Exercice 008 - Solutions

GSF-6053

Hiver 2025

Énoncé

Un chercheur considère un échantillon aléatoire $X_1, X_2, \ldots, X_n$ provenant de la distribution suivante :

$$f(x;\theta_0) = \frac{\theta_0(-\log\theta_0)^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

où $\theta_0 \in (0,1)$ est le paramètre inconnu à estimer.

- **a.** *Déterminez l'estimateur du maximum de vraisemblance (MLE) pour θ_0.*

  Solution :

  Pour déterminer le MLE de θ_0, nous suivons les étapes suivantes :

  Étape 1 : Fonction de Vraisemblance

  La fonction de vraisemblance pour l'échantillon est :

  $$L(\theta_0) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i;\theta_0) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta_0(-\log\theta_0)^{X_i}}{X_i!} = \theta_0^n(-\log\theta_0)^{\sum_{i=1}^{n} X_i} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i!}$$

Étape 2 : Log-Vraisemblance

En prenant le logarithme, nous obtenons :

$$\ell(\theta_0) = \ln L(\theta_0) = n \ln \theta_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right) \ln(-\log \theta_0) - \sum_{i=1}^{n} \ln X_i!$$

Notons $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$, donc :

$$\ell(\theta_0) = n \ln \theta_0 + S \ln(-\log \theta_0) - \sum_{i=1}^{n} \ln X_i!$$

Étape 3 : Dérivée de la Log-Vraisemblance

Pour maximiser la log-vraisemblance, dérivons $\ell(\theta_0)$ par rapport à θ_0 et égalisons à zéro :

$$\frac{d\ell}{d\theta_0} = \frac{n}{\theta_0} + S \cdot \frac{1}{-\log \theta_0} \cdot \left(-\frac{1}{\theta_0} \right) = 0$$

Simplifiant :

$$\frac{n}{\theta_0} - \frac{S}{\theta_0 \log \theta_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{S}{\log \theta_0}$$

Donc :

$$\log \theta_0 = \frac{S}{n} \quad \Rightarrow \quad \theta_0 = e^{\frac{S}{n}}$$

Cependant, comme $\theta_0 \in (0, 1)$, $\frac{S}{n}$ doit être négatif, ce qui n'est pas possible puisque $X_i \geq 0$. Cela indique une erreur dans le calcul initial. En reconnaissant que la distribution donnée ressemble à une distribution de Poisson avec paramètre $\lambda = -\log \theta_0$, nous procédons comme suit :

Pour une distribution de Poisson, le MLE de λ est la moyenne de l'échantillon $\overline{X} = \frac{S}{n}$. Donc :

$$\lambda = \overline{X} = -\log \theta_0 \quad \Rightarrow \quad \theta_0 = e^{-\overline{X}}$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance pour θ_0 est :

$$\boxed{\hat{\theta}_0 = e^{-\overline{X}}}$$

où $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ est la moyenne de l'échantillon.

- **b.** *Montrez que $\hat{\theta}_0$ est un estimateur sans biais pour θ_0.*

  Solution :

  Un estimateur $\hat{\theta}_0$ est sans biais si $\mathbb{E}[\hat{\theta}_0] = \theta_0$.

  Nous avons $\hat{\theta}_0 = e^{-\overline{X}}$ et $\overline{X}$ est la moyenne d'une variable de Poisson avec paramètre $\lambda = -\log\theta_0$.

  La moyenne $\overline{X}$ est $\lambda = -\log\theta_0$, donc :

  $$\mathbb{E}[\hat{\theta}_0] = \mathbb{E}\left[e^{-\overline{X}}\right]$$

  Cependant, $e^{-\overline{X}}$ n'est pas linéaire, et par conséquent :

  $$\mathbb{E}\left[e^{-\overline{X}}\right] \neq e^{-\mathbb{E}[\overline{X}]} = e^{\log\theta_0} = \theta_0$$

  Donc, $\hat{\theta}_0$ n'est pas sans biais.

  Conclusion :

  L'estimateur $\hat{\theta}_0 = e^{-\overline{X}}$ **n'est pas sans biais** pour θ_0.

- **c.** *Calculez la variance de* $\hat{\theta}_0$.

  Solution :

  Pour calculer la variance de $\hat{\theta}_0 = e^{-\overline{X}}$, nous utilisons la formule de la variance pour une fonction non linéaire d'un estimateur.

  Sachant que $\overline{X}$ suit une distribution Gamma avec paramètres $\alpha = n$ et $\beta = \lambda = -\log\theta_0$, nous avons :

  $$\mathrm{Var}(\overline{X}) = \frac{\lambda}{n} = \frac{-\log\theta_0}{n}$$

  Utilisant l'approximation de Taylor au premier ordre autour de $\mathbb{E}[\overline{X}]$, nous obtenons :

  $$\mathrm{Var}(\hat{\theta}_0) \approx \left(\frac{d}{d\overline{X}} e^{-\overline{X}}\right)^2 \mathrm{Var}(\overline{X}) = e^{-2\mathbb{E}[\overline{X}]} \cdot \frac{-\log\theta_0}{n} = \theta_0^2 \cdot \frac{-\log\theta_0}{n}$$

  La variance de $\hat{\theta}_0$ est approximativement :

  $$\boxed{\mathrm{Var}(\hat{\theta}_0) \approx \frac{\theta_0^2(-\log\theta_0)}{n}}$$