Exercice 014 - Solutions

GSF-6053

Hiver 2025

Énoncé

Considérez le modèle suivant avec autocorrélation d'ordre 1 dans les résidus :

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \epsilon_t$$
$$\epsilon_t = \rho \epsilon_{t-1} + u_t$$

où $u_t \sim N(0, \sigma^2)$.

Données :

Utilisez les données synthétiques suivantes pour $t = 1, 2, 3, 4$:

t	x_t	y_t
1	1	2
2	2	3
3	3	5
4	4	7

Supposons que $\rho = 0.5$.

Questions :

1. **a)** Estimez les coefficients β_0 et β_1 par MCO et calculez les résidus $\hat{\epsilon}_t$.
2. **b)** Estimez le paramètre ρ à partir des résidus obtenus en utilisant la méthode des moindres carrés sur $\hat{\epsilon}_t$.
3. **c)** Transformez le modèle en fonction de ρ estimé et formulez le nouveau modèle transformé.
4. **d)** Estimez les coefficients β_0 et β_1 en appliquant FGLS sur le modèle transformé.
5. **e)** Comparez les résultats obtenus par MCO et FGLS. Quel est l'impact de l'autocorrélation sur les estimations ?

Solution

Question 3.a : Estimation des coefficients β_0 et β_1 par MCO et calcul des résidus $\hat{\epsilon}_t$

L'estimateur OLS est donné par :

$$\hat{\beta}_{OLS} = (X'X)^{-1}X'y$$

Calcul de $X'X$ et $X'y$:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} X'X &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X'y &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 1 \times 3 + 1 \times 5 + 1 \times 7 \\ 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 5 + 4 \times 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 17 \\ 41 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calcul de $(X'X)^{-1}$:

$$\begin{aligned}
(X'X)^{-1} &= \frac{1}{(4)(30)-(10)^2}\begin{pmatrix} 30 & -10 \\ -10 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{120-100}\begin{pmatrix} 30 & -10 \\ -10 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 30 & -10 \\ -10 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_{OLS} &= \begin{pmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 17 \\ 41 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1.5 \times 17 + (-0.5) \times 41 \\ -0.5 \times 17 + 0.2 \times 41 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 25.5 - 20.5 \\ -8.5 + 8.2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 \\ -0.3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Calcul des résidus $\hat{\epsilon}_t$:

$$\hat{\epsilon} = y - X\hat{\beta}_{OLS}$$

$$X\hat{\beta}_{OLS} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -0.3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 1 \times (-0.3) \\ 1 \times 5 + 2 \times (-0.3) \\ 1 \times 5 + 3 \times (-0.3) \\ 1 \times 5 + 4 \times (-0.3) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 5 - 0.3 \\ 5 - 0.6 \\ 5 - 0.9 \\ 5 - 1.2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4.7 \\ 4.4 \\ 4.1 \\ 3.8 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4.7 \\ 4.4 \\ 4.1 \\ 3.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.7 \\ -1.4 \\ 0.9 \\ 3.2 \end{pmatrix}$$

Question 3.b : Estimation du paramètre ρ à partir des résidus

Pour estimer ρ, nous utilisons la régression des résidus $\hat{\epsilon}_t$ sur $\hat{\epsilon}_{t-1}$.

$$\hat{\epsilon}_t = \rho\hat{\epsilon}_{t-1} + u_t$$

Données des résidus :

t	$\hat{\epsilon}_t$	$\hat{\epsilon}_{t-1}$
1	-2.7	N/A
2	-1.4	-2.7
3	0.9	-1.4
4	3.2	0.9

Nous excluons $t = 1$ car $\hat{\epsilon}_0$ est inconnue.
Calcul de ρ :

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{\sum_{t=2}^{4} \hat{\epsilon}_t \hat{\epsilon}_{t-1}}{\sum_{t=2}^{4} \hat{\epsilon}_{t-1}^2} \\
&= \frac{(-1.4)(-2.7) + (0.9)(-1.4) + (3.2)(0.9)}{(-2.7)^2 + (-1.4)^2 + (0.9)^2} \\
&= \frac{3.78 - 1.26 + 2.88}{7.29 + 1.96 + 0.81} \\
&= \frac{5.4}{10.06} \\
&\approx 0.537
\end{aligned}$$

Question 3.c : Transformation du modèle en fonction de ρ estimé

Le modèle transformé est obtenu en réécrivant l'équation originale en fonction de ρ :

$$y_t - \rho y_{t-1} = \beta_0(1-\rho) + \beta_1(x_t - \rho x_{t-1}) + u_t$$

Pour $t = 2, 3, 4$, nous avons :

$$\begin{aligned}
y_2 - \rho y_1 &= \beta_0(1-\rho) + \beta_1(x_2 - \rho x_1) + u_2 \\
y_3 - \rho y_2 &= \beta_0(1-\rho) + \beta_1(x_3 - \rho x_2) + u_3 \\
y_4 - \rho y_3 &= \beta_0(1-\rho) + \beta_1(x_4 - \rho x_3) + u_4
\end{aligned}$$

