Preuve Complète de la Transformation de Prais-Winsten

GSF-6053

Janvier 2025

Table des matières

1 Introduction

La transformation de Prais-Winsten est une méthode utilisée pour corriger l'autocorrélation des erreurs de premier ordre dans un modèle de régression linéaire. Cette transformation est particulièrement utile dans les séries temporelles où l'autocorrélation peut biaiser les estimations des moindres carrés ordinaires (OLS). La méthode de Prais-Winsten améliore la procédure de Cochrane-Orcutt en conservant la première observation, ce qui permet une utilisation plus efficace des données disponibles.

2 Modèle avec Autocorrélation des Erreurs

Considérons le modèle de régression linéaire suivant avec des erreurs autocorrélées d'ordre 1 :

$$Y_t = X_t\beta + u_t \tag{1}$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t \tag{2}$$

où ϵ_t est un terme d'erreur aléatoire indépendant et identiquement distribué ($\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$) et $|\rho| < 1$.

3 Objectif de la Transformation

L'objectif principal de la transformation de Prais-Winsten est de transformer le modèle original de manière à éliminer l'autocorrélation des erreurs, permettant ainsi l'application des moindres carrés ordinaires pour obtenir des estimateurs sans biais et efficaces des paramètres β.

4 Transformation de Prais-Winsten

La transformation de Prais-Winsten est définie par les équations suivantes pour $t = 1, 2, \ldots, T$:

$$Y_t^* = Y_t - \rho Y_{t-1} \tag{3}$$

$$X_t^* = X_t - \rho X_{t-1} \tag{4}$$

$$u_t^* = u_t - \rho u_{t-1} \tag{5}$$

Contrairement à la méthode de Cochrane-Orcutt, Prais-Winsten modifie également la première observation pour éviter de perdre des données, ce qui rend l'estimation plus efficace.

4.1 Procédure de Transformation

1. **Estimation Initiale :** Estimer le modèle OLS (1) pour obtenir les résidus $\hat{u}_t$.
2. **Estimation de ρ :** Utiliser les résidus pour estimer le coefficient d'autocorrélation ρ en régressant $\hat{u}_t$ sur $\hat{u}_{t-1}$.
$$\hat{u}_t = \rho \hat{u}_{t-1} + \nu_t \tag{6}$$
3. **Transformation des Variables :** Appliquer la transformation de Prais-Winsten aux variables dépendante et indépendantes.
4. **Estimation Finale :** Estimer le modèle transformé en utilisant les moindres carrés ordinaires sur les variables transformées.

5 Preuve de la Transformation

Pour démontrer que la transformation de Prais-Winsten élimine l'autocorrélation des erreurs, nous allons procéder par étapes détaillées.

5.1 Modèle Original avec Autocorrélation

Considérons le modèle original avec autocorrélation des erreurs d'ordre 1 :

$$Y_t = X_t\beta + u_t \tag{7}$$
$$u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t \tag{8}$$

où ϵ_t est un terme d'erreur aléatoire indépendant avec $E(\epsilon_t) = 0$ et $Var(\epsilon_t) = \sigma^2$, et $|\rho| < 1$.

5.2 Substitution et Transformation

Substituons l'expression de u_t dans le modèle original (7) :

$$\begin{aligned}
Y_t &= X_t\beta + \rho u_{t-1} + \epsilon_t \quad \text{(en remplaçant } u_t\text{)} \\
Y_t &= X_t\beta + \rho(Y_{t-1} - X_{t-1}\beta) + \epsilon_t \quad \text{(en remplaçant } u_{t-1}\text{)} \\
Y_t &= X_t\beta + \rho Y_{t-1} - \rho X_{t-1}\beta + \epsilon_t \quad \text{(en distribuant } \rho\text{)}
\end{aligned}$$

Regroupons les termes :

$$\begin{aligned}
Y_t - \rho Y_{t-1} &= X_t\beta - \rho X_{t-1}\beta + \epsilon_t \\
Y_t^* &= X_t^*\beta + \epsilon_t \quad \text{(définissant } Y_t^* = Y_t - \rho Y_{t-1} \text{ et } X_t^* = X_t - \rho X_{t-1}\text{)}
\end{aligned}$$

Ainsi, le modèle transformé est :

$$Y_t^* = X_t^* \beta + \epsilon_t$$

où $Y_t^* = Y_t - \rho Y_{t-1}$ et $X_t^* = X_t - \rho X_{t-1}$.

