西南交通大學

Southwest Jiaotong University

自 动 控 制 原 理

第 二 章

控制系统的数学模型

任课教师： 马磊

电气工程学院

2020

本章内容

2.1 引言

2.2 输入/输出模型 – 微分方程

2.3 状态空间方程

2.4 输入/输出模型 – 拉普拉斯变换与传递函数

2.5 系统框图模型

2.6 模型转换

2.1 引言

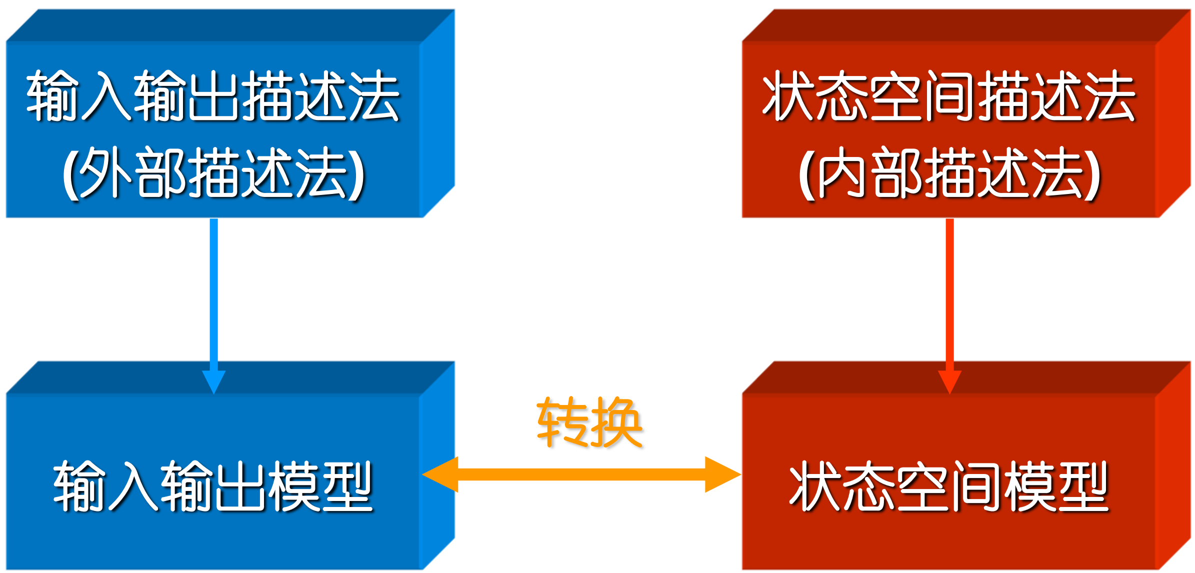
- 数学模型
  - 描述系统的一个数学结构
  - 系统(动态)特性的数学表达式
- 控制系统建模
  - 建立原系统物理模型的数学模型

2.1 引言

- 性质不同的系统用不同的数学工具描述其模型
  - 线性定常系统： 常系数线性常微分方程
  - 线性时变系统： 变系数线性常微分方程
  - 非线性系统： 非线性常微分方程
  - 分布参数系统： 偏微分方程
  - 离散系统： 差分方程

