



هوش مصنوعی

بهار ۱۴۰۳

استاد: محمدحسین رهبان

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی کامپیوتر

گردآورندگان: پارسا بشری - متین میرزابابائی - پویا لهبی - امیرحسین علمدار

مهلت ارسال: ۴ خرداد

یادگیری ماشین

تمرین چهارم

- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۲۳:۵۹ روز مشخص شده است.
- در طول ترم امکان ارسال با تاخیر پاسخ هر تمرین تا سقف ۴ روز و در مجموع ۱۰ روز، وجود دارد. پس از گذشت این مدت، پاسخ‌های ارسال شده پذیرفته نخواهند بود. همچنین، به ازای هر ساعت تأخیر غیر مجاز ۰.۵ درصد از نمره تمرین به صورت ساعتی کسر خواهد شد.
- تاخیر سوالات نظری و عملی با یکدیگر محاسبه می‌شوند. به عبارتی تاخیر شما در هر تمرین معادل تاخیر بیشتر بین ارسال جواب‌های تئوری و عملی است.
- هم‌کاری و هم‌فکری شما در انجام تمرین مانعی ندارد اما پاسخ‌های ارسال شده هر کس حتماً باید توسط خود او نوشته شده باشد.
- در صورت هم‌فکری و یا استفاده از هر منابع خارج درسی، نام هم‌فکران و آدرس منابع مورد نظر را ذکر کنید.
- لطفاً تصویری واضح از پاسخ سوالات نظری بارگذاری کنید. در غیر این صورت پاسخ شما تصحیح نخواهد شد.
- در کنار هر سوال عددی به عنوان درجه سختی برای مقایسه میزان سختی سوالات و برنامه ریزی بهتر شما برای حل سوالات قرار گرفته است. هر درجه تقریباً معادل ۵ دقیقه وقت برای حل است. این اعداد به هیچ وجه دقیق نیست، اما می‌توانید فرض کنید که اگر سرعتی مشابه درجه سختی‌های داده شده دارید، با اطمینان بالایی در امتحانات به مشکل نخواهید خورد.

سوالات نظری (۹۰ نمره)

۱. (۲۰ نمره، درجه سختی ۸) یک دانشجو که ددلاین تمرین ششم درس‌های یادگیری ماشین و معماری کامپیوترش در یک شب قرار گرفته و فردای آن نیز امتحان درس دیگری را دارد، می‌خواهد با توجه به سه پارامتر تعداد روزهای معین شده برای تحویل تکلیف، درجه سختی تکلیف و کسری از کلاس که تا یک روز قبل از ددلاین تمرین را تحویل داده‌اند، پیش‌بینی کند که کدام تمرین تمدید می‌شود. او می‌خواهد این پیش‌بینی را به کمک درخت تصمیم و با استفاده از داده‌هایی که از پنج تمرین قبلی این دو درس دارد، انجام دهد. اگر هر کدام از این سه پارامتر را به ترتیب با x_1 ، x_2 و x_3 نشان دهیم، داده‌هایی که از ۵ تمرین قبل داریم و همچنین اطلاعات تمرین ششم (که باید خروجی آن را پیش‌بینی کنیم) در جدول زیر دیده می‌شوند:

Machine Learning					Computer Architecture				
HW	x_1	x_2	x_3	y	HW	x_1	x_2	x_3	y
1	6	1	0.4	1	1	7	1	0.3	1
2	8	1	0.6	1	2	6	0	0.7	0
3	7	0	0.6	0	3	8	1	0.1	0
4	5	0	0.5	1	4	5	0	0.4	0
5	8	1	0.5	0	5	7	0	0.1	1
6	7	0	0.55	?	6	8	1	0.4	?

با استفاده از شاخص Information Gain درخت تصمیم را برای هر کدام از درس‌ها بدست آورید و تخمین بزنید که تمرین ششم هر درس تمدید می‌شود یا خیر و از آن نتیجه بگیرید که دانشجو باید کدام تمرین را زودتر شروع کند. برای ساده‌تر شدن محاسبات، بعد از استفاده از هر متغیر در یک گره، آن را کنار گذاشته و در گره‌های بعدی از آن استفاده نکنید. (هر جا حالت $IG(x_i) = IG(x_j)$ پیش آمد که در آن $i < j$ ، متغیر x_i را انتخاب کنید.)