5.3 Propriétés des Erreurs Transformées

Examinons les erreurs transformées :

$$u_t^* = u_t - \rho u_{t-1}$$

En utilisant l'équation (8) :

$$u_t^* = (\rho u_{t-1} + \epsilon_t) - \rho u_{t-1} = \epsilon_t$$

Ainsi, $u_t^* = \epsilon_t$.

Puisque ϵ_t est non corrélée et homoscédastique ($Var(\epsilon_t) = \sigma^2$), les erreurs transformées u_t^* possèdent les mêmes propriétés :

$$E(u_t^*) = E(\epsilon_t) = 0$$

$$Var(u_t^*) = Var(\epsilon_t) = \sigma^2$$

$$Cov(u_t^*, u_s^*) = Cov(\epsilon_t, \epsilon_s) = 0 \quad \text{pour } t \neq s$$

Cela montre que les erreurs transformées u_t^* sont non corrélées et homoscédastiques.

5.4 Conclusion de la Transformation

En appliquant la transformation de Prais-Winsten, le modèle transformé devient :

$$Y_t^* = X_t^* \beta + \epsilon_t$$

où les erreurs ϵ_t sont non corrélées et homoscédastiques. Cela permet l'application des moindres carrés ordinaires (OLS) sur le modèle transformé pour obtenir des estimateurs $\hat{\beta}$ sans biais et efficaces.

5.5 Étapes Détaillées de la Preuve

Pour une compréhension approfondie, détaillons chaque étape de la preuve :

5.5.1 Étape 1 : Substitution des Erreurs

Partant des équations (7) et (8) :

$$Y_t = X_t\beta + u_t$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t$$

Substituons u_t dans l'équation de Y_t :

$$Y_t = X_t\beta + \rho u_{t-1} + \epsilon_t$$

5.5.2 Étape 2 : Substitution Récursive

Remplaçons u_{t-1} par son expression à partir de l'équation (8) :

$$u_{t-1} = \rho u_{t-2} + \epsilon_{t-1}$$

Cependant, pour simplifier la transformation, nous considérons que les valeurs passées de u sont déjà intégrées dans les termes de Y et X.

5.5.3 Étape 3 : Réarrangement des Termes

Regroupons les termes liés à Y_t et Y_{t-1} :

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = X_t\beta - \rho X_{t-1}\beta + \epsilon_t$$

$$Y_t^* = X_t^*\beta + \epsilon_t$$

avec $Y_t^* = Y_t - \rho Y_{t-1}$ et $X_t^* = X_t - \rho X_{t-1}$.

5.5.4 Étape 4 : Analyse des Erreurs Transformées

Les erreurs transformées u_t^* sont définies comme :

$$u_t^* = u_t - \rho u_{t-1} = \epsilon_t$$

Puisque ϵ_t est indépendant et identiquement distribué, les erreurs transformées u_t^* sont également indépendantes et identiquement distribuées, sans autocorrélation.

5.5.5 Étape 5 : Application des Moindres Carrés Ordinaires

Avec le modèle transformé :

$$Y_t^* = X_t^*\beta + \epsilon_t$$

et des erreurs ϵ_t non autocorrélées et homoscédastiques, l'application des moindres carrés ordinaires (OLS) sur ce modèle transformé fournit des estimateurs $\hat{\beta}$ sans biais et efficaces, satisfaisant les conditions du théorème de Gauss-Markov.