2.1 引言

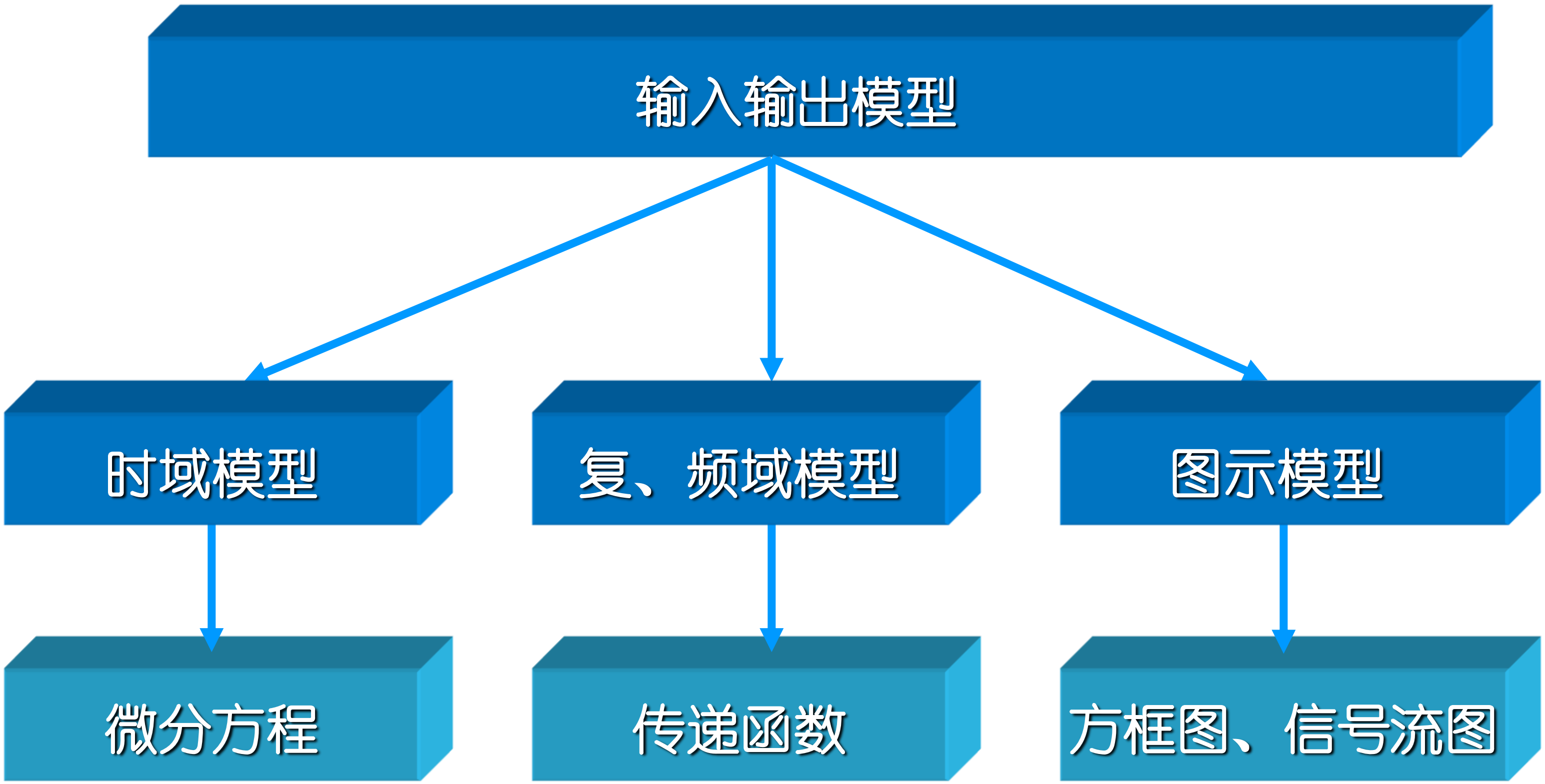
线性控制系统描述方法



线性控制系统数学模型

2.1 引言

线性控制系统输入输出数学模型



2.1 引言

- 建立控制系统数学模型的方法
  - 分析法
  - 实验法

- 数学模型的合理性
  - 在模型的简化性和分析结果的准确性间作折衷考虑

- 线性系统的特点
  - 叠加性
  - 齐次性

2.2 输入输出模型-微分方程

- **输入/输出(I/O)模型**：用系统的输入、输出信号或其变换式所表示的数学模型
  - 时域信号　　$r(t)$，$y(t)$ —— 微分方程（2.2）
  - 复数域信号 $R(s)$，$Y(s)$ —— 传递函数（2.3）
  - 频域信号　　$R(jw)$, $Y(jw)$ —— 频率特性（2.3）

微分方程 – 时域I/O模型

- 描写线性定常系统的微分方程

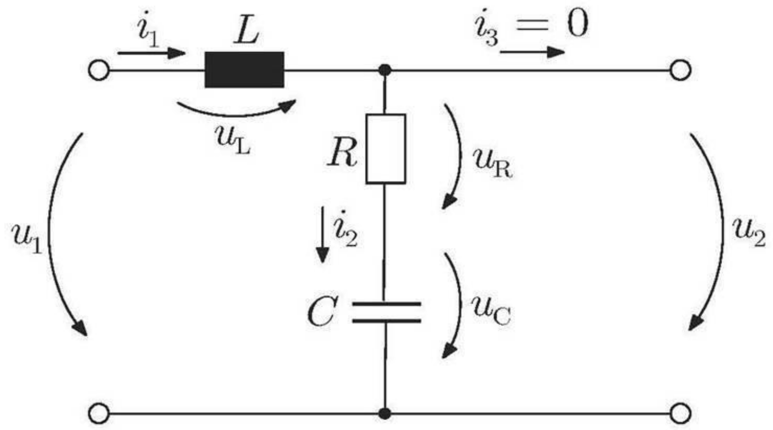
$$a_n\frac{d^n y(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0y(t)$$
$$=b_m\frac{d^m r(t)}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}r(t)}{dt^{m-1}}+\cdots+b_1\frac{dr(t)}{dt}+b_0r(t) \qquad (2.1)$$