۲. (۱۵ نمره، درجه سختی ۸) فرض کنید یک مسئله‌ی دسته‌بندی^۱ داریم که در آن برجسب^۲ آن (Y) و فیچرهای آن (X_1, X_2, X_3)، متغیرهای بولی هستند. فیچرهای X_1 و X_2 به شرط Y مستقل هستند و همچنین فیچر X_3 ، یک فیچر تکراری از X_2 است. ($X_2 = X_3$) اگر بدانیم:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = 1 | Y = 1) &= p \\ \mathbb{P}(X_1 = 1 | Y = 0) &= 1 - p \\ \mathbb{P}(X_2 = 0 | Y = 1) &= q \\ \mathbb{P}(X_2 = 0 | Y = 0) &= 1 - q \\ \mathbb{P}(Y = 1) &= \mathbb{P}(Y = 0) = 0.5\end{aligned}$$

حال فرض کنید که یک داده تست بدون برجسب به شرح زیر به ما داده شده است:

$$X_1 = 1, X_2 = X_3 = 0$$

حال می‌خواهیم با پیش‌بینی Y ، این داده را طبقه‌بندی کنیم.

(آ) با فرض مدل بیز ساده‌لوحانه، قاعده تصمیم‌گیری را به ازای $Y = 1$ و برحسب p و q بیابید.

(ب) بدون فرض مدل بیز ساده‌لوحانه، قاعده تصمیم‌گیری بهینه را به ازای $Y = 1$ و برحسب p و q بیابید.

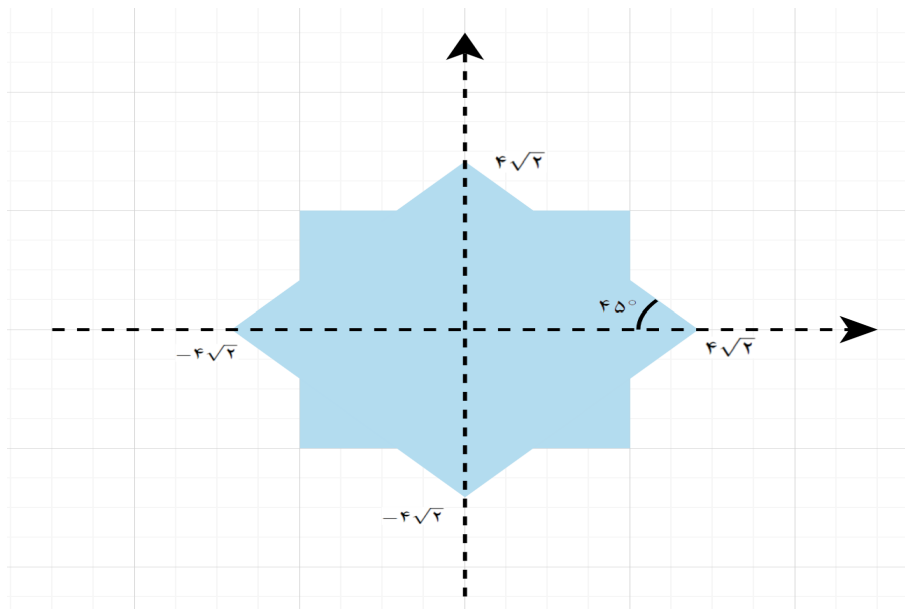
(ج) با فرض آنکه محور افقی q و محور عمودی p باشد، مرز تصمیم‌گیری (آ) و (ب) را در بازه‌ی $(0, 1)$ رسم کرده و مشخص کنید در چه نواحی قاعده‌ی تصمیم‌گیری مدل بیز ساده‌لوحانه نسبت به قاعده‌ی تصمیم‌گیری بهینه دچار خطا می‌شود.

