Exercice 012 - Solutions

GSF-6053

Hiver 2025

Énoncé

Considérez le modèle de régression linéaire suivant :

$$y = X\beta + \epsilon$$

où y est un vecteur 3×1, X est une matrice 3×2 de variables explicatives, β est un vecteur 2×1 de coefficients à estimer, et $\epsilon \sim N(0, \sigma^2\Omega)$.

Supposons que la matrice de variance-covariance Ω est diagonale et connue, définie par :

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Données :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Questions :

1. **a)** Calculer l'estimateur GLS $\hat{\beta}_{GLS}$.
2. **b)** Calculer la matrice de variance de $\hat{\beta}_{GLS}$.
3. **c)** Comparer $\hat{\beta}_{GLS}$ avec l'estimateur des Moindres Carrés Ordinaires (MCO) $\hat{\beta}_{OLS}$. Quelle est la différence entre les deux estimateurs dans ce contexte ?

Solution

Question 1.a : Calcul de l'estimateur GLS $\hat{\beta}_{GLS}$

L'estimateur GLS est donné par :

$$\hat{\beta}_{GLS} = \left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1} X'\Omega^{-1}y$$

Étape 1 : Inversion de la matrice Ω
Puisque Ω est diagonale, son inverse Ω^{-1} est :

$$\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Étape 2 : Calcul de $X'\Omega^{-1}X$

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \Omega^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} X'\Omega^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X'\Omega^{-1}X &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} & 1 + 1 + 1 \\ 1 + 1 + 1 & 1 + 2 + 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1.8333 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Étape 3 : Calcul de $X'\Omega^{-1}y$

$$
\begin{aligned}
X'\Omega^{-1}y &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{3} \times 3 \\ 1 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 + 1 + 1 \\ 6 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Étape 4 : Calcul de $\hat{\beta}_{GLS}$

$$
\hat{\beta}_{GLS} = \left(\begin{pmatrix} 1.8333 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}
$$

Calculons l'inverse de $X'\Omega^{-1}X$:

$$
\begin{aligned}
\det(X'\Omega^{-1}X) &= (1.8333)(6) - (3)^2 \\
&= 11 - 9 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 1.8333 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & -1.5 \\ -1.5 & 0.9167 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{\beta}_{GLS} &= \begin{pmatrix} 3 & -1.5 \\ -1.5 & 0.9167 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 \times 3 + (-1.5) \times 6 \\ -1.5 \times 3 + 0.9167 \times 6 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 9 - 9 \\ -4.5 + 5.5002 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1.0002 \end{pmatrix} \\
&\approx \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Question 1.b : Calcul de la matrice de variance de $\hat{\beta}_{GLS}$

La matrice de variance de l'estimateur GLS est :

$$Var(\hat{\beta}_{GLS}) = \sigma^2 \left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1} = \sigma^2 \begin{pmatrix} 3 & -1.5 \\ -1.5 & 0.9167 \end{pmatrix}$$

Question 1.c : Comparaison avec l'estimateur des Moindres Carrés Ordinaires (MCO) $\hat{\beta}_{OLS}$

L'estimateur OLS est donné par :

$$\hat{\beta}_{OLS} = (X'X)^{-1} X'y$$

Calculons $X'X$ et $X'y$:

$$\begin{aligned} X'X &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X'y &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calculons l'inverse de $X'X$:

$$\begin{aligned} (X'X)^{-1} &= \frac{1}{(3)(14) - (6)^2} \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{42 - 36} \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2.3333 & -1 \\ -1 & 0.5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\hat{\beta}_{OLS} &= \begin{pmatrix} 2.3333 & -1 \\ -1 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2.3333 \times 6 + (-1) \times 14 \\ -1 \times 6 + 0.5 \times 14 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 14 - 14 \\ -6 + 7 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Comparaison :

$$
\hat{\beta}_{GLS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\beta}_{OLS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

Discussion :

Dans ce contexte particulier où la matrice de variance-covariance Ω est diagonale avec des variances proportionnelles aux carrés des variables explicatives, les estimateurs GLS et OLS coïncident. Cela s'explique par le fait que les poids appliqués par GLS sont proportionnels à ceux d'OLS, rendant les deux méthodes équivalentes.

Cependant, dans des scénarios plus généraux avec hétéroscédasticité ou autocorrélation, GLS offre des estimations plus efficaces en ajustant les poids en fonction de la structure de Ω.