# Régression et Moindres Carrés Ordinaires (Séance 1)

## GSF-6053 : Économétrie Financière

Simon-Pierre Boucher[1]

[1]Département de Finance, Assurance et Immobilier
Faculté des Sciences de l'Administration
Université Laval

14 Janvier 2025

# Références

**Obligatoires :**

- **Wooldridge :** chapitres 2 à 7

**Complémentaires :**

- **Gujarati et Porter :** chapitres 1 à 9
- **Greene :** chapitres 2, 3, 4, 5, 9, 14, 20, appendices C et D

# Plan de la séance

Modèle de Régression

Moindres Carrés Ordinaires (En sommation)

Moindres Carrés Ordinaires (Format Matricielle)

Exemple Numérique

# Modèle de Régression

- Espérance conditionnelle d'une variable dépendante **(Y)** conditionnelle à la valeur connue des régresseurs **(X)**

$$\mathbb{E}(Y|X_i) = f(X_i)$$

  Où $f(X_i)$ est une fonction des variables explicatives **X**

- Relation conditionnelle linéaire

$$\mathbb{E}(Y|X_i) = \beta_1 + \beta_2 X_i$$

- Composition de $Y$ :
  - Partie systématique ou déterministe, $\mathbb{E}(Y|X_i)$
  - Partie aléatoire et non systématique, $\mu_i$

# Modèle de Régression

- Modèle de Régression Linéaire Simple

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \mu_i$$

- Prendre l'espérance des deux côtés

$$\mathbb{E}(Y_i|X_i) = \mathbb{E}(Y|X_i) + \mathbb{E}(\mu_i)$$

  Sachant que $\mathbb{E}(Y_i|X_i) = \mathbb{E}(Y|X_i)$, alors $\mathbb{E}(\mu_i) = 0$

- Les paramètres obtenus à partir d'un échantillon sont des estimateurs (notés avec $\hat{}$)

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i$$

$$Y_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i + \hat{\mu}_i$$

  $\hat{\mu}_i$ représente l'estimateur du terme d'erreur, le résidu

Modèle de Régression

Moindres Carrés Ordinaires (En sommation)

Moindres Carrés Ordinaires (Format Matricielle)

Exemple Numérique

# Moindres Carrés Ordinaires (En sommation)

- Définissons les résidus

$$\hat{\mu}_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_i$$

- Choisir des estimateurs de $\hat{\beta}_1$ et $\hat{\beta}_2$ de façon à minimiser la somme des carrés des résidus

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} \hat{\mu}_i^2 &= \left[\hat{\mu}_1^2 + \hat{\mu}_2^2 + \cdots + \hat{\mu}_N^2\right] \\ &= \sum_{i=1}^{N} (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_i)^2\end{aligned}$$

# Moindres Carrés Ordinaires (En sommation)

- Minimiser la somme des carrés des résidus par rapport à $\hat{\beta}_1$ et $\hat{\beta}_2$

$$\min_{\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2} \sum_{i=1}^{N} (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_i)^2 = \min_{\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2} \sum_{i=1}^{N} \hat{\mu}_i^2$$

- Équations normales

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{N} \hat{\mu}_i^2}{\partial \hat{\beta}_1} = -2 \sum_{i=1}^{N} (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_i) = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{N} \hat{\mu}_i^2}{\partial \hat{\beta}_2} = -2 \sum_{i=1}^{N} X_i (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_i) = 0 \qquad (2)$$

# Moindres Carrés Ordinaires (En sommation)

- Solution de $\hat{\beta}_1$ à l'aide de l'équation (1)

$$-2\sum_{i=1}^{N}(Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} Y_i - N\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{N} X_i = 0$$

$$N\hat{\beta}_1 = \sum_{i=1}^{N} Y_i - \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{N} X_i$$

# Moindres Carrés Ordinaires (En sommation)

- Solution de $\hat{\beta}_1$ à l'aide de l'équation (1)

  On pose la propriété suivante :

  - $\sum_{i=1}^{N} Y_i = N\overline{Y}$
  - $\sum_{i=1}^{N} X_i = N\overline{X}$

$$N\hat{\beta}_1 = N\overline{Y} - N\hat{\beta}_2\overline{X}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{N\overline{Y}}{N} - \frac{N\hat{\beta}_2\overline{X}}{N}$$