$a_i(i=0,1,\cdots,n)$、$b_j(j=0,1,\cdots,m)$均为实数

- 建立微分方程的一般步骤
  - 确定输入$r(t)$和输出 $y(t)$
  - 列写各环节的微分方程
  - 消去中间变量，求得输入/输出关系

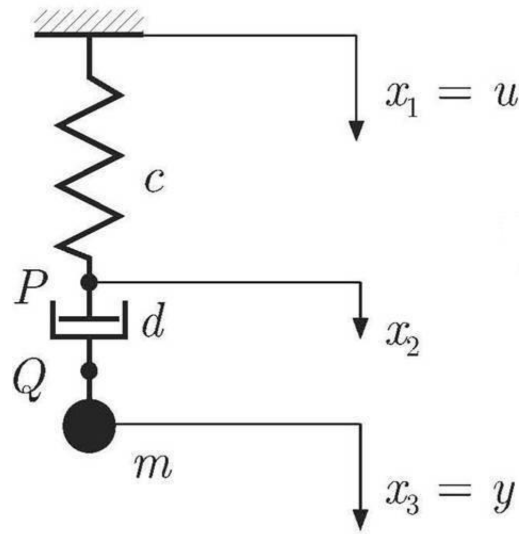
微分方程 例 1

- 串联振荡电路



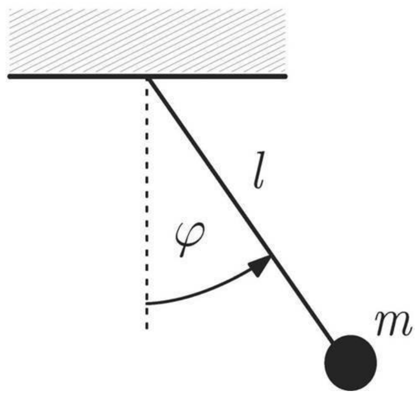
微分方程 例 2

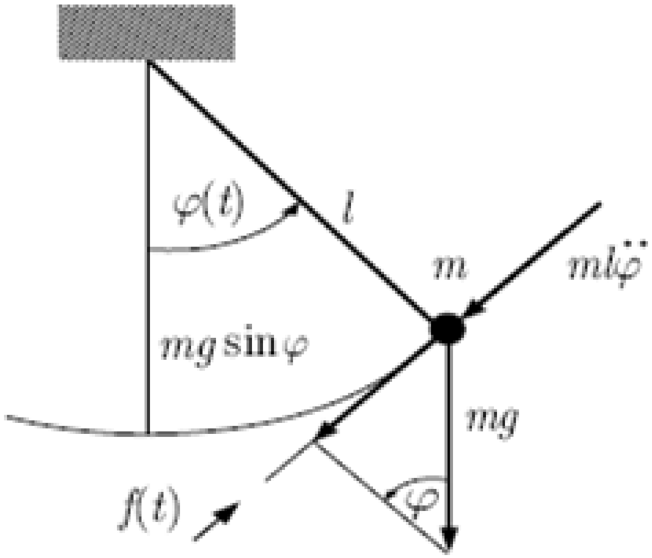
- 机械振荡系统



微分方程 例 3

- 单摆的非线性微分方程





非线性微分方程的线性化

- 设激励$x(t)$与响应$y(t)$之间为非线性关系

$$y(t)=g(x(t)) \tag{2.2}$$

可在工作点x_0处展开成泰勒级数

$$y=g(x)=g(x_0)+\left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=x_0}\frac{(x-x_0)}{1!}+\left.\frac{d^2g}{dx^2}\right|_{x=x_0}\frac{(x-x_0)^2}{2!}+\cdots \tag{2.3}$$

非线性微分方程的线性化

取一次项可得到

$$\Delta y = K\Delta x, \qquad (2.4)$$

其中

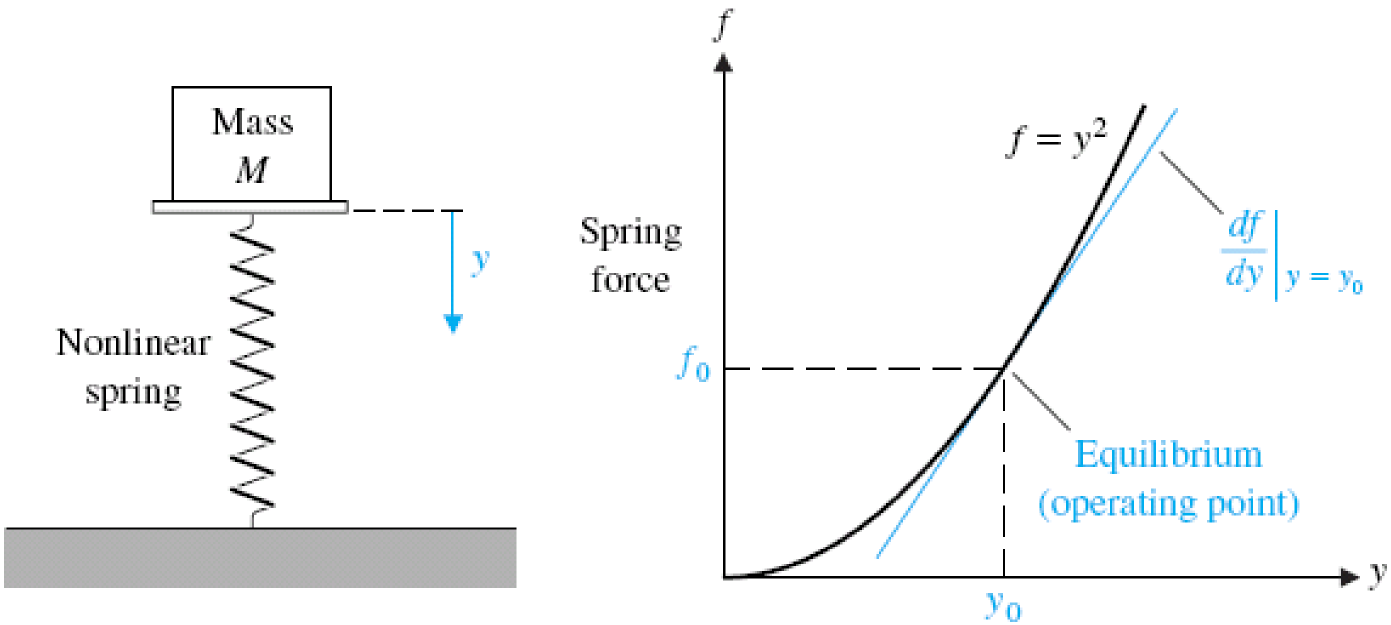
$$\Delta y = y - y_0 = y - g(x_0)$$

$$\Delta x = x - x_0$$

$$K = \left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=x_0}$$

这种线性化是针对的“非本质”非线性数学模型，在工作点附近的小信号分析。

非线性微分方程的线性化



非线性弹簧的弹力与位移的关系为

$$\Delta f = m\Delta y$$

微分方程的解

- 一阶微分方程的解
- 二阶微分方程的解
- 高阶微分方程的解 – 困难！

2.3 状态空间模型（方程）

- 高阶微分方程的解 – 困难！
- 状态空间方程 – 一阶线性微分方程组
  - 求解容易
  - 用向量和矩阵形式表达
  - 适合用计算机求解

-- 二战后，由航空航天技术应用推动，随着计算机技术的飞速发展而被广泛接受

状态空间基本概念

- 状态: 动态系统的状态是系统的最小一组变量（称为状态变量），只要知道了在时刻$t= t_0$的一组变量和时刻$t > t_0$的输入量，就能够完全确定系统在任何时间时刻的行为
- 状态变量: 动态系统的状态变量是确定动态系统状态的最小一组变量
- 状态向量: 如果完全描述一个给定的系统的行为需要n个状态变量，那么这n个状态变量可以看成是向量x的n个分量，这个向量就称为状态向量
- 状态空间: 系统的全部可能状态的集合

