Exercice 005 - Solution

GSF-6053

Hiver 2025

Énoncé

Un chercheur, utilisant des données sur la taille des classes (CS) et les scores moyens de test provenant de 100 classes de troisième, estime la régression OLS suivante :

$$Test\hat{Score} = 520.4 - 5.82 \times CS, \quad R^2 = 0.08, \quad SER = 11.5$$

a. Construisez un intervalle de confiance à 95% pour β_1, le coefficient de pente de la régression.

Un intervalle de confiance bilatéral à α% pour β_1 est donné par :

$$\hat{\beta}_1 \pm t_{\alpha/2} \times SE(\hat{\beta}_1) = -5.82 \pm t_{\alpha/2} \times 2.21$$

Comme la taille de l'échantillon est $n = 100$, la distribution de Student avec $n - 2 = 98$ degrés de liberté est approximée par la distribution normale standard. La valeur critique $t_{\alpha/2}$ peut être lue dans une table de probabilité ou calculée avec la commande R :

$$\text{Intervalle de confiance à 95\% pour } \beta_1 : -10.15 < \beta_1 < -1.49$$

Utilisant la distribution normale standard $z_{0.05/2} \approx 1.96$ ou la distribution $t_{0.05/2}(98) \approx 1.98$.

b. Calculez la p-valeur pour le test bilatéral de l'hypothèse nulle $H_0 : \beta_1 = 0$. Rejetez-vous l'hypothèse nulle au niveau de 5% ? Au niveau de 1% ?

La statistique de test associée à H_0 est :

$$t_0 = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_{1,0}}{SE(\hat{\beta}_1)} = \frac{-5.82 - 0}{2.21} \approx -2.63$$

La p-valeur bilatérale est donc :

$$\text{p-valeur} = 2\Phi(t_0) \approx 0.0085$$

La p-valeur peut être calculée avec la commande $2 \times \text{pnorm}(-2.63)$.

Comme la p-valeur est inférieure à 1%, nous rejetons l'hypothèse nulle au niveau de signification de 5% et de 1%.

c. Calculez la p-valeur pour le test bilatéral de l'hypothèse nulle $H_0 : \beta_1 = -5.6$. Sans faire de calculs supplémentaires, déterminez si -5.6 est contenu dans l'intervalle de confiance à 95% pour β_1.

La statistique de test associée à H_0 est :

$$t_0 = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_{1,0}}{SE(\hat{\beta}_1)} = \frac{-5.82 + 5.6}{2.21} \approx -0.10$$

La p-valeur bilatérale est donc :

$$\text{p-valeur} = 2\Phi(t_0) \approx 0.92$$

La p-valeur est grande et nous ne pouvons pas rejeter l'hypothèse nulle aux niveaux de signification usuels. Puisque nous ne pouvons pas rejeter l'hypothèse nulle au niveau de 5%, -5.6 est contenu dans l'intervalle de confiance à 95% pour β_1.

d. Construisez un intervalle de confiance à 99% pour β_0.

Un intervalle de confiance bilatéral à α% pour β_0 est donné par :

$$\hat{\beta}_0 \pm t_{\alpha/2} \times SE(\hat{\beta}_0) = 520.4 \pm t_{\alpha/2} \times 20.4$$

La valeur critique $t_{\alpha/2}$ pour un niveau de confiance de 99% est $t_{0.01/2}(98) \approx 2.63$.

L'intervalle de confiance à 99% pour β_0 est :

$$466.81 < \beta_0 < 573.99$$