**Solution de $\hat{\beta}_1$**

$$\hat{\beta}_1 = \overline{Y} - \hat{\beta}_2\overline{X}$$

# Moindres Carrés Ordinaires (En sommation)

- Solution de $\hat{\beta}_2$ à l'aide de l'équation (2)

$$-2\sum_{i=1}^{N} X_i(Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} X_i Y_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{N} X_i - \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{N} X_i^2 = 0$$

Sachant $\hat{\beta}_1 = \overline{Y} - \hat{\beta}_2 \overline{X}$

$$\sum_{i=1}^{N} X_i Y_i - [\overline{Y} - \hat{\beta}_2 \overline{X}] \sum_{i=1}^{N} X_i - \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{N} X_i^2 = 0$$

# Moindres Carrés Ordinaires (En sommation)

- Solution de $\hat{\beta}_2$ à l'aide de l'équation (2)

$$\sum_{i=1}^{N} X_i Y_i - \overline{Y} \sum_{i=1}^{N} X_i - \hat{\beta}_2 \overline{X} \sum_{i=1}^{N} X_i - \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{N} X_i^2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} X_i Y_i - N\overline{X}\overline{Y} + \hat{\beta}_2 N\overline{X}^2 - \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{N} X_i^2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} X_i Y_i - N\overline{X}\overline{Y} = \hat{\beta}_2 \left[ \sum_{i=1}^{N} X_i^2 - N\overline{X}^2 \right]$$

# Moindres Carrés Ordinaires (En sommation)

- Solution de $\hat{\beta}_2$ à l'aide de l'équation (2)

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i Y_i - N\overline{XY}}{\sum_{i=1}^{N} X_i^2 - N\overline{X}^2}$$

Sachant que

- $\sum_{i=1}^{N} X_i Y_i - N\overline{XY} = \sum_{i=1}^{N}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})$
- $\sum_{i=1}^{N} X_i^2 - N\overline{X}^2 = \sum_{i=1}^{N}(X_i - \overline{X})^2$

**Solution de $\hat{\beta}_2$**

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \overline{X})^2}$$

# Moindres Carrés Ordinaires (Format Matricielle)

- Vecteur de la variable à expliquer **(n $\times$ 1)**

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

- Matrice de variables explicatives **(n $\times$ (k+1))**

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & \cdots & \cdots & x_{k2} \\ 1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & \cdots & \cdots & x_{kn} \end{bmatrix}$$

# Moindres Carrés Ordinaires (Format Matricielle)

- Vecteur de coefficients associés **(k+1 $\times$ 1)**

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}$$

- Vecteur associé au terme d'erreur **(n $\times$ 1)**

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

# Moindres Carrés Ordinaires (Format Matricielle)

- Modèle Univarié

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & \cdots & \cdots & x_{k2} \\ 1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & \cdots & \cdots & x_{kn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Que nous réécrirons comme suit :

$$Y = X\beta + u$$

# Moindres Carrés Ordinaires (Format Matricielle)

- Hypothèses distributionnelles sur $u$
  - $u \sim$ iid et $\mathbb{E}(u) = 0$
  - $\mathrm{Var}(u) = \sigma^2 I$
  - $u \sim$ iid $N(0, \sigma^2)$

$$\mathbb{E}(u) = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(u_1) = 0 \\ \mathbb{E}(u_2) = 0 \\ \vdots \\ \mathbb{E}(u_n) = 0 \end{pmatrix}$$

- Il n'y a pas de corrélation sérielle des erreurs

$$\mathrm{Var}(u) = \mathbb{E}(uu') = \sigma^2 I$$

- Découle de l'indépendance

$$\mathrm{Cov}(u_i, u_j) = 0 \quad \text{pour } i \neq j \quad \forall i, j$$

# Moindres Carrés Ordinaires (Format Matricielle)

**Rappel :**

$$\text{Var}(u) = \mathbb{E}(uu') - \mathbb{E}(u)\mathbb{E}(u')$$

**Avec l'hypothèse d'indépendance :**

$$\text{Var}(u) = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \sigma^2 & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma^2 \end{pmatrix} = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

# Dérivation MCO (Format Matricielle)

$$\hat{\beta} = \arg\min_{\beta}(\hat{u}'\hat{u})$$

$$\hat{\beta} = \arg\min_{\beta}\left((Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta})\right)$$

Distribution des termes de la multiplication matricielle :

$$(Y - X\beta)'(Y - X\beta) = Y'Y - Y'X\hat{\beta} - \hat{\beta}'X'Y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}$$