线性定常系统的状态空间表达式

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)\end{aligned} \tag{2.5}$$

$t \geq 0, x_0 = x(0)$　(初始条件)

$\mathbf{x} \in R^n$状态向量，$\mathbf{u} \in R^m$输入向量，$\mathbf{y} \in R^q$输出向量

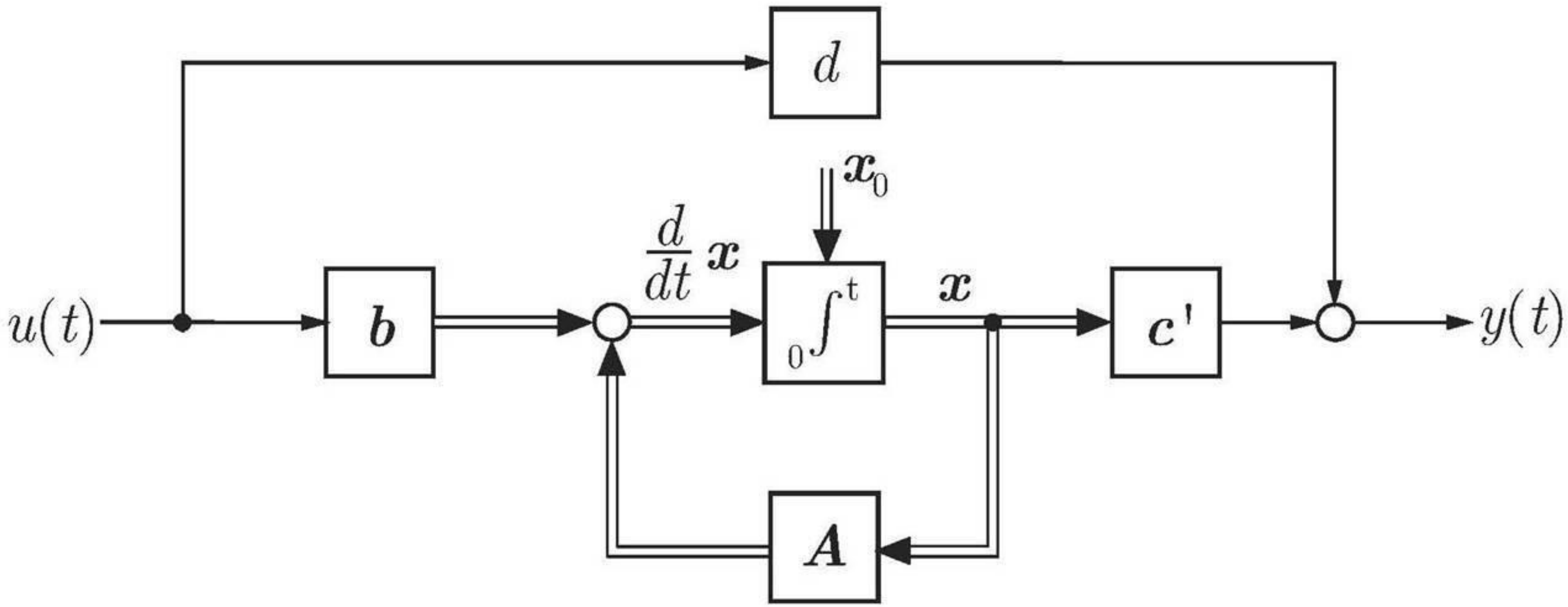
$\mathbf{A} \in R^{n \times n}$，状态矩阵

$\mathbf{B} \in R^{n \times m}$，控制矩阵(输入矩阵)

$\mathbf{C} \in R^{q \times n}$，输出矩阵

$\mathbf{D} \in R^{q \times m}$，前馈矩阵

图示

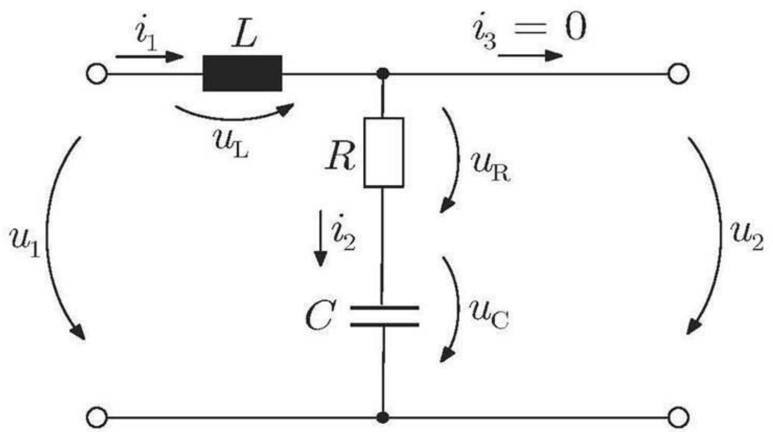


备注

- 选择状态变量必须要满足
  - 选择最小的状态变量为状态向量的元素。这些最少的状态变量可以充分地完全描述系统的状态
  - 状态向量的元素必须是线性无关的
- 通过对状态微分方程的分析可以发现
  - 状态空间表达式是系统的一种完全描述，其核心是状态方程
  - 系统的状态空间表达式不是唯一的

状态空间方程 例

- 串联振荡电路



求取状态空间方程

- 由系统物理特性直接求取
- 由微分方程求取：若 m=0，即

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = u(t) \qquad (2.6)$$

令

$$\begin{cases} x_1 = y(t) \\ x_2 = \dfrac{dy(t)}{dt} \\ x_3 = \dfrac{d^2y(t)}{dt^2} \\ \quad\vdots \\ x_n = \dfrac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} \end{cases}$$