۳. (۱۵ نمره، درجه سختی ۶) در یک روز پائیزی، پارسا و متین در حال سپری کردن زمان استراحت بین کلاس‌هایشان بر روی چمن‌های اکلیلی^۳ هستند که به یکباره بحث تیراندازی به میان کشیده می‌شود! متین ناگهان ایده‌ای به ذهنش خطور می‌کند و پس از مطرح کردن آن با پارسا، با جمله‌ی همیشگی ”آقا!ااا برییم پپرش کنیم!“ روبه‌رو می‌شود.

ایده‌ی متین این است که بتوانیم به کمک یک شبکه عصبی، تشخیص دهیم آیا تیر به محدوده‌ی هدف خورده است یا خیر. متین ابتدا مدل ساده‌لوحانه شکل ۱ از هدف را پیشنهاد می‌کند:

^۱ Classification
^۲ label

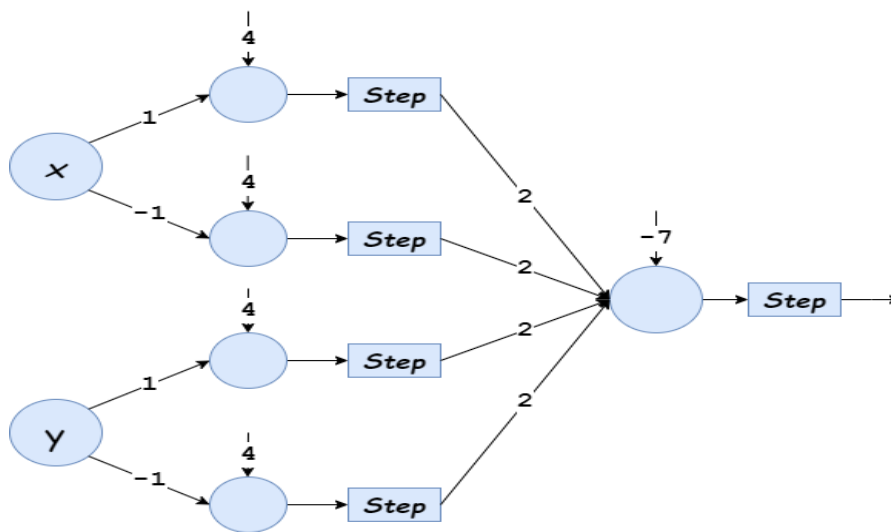
^۳ در گوگل‌مپ عبارت ”اکلیلی“ را سرچ کنید! (لینک)



شکل ۱: خروجی مدل ساده لوحانه هدف (هرخانه یک واحد است و $\sqrt{2} \approx 1/4$)

حال به بخش های زیر پاسخ دهید. (در ابتدا فقط به تابع فعال ساز Step دسترسی داریم.)

(آ) متین و پارسا تصمیم می گیرند طراحی این شبکه عصبی را بین خودشان تقسیم کنند، بنابراین پارسا شبکه شکل ۲ را طراحی کرده است. خروجی شبکه ای که او طراحی کرده است، را مشخص کنید.



شکل ۲: شبکه عصبی طراحی شده توسط پارسا

(ب) حال متین باید باقی شبکه را به کمک طراحی پارسا کامل کند تا به خروجی شکل ۱ برسند. در این خصوص به متین کمک کنید و شبکه مورد نظر را به کمک بخش قبلی طراحی کنید.

(ج) اما خروجی شکل ۱ از شبکه طراحی شده همانطور که مشخص است خیلی ساده لوحانه است! زیرا از یک هدف ایده آل انتظار می رود، شکل و شمایل دایروی داشته باشد. آیا می توانیم چنین دایره بی نقصی طراحی کنیم؟ به کمک روندی که در بخش های قبلی دنبال کردیم، راهی پیشنهاد دهید که مدلی واقع گرایانه تر از هدف بتوانیم طراحی کنیم.

