Exercice 007 - Solution

GSF-6053

Hiver 2025

Énoncé

Un chercheur considère deux spécifications de régression pour estimer la relation entre une variable X et une variable Y :

$$\log Y = \alpha_1 + \beta_1 \log X + U \tag{1}$$

$$\log \frac{Y}{X} = \alpha_1 + \beta_1 \log X + V \tag{2}$$

où les lettres grecques désignent des paramètres, et X et Y sont deux variables aléatoires pour lesquelles nous disposons d'un échantillon aléatoire de taille n.

- **a.** *Déterminez si (2) peut être exprimée comme une version restreinte de (1).*

  La régression (2) peut être réécrite comme :

  $$\log Y = \alpha_1 + (\beta_1 + 1) \log X + V$$

  Cela montre que (2) est une version reparamétrée de (1) avec $\alpha_1 = \alpha_1$ et $\beta_1 = \beta_1 + 1$. Cependant, ce n'est **pas une version restreinte** de (1) car aucune restriction n'est imposée sur les valeurs de α_1 ou β_1.

- **b.** *En utilisant les mêmes n observations des variables Y et X, le chercheur ajuste les deux spécifications à l'aide de la méthode des moindres carrés ordinaires (MCO). Les ajustements sont :*

$$\hat{\log} Y = \hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1 \log X \tag{3}$$

$$\log \hat{X}Y = \hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1 \log X \tag{4}$$

Où les lettres grecques avec tilde représentent les valeurs estimées par les MCO. Utilisez l'expression des ajustements pour écrire $\hat{\beta}_2$ en fonction de $\hat{\beta}_1$.

En utilisant l'expression pour les ajustements des deux régressions :

$$z = \log XY = \log Y - \log X$$

La relation entre $\hat{\beta}_2$ et $\hat{\beta}_1$ est :

$$\hat{\beta}_2 = \hat{\beta}_1 - 1$$

- **c.** *Écrivez $\hat{\alpha}_1$ en fonction de $\hat{\alpha}_1$.*

La régression (3) et (4) montrent que :

$$\hat{\alpha}_1 = \bar{z} - \hat{\beta}_2 \bar{x}$$

Cela permet d'écrire $\hat{\alpha}_1$ en fonction de $\hat{\alpha}_1$.

- **d.** *Démontrer que :*

$$\hat{y} - \hat{x} = z \quad \text{où} \quad z = \hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_2 x$$

La démonstration suit simplement la substitution :

$$z = \hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_2 x = \hat{y} - x$$

- **e.** *Démontrer que les résidus de (3) sont identiques à ceux de (4).*

Les résidus pour les deux régressions sont identiques, ce qui peut être démontré comme suit :

$$\hat{V} = \hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_2 x - (y - x) = y - y = U$$

- **f.** *Démontrer que les erreurs standards de $\hat{\beta}_2$ et $\hat{\beta}_1$ sont identiques.*

Les erreurs standards pour $\hat{\beta}_2$ et $\hat{\beta}_1$ sont identiques, ce qui peut être démontré par :

$$\mathrm{SE}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-2} = \mathrm{SE}(\hat{\beta}_1)$$

- **g.** *Déterminez la relation entre la statistique t utilisant $\hat{\beta}_2$ et la statistique t utilisant $\hat{\beta}_1$.*

La statistique t pour l'hypothèse $H_0 : \beta_1 = 0$ est :

$$t_{\hat{\beta}_2} = \frac{\hat{\beta}_2}{\mathrm{SE}(\hat{\beta}_2)} = t_{\hat{\beta}_1 + 1}$$

Cela correspond à la statistique t pour l'hypothèse équivalente $H_0 : \beta_1 + 1 = 0$.

- **h.** *Expliquez, avec des arguments détaillés, si R^2 serait identique dans les deux régressions.*

R^2 serait différent dans les deux régressions car il mesure la proportion de la variance de la variable dépendante expliquée par la régression, et les variables dépendantes sont différentes dans chaque régression.