有

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{dy(t)}{dt} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{d^2y(t)}{dt^2} = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = \dfrac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} = x_n \\ \dot{x}_n = \dfrac{d^n y(t)}{dt^n} = -a_0x_1 - a_1x_2 - \cdots - a_{n-1}x_n + u(t) \end{cases}$$

求取状态空间方程

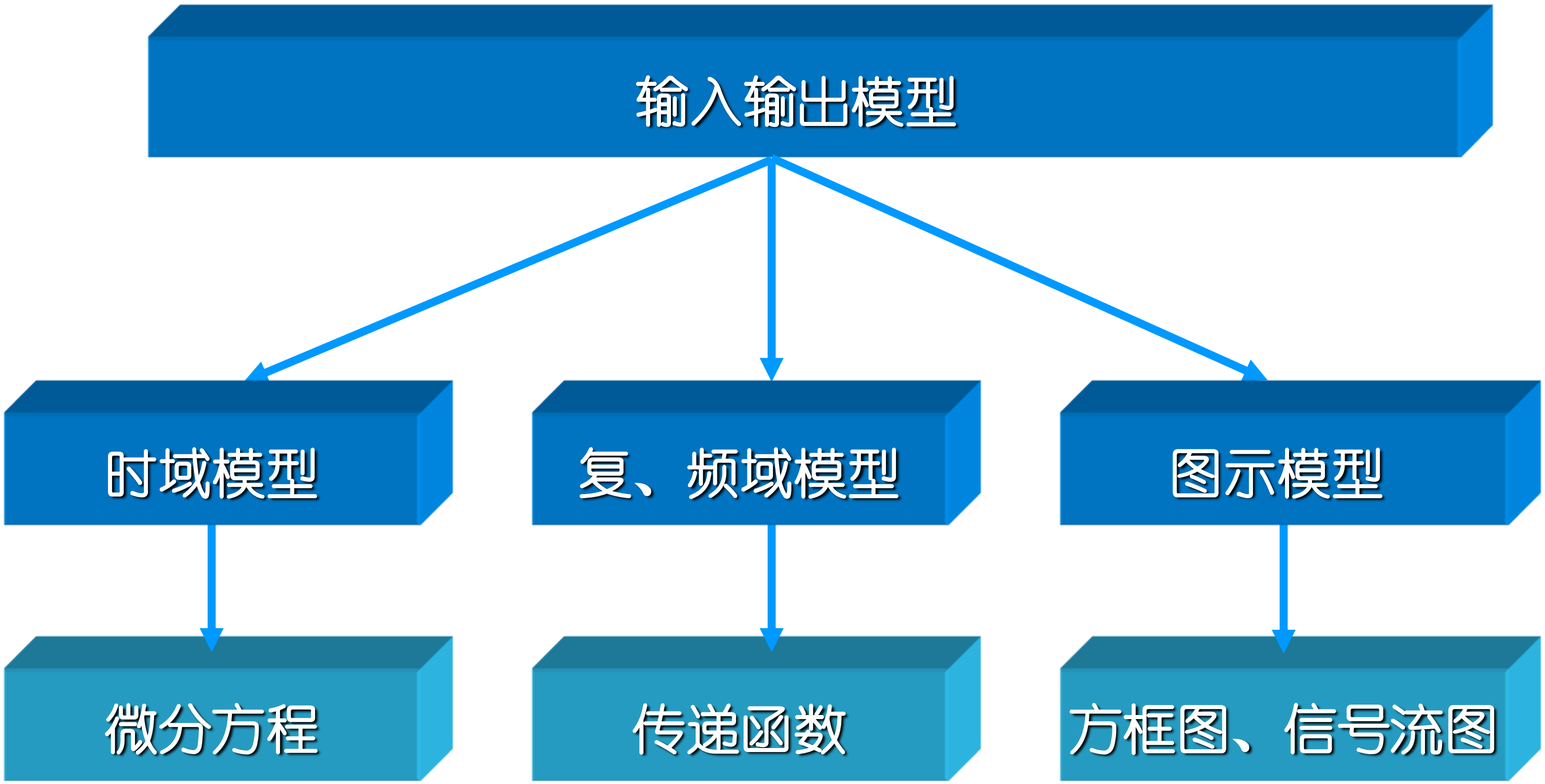
可得

$$
\begin{cases}
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u & (2.7) \\
y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} & (2.8)
\end{cases}
$$

若 m不为0，则根据不同状态变量选取，
系统的状态空间表达不唯一 （2.6 节）

2.4 输入/输出模型 – 传递函数

线性控制系统输入输出数学模型



信号频率与系统响应

- 下列线性定常系统对不同频率信号产生不同衰减 – 有必要研究系统响应与信号频率的关系！

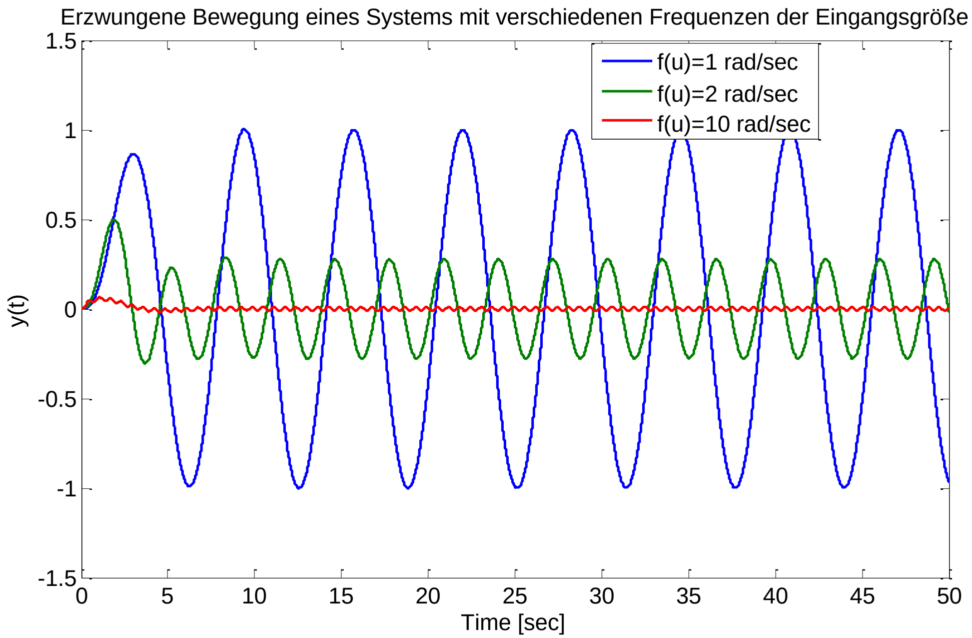
System:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$c' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$d = 0$$