۴. (۲۰ نمره، درجه سختی ۶) همانطور که در کلاس درس یاد گرفته‌اید. مسئله رگرسیون خطی به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$y_i = \sum_{j=1}^m \beta_j x_{ij} + \beta.$$

که در آن هدف مینیمم کردن تابع لاس است. $L = \sum_{i=1}^n (\beta \cdot x_i - y_i)$

الف) مسئله رگرسیون خطی را به شکل ماتریسی بنویسید.

ب) اثبات کنید جواب این مسئله برابر است با $\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y$

ج) در مسئله Ridge Regression برای اینکه ضرایب مقدار زیادی نداشته باشند به تابع لاس یک جمله به شکل $\sum \beta_i^2$ اضافه می‌شود که در نهایت تابع لاس به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$L = \sum_{i=1}^n (\beta \cdot x_i - y_i) + \sum_{i=1}^m \beta_i^2$$

برای این مسئله اثبات کنید که جواب به شکل زیر بدست می‌آید:

$$\hat{\beta} = (X^T X + \lambda I)^{-1} X^T y$$

۵. (۲۰ نمره، درجه سختی ۶)

* نام‌گذاری خاص: $[n]$: the set $\{1, \dots, n\}$ (for $n \in \mathbb{N}$)

در این سوال می‌خواهیم به بررسی الگوریتم پرسپترون برای دسته‌بندی^۴ نیم‌فضاها^۵ بپردازیم:

(آ) از اسلاید های درس به خاطر دارید که الگوریتم پرسپترون (یادگیری پرسپترون)، یک الگوریتم بازگشتی^۶ است که با دریافت یک مجموعه آموزش^۷، طی T تکرار^۸ دنباله‌ای از بردار های وزن $\{w^{(t)}\}_{t=1}^T$ را می‌سازد. (شکل ۱)

Batch Perceptron

input: A training set $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$

initialize: $w^{(1)} = (0, \dots, 0)$

for $t = 1, 2, \dots$

if $(\exists i \text{ s.t. } y_i \langle w^{(t)}, x_i \rangle \leq 0)$ **then**

$w^{(t+1)} = w^{(t)} + y_i x_i$

else

output $w^{(t)}$

شکل ۳: الگوریتم پرسپترون

حال فرض کنید، که $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$ تفکیک پذیر هستند و همچنین اگر داشته باشیم:

Classification^۴
 Halfspaces^۵
 iterative^۶
 Training Set^۷
 iteration^۸

$$B = \min\{\|\mathbf{w}\| : \forall i \in [m], y_i \langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_i \rangle \geq 1\}$$

$$R = \max_i \|\mathbf{x}_i\|$$

نشان دهید آنگاه الگوریتم پرسپترون پس از پیمودن حداکثر $(RB)^2$ تکرار متوقف می‌شود و هر زمان که متوقف شود، خواهیم داشت:

$$\forall i \in [m], y_i \langle \mathbf{w}^{(t)}, \mathbf{x}_i \rangle > 0.$$

(ب) نشان دهید در حالت زیر نیز حکم قسمت (الف) برقرار است:

برای هر عدد صحیح مثبت m ، یک بردار $\mathbf{w}^* \in \mathbb{R}^d$ و یک دنباله داده $\{(\mathbf{x}_i, y_i)\}_{i=1}^m$ وجود دارد بگونه ای که شرایط زیر برقرار باشد:

$$R = \max_i \|\mathbf{x}_i\| \leq 1 \quad \bullet$$

$$\forall i \in [m], y_i \langle \mathbf{w}^*, \mathbf{x}_i \rangle \geq 1, \quad \|\mathbf{w}^*\|^2 = m \quad \bullet$$

دقت کنید که به کمک نمادهای قسمت (الف) خواهیم داشت:

$$B = \min\{\|\mathbf{w}\| : \forall i \in [m], y_i \langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_i \rangle \geq 1\} \leq \sqrt{m}$$

• با اجرای الگوریتم پرسپترون روی این دنباله تا قبل از همگرایی، تعداد m بروزرسانی انجام می‌شود.

* راهنمایی: $d = m$ را انتخاب کرده و به‌ازای هر i ، $\mathbf{x}_i = \mathbf{e}_i$ اختیار کنید.