Substitution des valeurs :
Avec $\hat{\rho} = 0.537$,

$$\begin{aligned}
y_2 - 0.537 y_1 &= \beta_0 \times 0.463 + \beta_1 \times 1.463 + u_2 \\
y_3 - 0.537 y_2 &= \beta_0 \times 0.463 + \beta_1 \times 2.926 + u_3 \\
y_4 - 0.537 y_3 &= \beta_0 \times 0.463 + \beta_1 \times 3.591 + u_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2 - 0.537 \times 1 &= 0.463\beta_0 + 1.463\beta_1 + u_2 \\
5 - 0.537 \times 2 &= 0.463\beta_0 + 2.926\beta_1 + u_3 \\
7 - 0.537 \times 3 &= 0.463\beta_0 + 3.591\beta_1 + u_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1.463 &= 0.463\beta_0 + 1.463\beta_1 + u_2 \\
3.926 &= 0.463\beta_0 + 2.926\beta_1 + u_3 \\
5.389 &= 0.463\beta_0 + 3.591\beta_1 + u_4
\end{aligned}$$

Question 3.d : Estimation des coefficients β_0 et β_1 par FGLS

L'estimateur FGLS est donné par :

$$\hat{\beta}_{FGLS} = \left(\tilde{X}'\tilde{X}\right)^{-1}\tilde{X}'\tilde{y}$$

Formulation matricielle :

$$\tilde{y} = \begin{pmatrix} 1.463 \\ 3.926 \\ 5.389 \end{pmatrix}, \quad \tilde{X} = \begin{pmatrix} 0.463 & 1.463 \\ 0.463 & 2.926 \\ 0.463 & 3.591 \end{pmatrix}$$

Calcul de $\tilde{X}'\tilde{X}$:

$$\begin{aligned}
\tilde{X}'\tilde{X} &= \begin{pmatrix} 0.463 & 0.463 & 0.463 \\ 1.463 & 2.926 & 3.591 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.463 & 1.463 \\ 0.463 & 2.926 \\ 0.463 & 3.591 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 \times 0.463^2 & 0.463 \times (1.463 + 2.926 + 3.591) \\ 0.463 \times (1.463 + 2.926 + 3.591) & 1.463^2 + 2.926^2 + 3.591^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 \times 0.2145 & 0.463 \times 8.980 \\ 0.463 \times 8.980 & 2.1405 + 8.5532 + 12.9132 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0.6435 & 4.1603 \\ 4.1603 & 23.6069 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Calcul de $\tilde{X}'\tilde{y}$:

$$
\begin{aligned}
\tilde{X}'\tilde{y} &= \begin{pmatrix} 0.463 & 0.463 & 0.463 \\ 1.463 & 2.926 & 3.591 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.463 \\ 3.926 \\ 5.389 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0.463 \times 1.463 + 0.463 \times 3.926 + 0.463 \times 5.389 \\ 1.463 \times 1.463 + 2.926 \times 3.926 + 3.591 \times 5.389 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0.6763 + 1.8175 + 2.4967 \\ 2.1405 + 11.4676 + 19.3540 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5.0 \\ 32.0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Calcul de $(\tilde{X}'\tilde{X})^{-1}$:

$$
\begin{aligned}
\det(\tilde{X}'\tilde{X}) &= (0.6435)(23.6069) - (4.1603)^2 \\
&= 15.1694 - 17.3062 \\
&= -2.1368
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\tilde{X}'\tilde{X})^{-1} &= \frac{1}{-2.1368} \begin{pmatrix} 23.6069 & -4.1603 \\ -4.1603 & 0.6435 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -11.0463 & 1.9472 \\ 1.9472 & -0.3012 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{\beta}_{FGLS} &= \begin{pmatrix} -11.0463 & 1.9472 \\ 1.9472 & -0.3012 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 32 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -11.0463 \times 5 + 1.9472 \times 32 \\ 1.9472 \times 5 + (-0.3012) \times 32 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -55.2315 + 62.3104 \\ 9.736 + (-9.6384) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 7.0789 \\ 0.0976 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Question 3.e : Comparaison des estimations obtenues par MCO et FGLS

Résultats obtenus :

$$\hat{\beta}_{OLS} = \begin{pmatrix} 5 \\ -0.3 \end{pmatrix}, \quad \hat{\beta}_{FGLS} = \begin{pmatrix} 7.0789 \\ 0.0976 \end{pmatrix}$$

Discussion :

— **Précision des Estimations :** L'estimateur FGLS ajuste les coefficients en tenant compte de l'autocorrélation des résidus, ce qui permet une meilleure précision des estimations par rapport à l'estimateur OLS qui suppose une autocorrélation nulle.

— **Variance des Estimateurs :** FGLS peut réduire la variance des estimateurs en corrigeant l'autocorrélation, rendant les estimations plus fiables et efficaces.

— **Biais :** Dans cet exercice, les deux estimateurs sont sans biais. Cependant, FGLS offre une meilleure efficacité en termes de variance.

— **Impact de l'Autocorrélation :** L'autocorrélation non corrigée dans OLS peut entraîner des estimateurs inefficaces et des erreurs standards incorrectes. FGLS corrige cette autocorrélation, améliorant ainsi l'efficacité des estimations.

Conclusion :

L'autocorrélation dans les résidus peut affecter négativement les estimations OLS en augmentant la variance des estimateurs et en rendant les tests statistiques moins fiables. L'application de FGLS, en tenant compte de cette autocorrélation, permet d'obtenir des estimations plus efficaces et fiables des coefficients du modèle de régression. Ainsi, FGLS est préférable dans des contextes où l'autocorrélation est présente, offrant des avantages significatifs en termes de précision et d'efficacité par rapport à l'estimateur OLS.