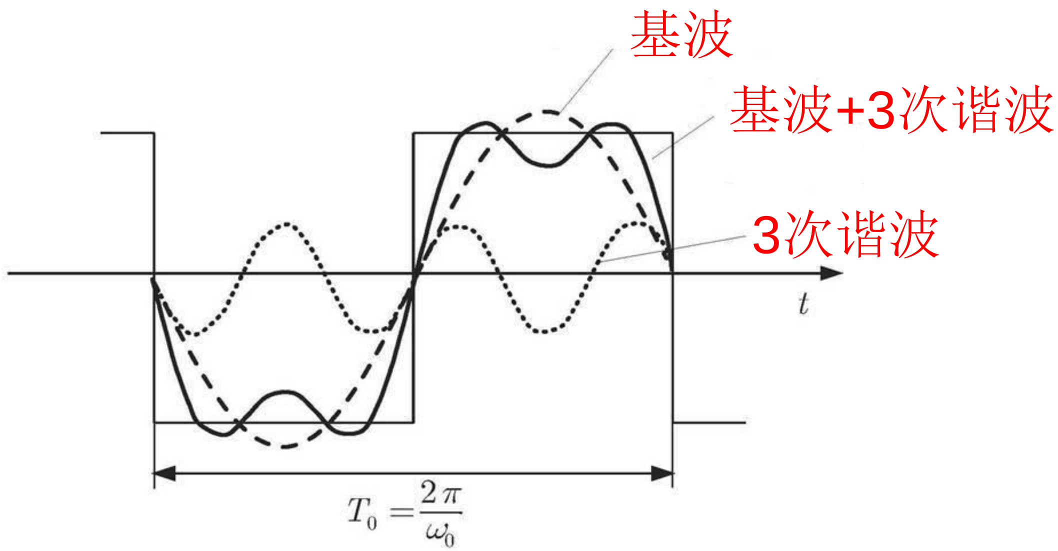
传递函数与微分方程

- 引入复变量 s，将系统响应特征与信号频率联系起来，可深入分析系统性能
- 将时域中的微分方程转化为频率域中的代数方程，便于求解
- 数学工具：拉普拉斯变换

Pierre-Simon marquis de *Laplace*
（1749-1827）
法国数学家和天文学家

2.4.1 拉普拉斯变换

- 信号分解 – 傅立叶变换 $F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-j\omega t}\, dt.$



Jean B. J. Fourier
法国数学家
(1768-1830)

存在条件 -- Dirichlet条件 *以及*

$$\int_{T_0}^{-T_0} |f(t)|\, dt < \infty.$$

→ 实践中经常得不到满足！

例子： 直流信号

拉普拉斯变换的思想

引入 $\tilde{f}(t) = f(t)\,\mathrm{e}^{-\delta t}, \qquad \delta \geq 0$

若δ足够大且|*f*(*t*)|之增强速度低于指数函数，则下式成立

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(t)|\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,\mathrm{e}^{-\delta t}\,dt < \infty$$

令 $s = \delta + j\omega$

有拉普拉斯变换 $F(s) = \int_{-0}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,dt.$

$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$

$F(s) \bullet\!\!-\!\!\circ f(t).$

可见，拉普拉斯变换将信号分解为以指数速度衰减/增加的正弦信号之和（积分）： $e^{\delta + j\omega} = e^{\delta} e^{j\omega} = e^{\delta}\sin\omega t$

拉普拉斯反变换 $f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\delta - j\infty}^{\delta + j\infty} F(s)\,\mathrm{e}^{st}\,ds.$

拉普拉斯变换的性质

- 线性性质 $L[f_1(t)\pm f_2(t)]=F_1(s)\pm F_2(s)$
- 导数性质

$$L[\frac{df(t)}{dt}]=sF(s)-f(0)$$

$$L[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}]=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$$

$$\vdots$$

$$L[\frac{d^n f(t)}{dt^n}]=s^nF(s)-\sum_{k=1}^{n}s^{n-k}f^{(k-1)}(0)$$

$$f^{(k-1)}(t)=\frac{d^{k-1}f(t)}{dt^{k-1}}$$

- 积分性质

$$L[\int f(t)dt]=\frac{F(s)}{s}+\frac{[\int f(t)dt]_{t=0}}{s}$$

$$L[\iint f(t)(dt)^2]=\frac{F(s)}{s^2}+\frac{[\int f(t)dt]_{t=0}}{s^2}+\frac{[\iint f(t)(dt)^2]_{t=0}}{s}$$

$$\vdots$$

$$L[\overbrace{\int\cdots\int}^{\text{共}n\text{个}} f(t)(dt)^n]=\frac{F(s)}{s^n}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{s^{n-k+1}}[\overbrace{\int\cdots\int}^{\text{共k个}} f(t)(dt)^n]_{t=0}$$