Sachant

$$Y'X\hat{\beta} = \hat{\beta}'X'Y$$

Alors :

$$(Y - X\beta)'(Y - X\beta) = Y'Y - 2Y'X\hat{\beta} + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}$$

# Dérivation MCO (Format Matricielle)

- Dérivée de la somme des résidus au carré par rapport à $\beta$

$$\frac{\partial(\text{RSS})}{\partial\hat{\beta}} = \frac{\partial(Y'Y - 2Y'X\hat{\beta} + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta})}{\partial\hat{\beta}}$$

Sachant

$$\frac{\partial(Y'X\hat{\beta})}{\partial\hat{\beta}} = X'Y$$

$$\frac{\partial(\hat{\beta}'X'X\hat{\beta})}{\partial\hat{\beta}} = 2X'X\hat{\beta}$$

# Dérivation MCO (Format Matricielle)

$$\frac{\partial(\text{RSS})}{\partial\hat{\beta}} = -2X'Y + 2X'X\hat{\beta} = 0$$

$$X'Y = X'X\hat{\beta}$$

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

**Estimateur de $\hat{\beta}$ par MCO**

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

# Dérivation MCO (Format Matricielle)

- Il n'existe pas d'estimateur de $\sigma^2$ pour la méthode des Moindres Carrés Ordinaires
- On peut estimer empiriquement comme suit :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{N}\hat{u}_i^2 = \frac{\hat{u}'\hat{u}}{N}$$

Modèle de Régression

Moindres Carrés Ordinaires (En sommation)

Moindres Carrés Ordinaires (Format Matricielle)

Exemple Numérique

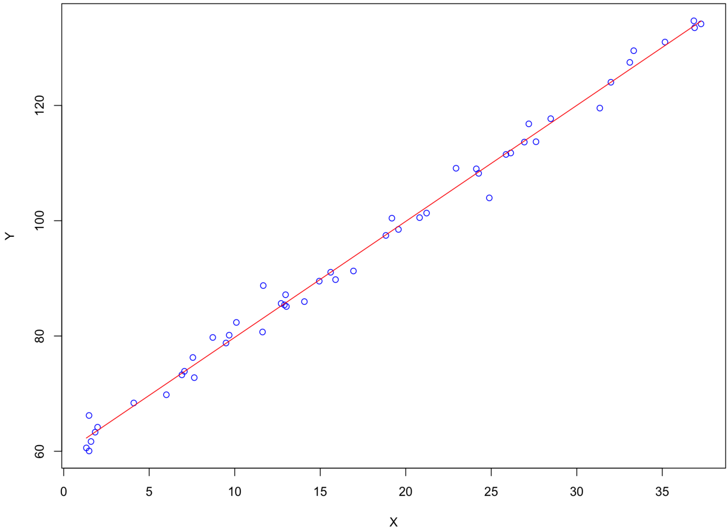
# Exemple Numérique

- Nous allons générer des variables aléatoires à l'aide d'un modèle dont nous allons déterminer les paramètres.
- Nous allons utiliser un modèle linéaire simple ayant le format suivant :

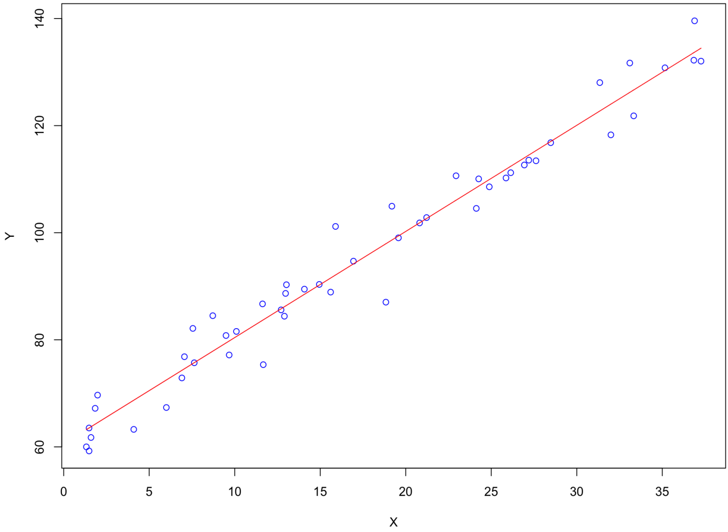
$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_i + \epsilon_i$$

  - L'intercepte de notre modèle sera de $\beta_1 = 60$.
  - La pente de notre modèle sera de $\beta_2 = 2$.
  - Nous allons faire l'hypothèse que notre terme d'erreur suit une loi normale de moyenne 0 et variance 4 ($\epsilon \sim N(0, 4)$).
- Il nous est maintenant possible de déterminer une valeur pour chaque $Y_i$ en utilisant les $X_i$.
- Pour les $X_i$ nous allons générer uniformément 40 observations entre 0 et 40.

