = \frac{\hat{\beta}_1 - 1}{SE(\hat{\beta}_1)} = \frac{1.87996 - 1}{0.65239} \approx 1.349$$

Détermination de la Valeur Critique

Pour un test unilatéral à gauche avec $\alpha = 5\%$ et 118 degrés de liberté, la valeur critique est environ -1.658.

Prise de Décision

$$t = 1.349 > -1.658 \Rightarrow \text{Ne pas rejeter } H_0$$

Conclusion : Il n'y a pas suffisamment de preuves pour conclure que le bêta de Bombardier est inférieur à 1.

Bibliographie

Références

[1] Gujarati, D. N., & Porter, D. C. (2009). *Basic Econometrics*. McGraw-Hill.

[2] Wooldridge, J. M. (2010). *Econometric Analysis of Cross Section and Panel Data*. MIT Press.

[3] Greene, W. H. (2012). *Econometric Analysis*. Pearson.

[4] Stock, J. H., & Watson, M. W. (2015). *Introduction to Econometrics*. Pearson.

[5] Hamilton, J. D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press.