拉普拉斯变换的性质

- 衰减定理（或称频域平移定理）

$$L[f(t)e^{-at}] = F(s+a)$$

- 延迟性质（或称时域平移定理）

$$L[f(t-T)1(t-T)] = e^{-Ts}F(s)$$

- 终值定理

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

- 初值定理

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

- 卷积性质

$$L[\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau] = L[\int_0^t f_1(t)f_2(t-\tau)d\tau] = F_1(s)F_2(s)$$

常用函数的拉普拉斯变换

常用函数的拉氏变换表

序号	拉氏变换 E(s)	时间函数 e(t)
1	1	$\delta(t)$
2	$\dfrac{1}{1-e^{-Ts}}$	$\delta_T(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)$
3	$\dfrac{1}{s}$	$1(t)$
4	$\dfrac{1}{s^2}$	t
5	$\dfrac{1}{s^3}$	$\dfrac{t^2}{2}$
6	$\dfrac{1}{s^{n+1}}$	$\dfrac{t^n}{n!}$
7	$\dfrac{1}{s+a}$	e^{-at}
8	$\dfrac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}
9	$\dfrac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$
10	$\dfrac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-at}-e^{-bt}$
11	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$
12	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$
13	$\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$
14	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$
15	$\dfrac{1}{s-(1/T)\ln a}$	$a^{t/T}$

2.4.1 传递函数

- 线性定常系统的传递函数

微分方程模型:

$$a_n\frac{d^n y(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0y(t)$$
$$=b_m\frac{d^m r(t)}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}r(t)}{dt^{m-1}}+\cdots+b_1\frac{dr(t)}{dt}+b_0r(t) \qquad (2.1)$$

$a_i(i=0,1,\cdots,n)$、$b_j(j==0,1,\cdots,m)$均为实数

取Laplace变换(零初始条件)，可得

$$(a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0)Y(s)$$
$$=(b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1s+b_0)R(s) \qquad (2.5)$$

其中 $Y(s)=\mathcal{L}[y(t)]$, $R(s)=\mathcal{L}[r(t)]$

传递函数

$$G(s) \overset{def}{=} \left.\frac{Y(s)}{R(s)}\right|_{\text{零初始条件}} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \qquad (2.6)$$

- 传递函数反映系统“零状态”响应的传递关系；表明了系统数学模型的阶次n，它表征着系统的固有特性，与输入$r(t)$的形式无关；
- 传递函数是研究线性系统动态特性的重要工具。利用Laplace变换给出的传递函数$G(s)$是最常见的形式；

传递函数

- 传递函数G(s)也常用以下形式表示：

$$G(s)=\frac{b_0}{a_0}\frac{d_m s^m+d_{m-1}s^{m-1}+\cdots+d_1 s+1}{c_n s^n+c_{n-1}s^{n-1}+\cdots+c_1 s+1}=K\frac{\prod_{i=1}^{m}(T_i s+1)}{\prod_{j=1}^{n}(\tau_j s+1)} \tag{2.7}$$

其中，K—系统增益或传递系数

$$G(s)=\frac{b_m}{a_n}\frac{s^m+h_{m-1}s^{m-1}+\cdots+h_1 s+h_0}{s^n+l_{n-1}s^{n-1}+\cdots+l_1 s+l_0}=K_g\frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)} \tag{2.8}$$