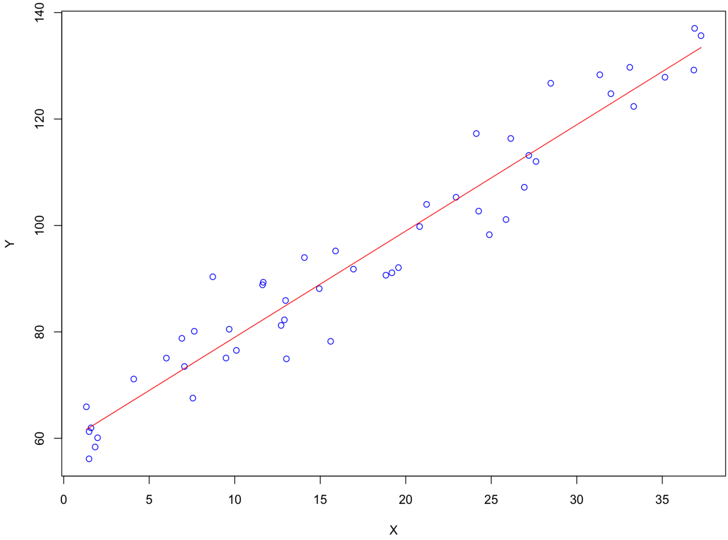
# Nuage de points et régression linéaire ($\epsilon \sim N(0, 2)$)



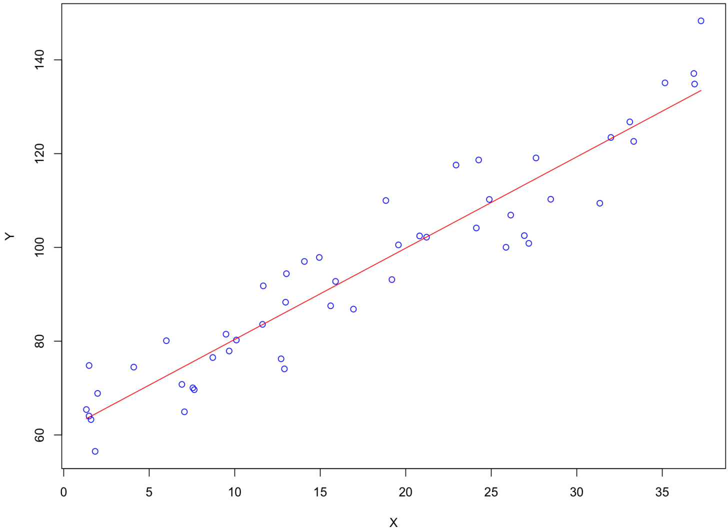
# Nuage de points et régression linéaire ($\epsilon \sim N(0, 4)$)



# Nuage de points et régression linéaire ($\epsilon \sim N(0, 6)$)



# Nuage de points et régression linéaire ($\epsilon \sim N(0, 8)$)



# Exemple Numérique

| | $\epsilon \sim N(0,2)$ | $\epsilon \sim N(0,4)$ | $\epsilon \sim N(0,6)$ | $\epsilon \sim N(0,8)$ |
|---|---|---|---|---|
| (Intercept) | $59.30^{***}$ | $59.28^{***}$ | $60.89^{***}$ | $55.68^{***}$ |
| | (0.68) | (1.35) | (2.43) | (2.31) |
| X | $2.02^{***}$ | $2.03^{***}$ | $2.00^{***}$ | $2.13^{***}$ |
| | (0.03) | (0.06) | (0.10) | (0.10) |
| $R^2$ | 0.99 | 0.96 | 0.89 | 0.91 |
| Adj. $R^2$ | 0.99 | 0.96 | 0.89 | 0.91 |
| Num. obs. | 50 | 50 | 50 | 50 |

$^{***}p < 0.001$ ; $^{**}p < 0.01$ ; $^{*}p < 0.05$

Table – Table de régression