# Révision Mathématique
## Séance 1
## GSF-6053 : Économétrie Financière

Simon-Pierre Boucher[1]

[1]Département de Finance, Assurance et Immobilier
Faculté des Sciences de l'Administration
Université Laval

14 janvier 2025

# Préambule

Ce document présente une révision des concepts mathématiques de base utiles au cours. L'objectif est de revoir certaines propriétés qui peuvent être nécessaires pour le cours, sans couvrir exhaustivement toutes les annexes.

**Références :**

- Wooldridge (Sections A, B et D)
- Gujarati et Porter (Sections A et B)
- Greene (Sections A et B)

# Propriétés des Sommations

- Les constantes peuvent sortir des sommations :

$$\sum_{i=1}^{n}(a + bx_i) = na + b\sum_{i=1}^{n} x_i$$

- Exemple :

$$\sum_{i=1}^{5}(2 + 3x_i) = 5 \times 2 + 3\sum_{i=1}^{5} x_i = 10 + 3\sum_{i=1}^{5} x_i$$

# Double Sommation et Commutation des Opérateurs

- Les opérateurs de sommation sont interchangeables dans une double sommation :
$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} x_{ij} = \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} x_{ij}$$
- Exemple : Calculer la somme des éléments d'une matrice $3 \times 2$.

# Propriétés des Sommations (suite)

- La moyenne échantillonnale est :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

- La somme des déviations par rapport à la moyenne est nulle :

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = 0$$

# Somme des Carrés des Déviations

- La somme des carrés des déviations par rapport à la moyenne :

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2$$

## Caractéristiques des Distributions de Probabilité

- **Espérance** :

$$\mathbb{E}(X) = \sum x_i f(x)$$

- **Variance** :

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mu)^2]$$

- **Covariance** et **Corrélation** :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$$

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}$$

# Les Fonctions de Densité

- **Variables discrètes** : Probabilités représentées par des fonctions de densité discrètes (par exemple, la somme de deux dés).
- **Variables continues** : La fonction de densité doit satisfaire :

$$f(x) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

- **Exemple** : La loi normale, représentée par une courbe en cloche.

# Densité Conditionnelle

- La fonction de densité conditionnelle est définie par :

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)}$$

- Cette relation décrit comment la variable $X$ influence $Y$ en fonction de la densité conjointe des deux variables.
- **Exemple :** Si $X$ et $Y$ représentent respectivement la taille et le poids d'individus, $f(x|y)$ montre la distribution de la taille pour un poids donné.

# Indépendance de Variables

- Deux variables sont indépendantes si la densité jointe est égale au produit des densités marginales :

$$f(x, y) = f(x)f(y)$$

- **Implication :** Connaître la valeur de $X$ ne donne aucune information sur $Y$ et vice versa.
- **Exemple :** Le lancer de deux dés équitables où le résultat de l'un n'affecte pas l'autre.

- Une matrice $A$ est représentée comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & a_{M2} & \cdots & a_{MN} \end{bmatrix}$$

- Les opérations de base incluent :
  - **Addition** : $(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$
  - **Soustraction** : $(A-B)_{ij} = A_{ij} - B_{ij}$
  - **Transposition** : $A'$ est obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de $A$.
  - **Multiplication** : $(AB)_{ik} = \sum_{j=1}^{N} A_{ij} B_{jk}$
  - **Inversion** : Si $A$ est inversible, $A^{-1}$ est telle que $AA^{-1} = I$.

# Exemple d'Addition et de Multiplication de Matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

# Transposition des Matrices

- La transposition d'un produit de matrices suit la règle :

$$(AB)' = B'A'$$

- **Exemple :**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}, \quad (AB)' = \begin{bmatrix} 19 & 43 \\ 22 & 50 \end{bmatrix}$$

$$B' = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B'A' = \begin{bmatrix} 19 & 43 \\ 22 & 50 \end{bmatrix} = (AB)'$$

# Rang d'une Matrice

- **Définition** : Le rang d'une matrice est le nombre de colonnes ou de lignes linéairement indépendantes.
- **Exemple** :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\text{Rang}(A) = 2 \quad \text{(les lignes sont linéairement dépendantes)}$$

- **Importance** :
  - Détermine la solution des systèmes linéaires.
  - Indique la dimension de l'espace engendré par les colonnes ou les lignes.

# Inversibilité des Matrices

- **Définition** : Une matrice est inversible si elle est de plein rang, c'est-à-dire que son rang est égal à son nombre de lignes (ou de colonnes).
- **Exemple** :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(B) = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad B \text{ est inversible}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

- **Propriétés importantes** :

$$A \cdot A^{-1} = I, \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

# Matrice Symétrique et Diagonale

- **Matrice symétrique** : Une matrice $A$ est symétrique si $A = A'$.
  **Exemple** :
  $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$
- **Applications** :
  - Matrices de variance-covariance en statistiques.
  - Matrices de coefficients dans les modèles de régression.
- **Matrice diagonale** : Contient des éléments uniquement sur la diagonale principale.
- **Exemple** :
  $$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

# Matrices Idempotentes

- **Définition** : Une matrice $A$ est idempotente si :

$$A \cdot A = A$$

- **Exemple** :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A$$

- **Propriétés** :
  - Les matrices idempotentes sont singulières sauf si elles sont des matrices identité.
  - La trace d'une matrice idempotente est égale à son rang.
- **Application** :
  - Matrices de projection en régression linéaire.

# Dérivées et Notation Matricielle

- Dérivée d'un scalaire multiplié par une constante :

$$\frac{d(2x)}{dx} = 2$$

- En notation matricielle, les dimensions de la dérivée sont $1 \times n$ pour le cas du *numerator layout*.
- Attention aux notations dans les ouvrages, par exemple, le livre de Wooldridge utilise le *numerator layout*, tandis que d'autres utilisent le *denominator layout*.
- **Notation Numérateur vs Notation Dénominateur :**
  - **Numerator Layout** : Dérivée vue comme un vecteur ligne.
  - **Denominator Layout** : Dérivée vue comme un vecteur colonne.

# Exemples de Dérivées Matricielles

- **Dérivée d'un produit de matrices** :

$$\frac{\partial}{\partial X}(X'AX) = 2AX$$

- **Interprétation** :
  - Si $X$ est un vecteur colonne, alors $\frac{\partial}{\partial X}(X'AX)$ est un vecteur colonne.
  - Selon la notation adoptée, cela peut être représenté différemment.
- **Application** :
  - Utilisée dans l'estimation des paramètres en régression linéaire.

# Exercice 1 : Calcul de la Moyenne et de la Variance

- **Données** : $X = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
- **Calculer** :
  1. La moyenne échantillonnale $\bar{X}$.
  2. La variance échantillonnale $\mathrm{Var}(X)$.
- **Solution** :
  - $\bar{X} = \frac{2+4+6+8+10}{5} = 6$
  - $\mathrm{Var}(X) = \frac{(2-6)^2+(4-6)^2+(6-6)^2+(8-6)^2+(10-6)^2}{5} = \frac{16+4+0+4+16}{5} = 8$

# Questions de Révision

1. Expliquez la différence entre la covariance et la corrélation.
2. Pourquoi une matrice idempotente n'est-elle pas de plein rang ?
3. Décrivez une application pratique des matrices de variance-covariance en économétrie.
4. Comment la méthode des moindres carrés minimise-t-elle l'erreur de prédiction ?