Exercice 011 - Solutions

GSF-6053

Hiver 2025

Solutions

1. **Réponse : C.** La formule de l'intervalle de confiance pour une moyenne de population est : $\bar{x} \pm t\frac{s}{\sqrt{n}}$, qui est basée sur la moyenne de l'échantillon. Ainsi, "$\bar{x}$" est garanti d'être dans l'intervalle que vous formez.

   Explication : L'intervalle de confiance est construit autour de la moyenne de l'échantillon $\bar{x}$. Par définition, $\bar{x}$ est toujours inclus dans cet intervalle, quelle que soit la taille de l'échantillon ou le niveau de confiance choisi.

2. **Réponse : D.** Ne pas rejeter H_0.

   Explication : La règle générale est de rejeter l'hypothèse nulle H_0 si la p-valeur est inférieure au niveau de signification α. Ici, la p-valeur (0,184) est supérieure à α (0,10), donc nous ne rejetons pas H_0.

3. **Réponse : A.** La longueur de l'intervalle de confiance devient plus grande.

   Explication : La longueur de l'intervalle de confiance est donnée par $2 \times t\frac{s}{\sqrt{n}}$. En diminuant la taille de l'échantillon n, le dénominateur $\sqrt{n}$ diminue, ce qui augmente la marge d'erreur et donc la longueur de l'intervalle de confiance.

4. **Réponse : B.** La longueur de l'intervalle de confiance devient plus petite.

   Explication : En diminuant le niveau de confiance, la valeur critique t diminue, ce qui réduit la marge d'erreur et donc la longueur de l'intervalle de confiance, toutes choses étant égales par ailleurs.

5. **Réponse : D.** Impossible de déterminer avec les informations fournies.

   Explication : Augmenter la taille de l'échantillon tend à réduire la longueur de l'intervalle de confiance, tandis qu'augmenter le niveau de confiance tend à l'augmenter. Sans savoir quelle augmentation a le plus d'impact, il est impossible de déterminer l'effet net sur la longueur de l'intervalle de confiance.

6. **Réponse : C.** La moyenne de la distribution d'échantillonnage de $\bar{x}$ est μ, la moyenne de la population.

   Explication : Une des propriétés fondamentales de la distribution d'échantillonnage de la moyenne est que sa moyenne est égale à la moyenne de la population μ. Cela est vrai indépendamment de la taille de l'échantillon, tant que l'échantillon est aléatoire.

7. **Réponse : A.** Une p-valeur doit être comprise entre 0 et 1.

   Explication : Par définition, une p-valeur représente une probabilité et doit donc être située dans l'intervalle [0,1]. Les autres affirmations sont incorrectes : une p-valeur supérieure à 0,01 peut parfois conduire à rejeter H_0 si α est plus élevé, et les p-valeurs n'ont pas une distribution normale $N(0, 1)$.

8. **Réponse : B.** La taille de l'échantillon doit être de 1537.

   Explication : La formule pour la taille de l'échantillon est :

   $$n = \left(\frac{z \times s}{m}\right)^2$$

   Pour un intervalle de confiance à 95%, $z = 1,96$, $s = 10$, et $m = 0,5$:

   $$n = \left(\frac{1,96 \times 10}{0,5}\right)^2 = \left(\frac{19,6}{0,5}\right)^2 = (39,2)^2 = 1536,64$$

   On arrondit toujours à l'entier supérieur, donc $n = 1537$.

9. **Réponse : C.** La valeur de z utilisée est 1,81.

   Explication : Pour un intervalle de confiance de 93%, on calcule la valeur critique z de la manière suivante :

   $$1 - 0,93 = 0,07 \quad \text{(zone dans les queues)}$$

$$\frac{0,07}{2} = 0,035$$

En consultant la table de la distribution normale standard pour une probabilité cumulée de 0,035 dans une queue, on obtient $z \approx 1,81$. Donc, $z = 1,81$.

10. **Réponse : D.** La distribution d'échantillonnage.

    Explication : La question concerne les valeurs possibles de $\bar{x}$ pour tous les échantillons de taille n issus de la population. Cela se réfère à la distribution d'échantillonnage de $\bar{x}$, qui décrit toutes les valeurs que la moyenne d'échantillon peut prendre.

11. **Réponse : B.** Pour aider à expliquer les résultats de phénomènes aléatoires et pour faire des prédictions éclairées sur des paramètres que nous ne connaissons pas.

    Explication : Les statistiques inférentielles sont utilisées pour tirer des conclusions sur une population entière à partir des données recueillies dans un échantillon. Elles permettent de faire des prédictions et de prendre des décisions basées sur ces données, même lorsque les paramètres de la population sont inconnus.