6 Estimation de ρ

L'estimation du coefficient d'autocorrélation ρ est cruciale pour la transformation de Prais-Winsten. Une méthode courante consiste à utiliser les résidus du modèle OLS initial pour estimer ρ via une régression des résidus sur leurs valeurs retardées :

$$\hat{u}_t = \rho \hat{u}_{t-1} + \nu_t$$

où ν_t est l'erreur de cette régression. L'estimateur de ρ obtenu est ensuite utilisé dans les étapes de transformation des variables.

6.1 Procédure d'Estimation de ρ

1. **Estimation Initiale du Modèle OLS :** Estimer le modèle original (7) par OLS pour obtenir les résidus $\hat{u}_t$.
2. **Régression des Résidus :** Régressuer $\hat{u}_t$ sur $\hat{u}_{t-1}$:

$$\hat{u}_t = \rho \hat{u}_{t-1} + \nu_t$$

3. **Obtention de $\hat{\rho}$:** Utiliser les estimateurs de cette régression pour obtenir $\hat{\rho}$.

6.2 Considérations sur l'Estimation de ρ

— **Consistance :** L'estimateur $\hat{\rho}$ est consistant si ρ est bien spécifié et si les erreurs sont correctement modélisées.

— **Efficacité :** Pour améliorer l'efficacité de l'estimation, des méthodes comme le maximum de vraisemblance peuvent être utilisées.

— **Tests de Significativité :** Il est important de tester la significativité de $\hat{\rho}$ pour s'assurer que l'autocorrélation est effectivement présente et significative.

7 Propriétés de l'Estimateur Transformé

Après transformation, l'estimateur $\hat{\beta}$ obtenu via les moindres carrés ordinaires sur le modèle transformé possède les propriétés suivantes :

— **Sans Biais :** $E(\hat{\beta}) = \beta$

— **Efficace :** Sous les hypothèses classiques de Gauss-Markov, $\hat{\beta}$ est l'estimateur linéaire sans biais ayant la plus petite variance.

— **Consistant :** L'estimateur converge en probabilité vers la vraie valeur β lorsque la taille de l'échantillon augmente.

7.1 Démonstration de l'Unbiasedness

Considérons le modèle transformé :

$$Y_t^* = X_t^* \beta + \epsilon_t$$

Prenons l'espérance conditionnelle de Y_t^* :

$$E(Y_t^*|X_t^*) = E(X_t^* \beta + \epsilon_t|X_t^*) = X_t^* \beta + E(\epsilon_t|X_t^*) = X_t^* \beta$$

Ainsi, l'estimateur $\hat{\beta}$ issu des moindres carrés ordinaires est sans biais :

$$E(\hat{\beta}) = \beta$$

7.2 Démonstration de l'Efficacité

Sous les hypothèses de Gauss-Markov (linéarité, exogénéité, homoscédasticité, absence d'autocorrélation, etc.), l'estimateur OLS est BLUE (Best Linear Unbiased Estimator). Après transformation de Prais-Winsten, ces hypothèses sont satisfaites dans le modèle transformé, ce qui garantit que $\hat{\beta}$ est l'estimateur linéaire sans biais avec la plus petite variance possible.

7.3 Démonstration de la Consistance

La consistance de $\hat{\beta}$ repose sur les conditions suivantes :

— $\frac{1}{T} X^{*'} X^*$ converge vers une matrice définie positive.

— $\frac{1}{T} X^{*'} \epsilon$ converge en probabilité vers zéro.

Sous ces conditions, par le théorème des moindres carrés, $\hat{\beta}$ converge en probabilité vers β.

8 Conclusion

La transformation de Prais-Winsten est une méthode efficace pour corriger l'autocorrélation des erreurs dans un modèle de régression linéaire. En transformant les variables dépendantes et indépendantes, cette méthode permet l'application des moindres carrés ordinaires de manière appropriée, assurant ainsi des estimations fiables des paramètres du modèle. Comparée à la méthode de Cochrane-Orcutt, Prais-Winsten conserve la première observation, ce qui améliore l'efficacité des estimations, surtout dans les petits échantillons.

9 Références

Pour une discussion détaillée sur la transformation de Prais-Winsten et ses propriétés, voir Wooldridge chapitre 8.