Preuve des Moindres Carrés Ordinaires (MCO) en Sommation

Simon-Pierre Boucher

Janvier 2025

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Modèle de Régression Linéaire **2**

3 Les Résidus **2**

4 Minimisation de la Somme des Carrés des Résidus **3**

5 Calcul des Équations Normales **3**

5.1 Équation Normale pour $\hat{\beta}_1$ 3

5.2 Équation Normale pour $\hat{\beta}_2$ 4

6 Conclusion **4**

1 Introduction

Les Moindres Carrés Ordinaires (MCO) sont une méthode d'estimation utilisée pour ajuster un modèle de régression linéaire aux données observées en minimisant l'erreur quadratique entre les valeurs observées et les valeurs prédites. L'objectif ici est de démontrer les MCO en utilisant la méthode de minimisation de la somme des carrés des résidus, en suivant une procédure rigoureuse étape par étape.

2 Modèle de Régression Linéaire

Le modèle de régression linéaire simple peut être écrit comme suit :

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \mu_i$$

où :

- Y_i est la variable dépendante ou expliquée pour l'observation i,
- X_i est la variable indépendante ou explicative pour l'observation i,
- β_1 et β_2 sont les paramètres du modèle à estimer,
- μ_i est le terme d'erreur associé à l'observation i.

Hypothèses :

- $E(\mu_i) = 0$, ce qui signifie que les erreurs ont une moyenne nulle,
- $V(\mu_i) = \sigma^2$, c'est-à-dire que les erreurs ont une variance constante,
- Les erreurs sont indépendantes les unes des autres.

Nous pouvons réécrire ce modèle comme suit :

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \mu_i$$

3 Les Résidus

Les résidus sont la différence entre les valeurs observées Y_i et les valeurs estimées $\hat{Y}_i$ par le modèle de régression. L'estimateur des résidus est donc donné par :

$$\hat{\mu}_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - (\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i)$$

L'objectif des MCO est de minimiser la somme des carrés des résidus. Cela revient à minimiser la fonction :

$$S = \sum_{i=1}^{N} \hat{\mu}_i^2 = \sum_{i=1}^{N} (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_i)^2$$

où N est le nombre d'observations. Cette somme représente l'erreur totale entre les valeurs observées et les valeurs prédites.

4 Minimisation de la Somme des Carrés des Résidus

L'objectif de la méthode des Moindres Carrés Ordinaires est de trouver les valeurs des paramètres $\hat{\beta}_1$ et $\hat{\beta}_2$ qui minimisent cette somme. Nous cherchons donc à résoudre le problème suivant :

$$\min_{\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2} \sum_{i=1}^{N} (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_i)^2$$

Cela revient à dériver la fonction S par rapport aux paramètres $\hat{\beta}_1$ et $\hat{\beta}_2$, et de les égaler à zéro.

5 Calcul des Équations Normales

Nous obtenons les équations normales en dérivant S par rapport à $\hat{\beta}_1$ et $\hat{\beta}_2$.

5.1 Équation Normale pour $\hat{\beta}_1$

La dérivée partielle de S par rapport à $\hat{\beta}_1$ est :

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\beta}_1} \sum_{i=1}^{N} (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_i)^2 = -2 \sum_{i=1}^{N} (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_i) = 0$$

Cette dérivée mesure comment S varie lorsque $\hat{\beta}_1$ varie, et la condition d'optimalité exige que cette dérivée soit égale à zéro. En réorganisant cette équation, nous obtenons :

$$\sum_{i=1}^{N} Y_i = N\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{N} X_i$$

Isolons $\hat{\beta}_1$:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i - \hat{\beta}_2 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i$$

Ce qui peut se réécrire comme :

$$\hat{\beta}_1 = \bar{Y} - \hat{\beta}_2 \bar{X}$$

où $\bar{Y}$ et $\bar{X}$ représentent les moyennes des Y_i et X_i respectivement.

5.2 Équation Normale pour $\hat{\beta}_2$

La dérivée partielle de S par rapport à $\hat{\beta}_2$ est :

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\beta}_2} \sum_{i=1}^{N} (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_i)^2 = -2 \sum_{i=1}^{N} X_i (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_i) = 0$$

Cette dérivée mesure comment S varie lorsque $\hat{\beta}_2$ varie. En réorganisant cette équation, nous obtenons l'équation normale suivante :

$$\sum_{i=1}^{N} X_i Y_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{N} X_i - \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{N} X_i^2 = 0$$

En utilisant la relation $\hat{\beta}_1 = \bar{Y} - \hat{\beta}_2 \bar{X}$, nous remplaçons dans cette équation pour obtenir :

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^{N} (X_i - \bar{X})^2}$$

C'est l'estimateur de $\hat{\beta}_2$, qui est l'estimateur de la pente de la droite de régression.

6 Conclusion

Les estimateurs des paramètres de régression β_1 et β_2 obtenus par la méthode des Moindres Carrés Ordinaires sont :

$$\hat{\beta}_1 = \bar{Y} - \hat{\beta}_2 \bar{X}$$

et

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^{N} (X_i - \bar{X})^2}$$

Ces estimations minimisent la somme des carrés des résidus et permettent de déterminer la relation linéaire entre Y et X. Ces résultats sont fondamentaux pour l'application des Moindres Carrés Ordinaires dans l'analyse de régression linéaire.