12. **Réponses :**
    a) F. La probabilité que μ soit entre 1,15 et 4,20 est de 0,95. **(Faux)**
    Explication : Dans un très grand nombre d'échantillons, 95% des intervalles de confiance contiendraient μ, la moyenne de la population. Si les extrémités de l'IC sont données, on utilise le terme confiance, pas probabilité.
    b) T. Nous sommes confiants à 95% que la véritable moyenne du nombre de télévisions par ménage américain se situe entre 1,15 et 4,20. **(Vrai)**
    Explication : Cela découle de la définition d'un intervalle de confiance. Nous avons 95% de confiance que la moyenne inconnue μ se situe dans cet intervalle.
    c) F. 95% de tous les échantillons devraient avoir des $\bar{x}$ entre 1,15 et 4,20. **(Faux)**
    Explication : Le centre de chaque intervalle est à $\bar{x}$, et donc varie d'un échantillon à l'autre. Ainsi, sur 100 intervalles calculés de la même manière, nous pouvons nous attendre à ce que 95 d'entre eux capturent la moyenne de la population, pas uniquement la moyenne de leur propre échantillon.

d) F. 95% de tous les ménages américains ont entre 1,15 et 4,20 télévisions. **(Faux)**
Explication : Cette affirmation concerne les individus (tous les ménages américains), ce qui est incorrect. Les intervalles de confiance font des déclarations sur μ, la moyenne de la population, et non sur les individus.

e) T. Sur 100 intervalles calculés de la même manière (95%), nous nous attendons à ce que 95 d'entre eux capturent la moyenne de la population. **(Vrai)**
Explication : Dans un très grand nombre d'échantillons, 95% des intervalles de confiance contiendraient μ, la moyenne de la population.

f) T. Le centre de chaque intervalle est à $\bar{x}$, et donc varie d'un échantillon à l'autre. Ainsi, sur 100 intervalles calculés de la même manière, nous pouvons nous attendre à ce que 100 d'entre eux capturent la moyenne de l'échantillon. **(Vrai)**
Explication : Chaque intervalle de confiance est centré sur la moyenne de l'échantillon spécifique, donc chaque intervalle capture sa propre moyenne d'échantillon.

13. **Réponse : C.** Nous rejetons H_0.

Explication : Selon la règle générale, si la p-valeur est inférieure au niveau de signification α, nous rejetons H_0. Ici, la p-valeur de 0,003 est inférieure à tous les niveaux de α couramment utilisés (0,10, 0,05, 0,01), donc nous rejetons H_0.

14. **Réponse : B.** Un paramètre est un nombre qui décrit la population. Une statistique est un nombre qui décrit l'échantillon.

Explication : Un paramètre est une valeur qui résume une caractéristique de la population entière, tandis qu'une statistique résume une caractéristique de l'échantillon prélevé. Ils servent tous deux à faire des inférences et à décrire leurs groupes respectifs.

15. **Réponse : B.** La probabilité que la moyenne de 35 clients soit supérieure à 13 dollars est presque zéro.

Explication : La moyenne de l'échantillon suit une distribution normale avec une moyenne de 10 dollars et un écart-type de $\frac{2,50}{\sqrt{35}} \approx 0,423$.

Calculons le score z :

$$z = \frac{13 - 10}{0,423} \approx 7,09$$

La probabilité que $z > 7,09$ est pratiquement nulle.

16. **Réponse : C.** L'estimateur $\hat{\lambda}$ suit une distribution Inverse-Gamma $(n, \lambda n)$.

    Explication : Étant donné que Y_i suit une distribution exponentielle de paramètre λ, la somme $S = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ suit une distribution Gamma avec paramètres $\alpha = n$ et $\beta = \lambda$. L'estimateur $\hat{\lambda} = \dfrac{n}{S}$ est une transformation de S, et donc suit une distribution Inverse-Gamma avec les paramètres $(n, \lambda n)$.

17. **Réponse : A.** La moyenne de la distribution d'échantillonnage de la moyenne de l'échantillon est égale à la moyenne de la population μ.

    Explication : Selon les propriétés de la distribution d'échantillonnage, la moyenne de la distribution d'échantillonnage de $\bar{x}$ est égale à la moyenne de la population μ. Cela signifie que, en moyenne, les moyennes des échantillons sont centrées autour de μ.

18. **Réponse : C.** La probabilité que la moyenne de 35 clients soit supérieure à 13 dollars est presque zéro.

    Explication : (Référence à la question 15). La valeur de $z \approx 7,09$ correspond à une probabilité très faible (pratiquement nulle) que la moyenne de l'échantillon dépasse 13 dollars, étant donné que la moyenne de la population est de 10 dollars avec un écart-type de 2,50 dollars.

19. **Réponse : C.** La distribution de $\hat{\lambda}$ suit une distribution Inverse-Gamma $(n, \lambda n)$.

    Explication : Comme expliqué précédemment, $\hat{\lambda}$ est une transformation de la somme S, qui suit une distribution Gamma. Par conséquent, $\hat{\lambda}$ suit une distribution Inverse-Gamma avec les paramètres $(n, \lambda n)$.

20. **Réponse : C.** L'écart-type de la distribution d'échantillonnage de la moyenne de l'échantillon est l'écart-type de la population divisé par la racine carrée de la taille de l'échantillon.

Explication : Selon le théorème central limite, lorsque la taille de l'échantillon n est grande, la distribution d'échantillonnage de la moyenne de l'échantillon $\bar{x}$ est approximativement normale avec une moyenne de μ et un écart-type de $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.