其中，$-z_i$—系统零点　　$-p_j$—系统极点

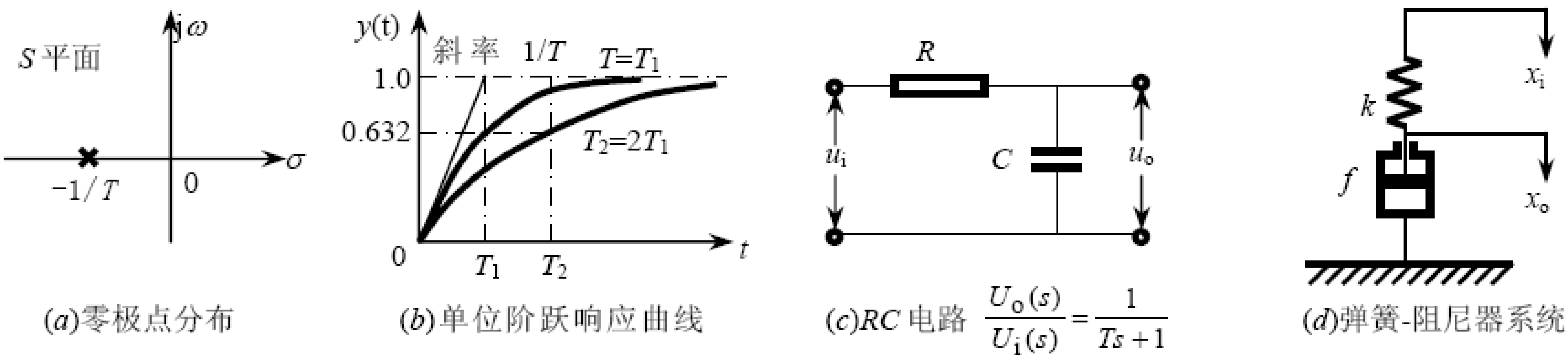
2.4.2 典型环节的传递函数

- 惯性环节
- 积分环节
- 振荡环节
- 微分环节
- 比例环节
- 时滞环节

惯性环节

$$G(s)=\frac{1}{Ts+1} \qquad (2.10)$$

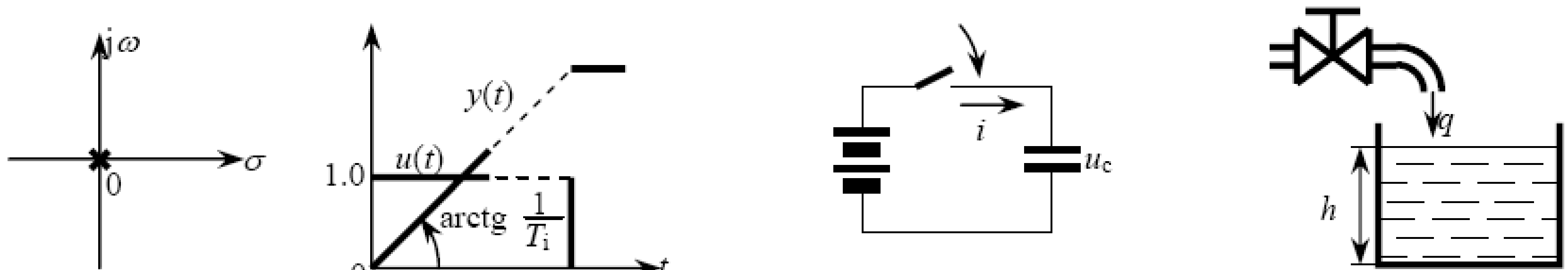
其中, T—惯性环节时间常数



积分环节

$$T_i \frac{dy(t)}{dt} = r(t) \qquad (2.11)$$

其中, T_i—积分时间常数



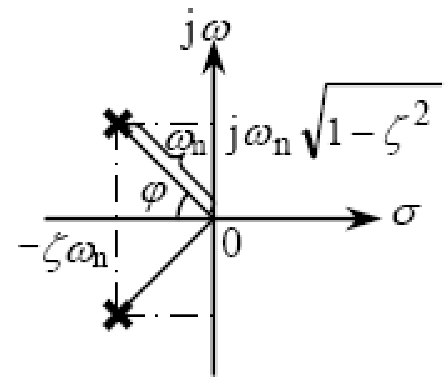
(a)零极点分布　(b)单位阶跃响应曲线　(c)电容器充电 $\frac{U_c(s)}{I(s)}=\frac{1}{Cs}$　(d)水箱 $\frac{H(s)}{Q(s)}=\frac{1}{Cs}$

振荡环节

$$T^2\frac{d^2y(t)}{dt^2}+T\zeta\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=r(t),0<\zeta<1 \qquad (2.13)$$

该二阶系统具有一对共轭复数极点

$$-p_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$



(a)零极点分布

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$=\frac{\omega_n^2}{(s+p_1)(s+p_2)},\omega_n=\frac{1}{T} \qquad (2.14)$$

振荡环节

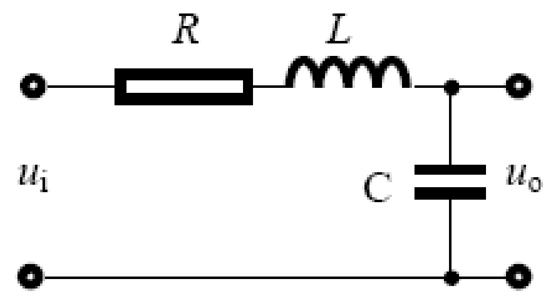
$$G(s)=\frac{1}{Ts^2+2\zeta Ts+1}, \qquad (2.15)$$

其中:

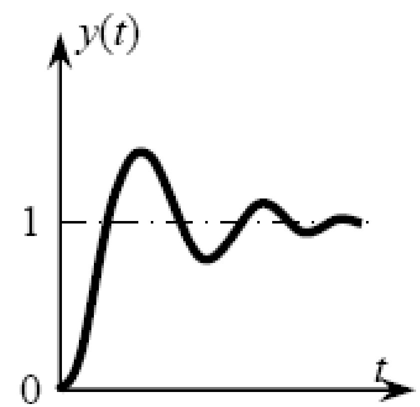
$T=\dfrac{1}{\omega_n}$为时间常数

ζ 为阻尼比,

ω_n为无阻尼自然振荡角频率



(c)RLC 串联电路



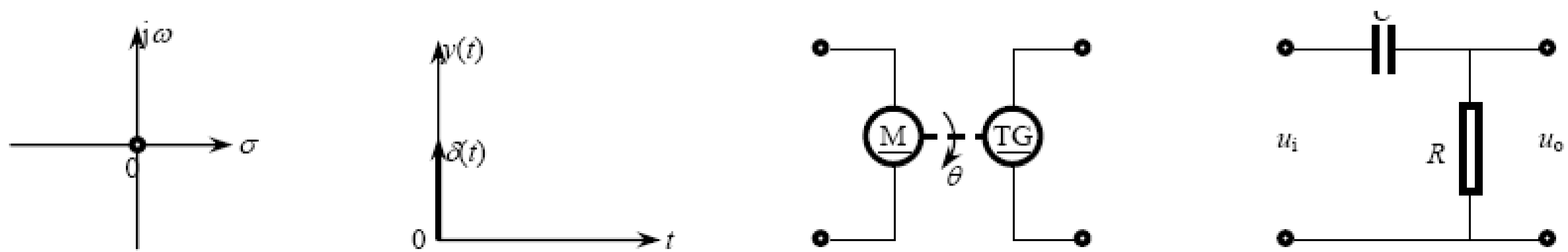
(b)单位阶跃响应曲线

微分环节

$$y(t) = T_d \frac{dr(t)}{dt} \qquad (2.16)$$

$$G(s) = T_d s \qquad (2.17)$$

理想微分环节的传递函数不是真有理分式，工程实现较为困难，工程上常采用具有惯性环节的微分环节



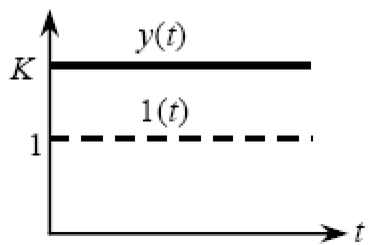
(a)零极点分布 (b)单位阶跃响应曲线 (c)安装在电动机轴上的测速发电机 (d)RC 电路

比例环节

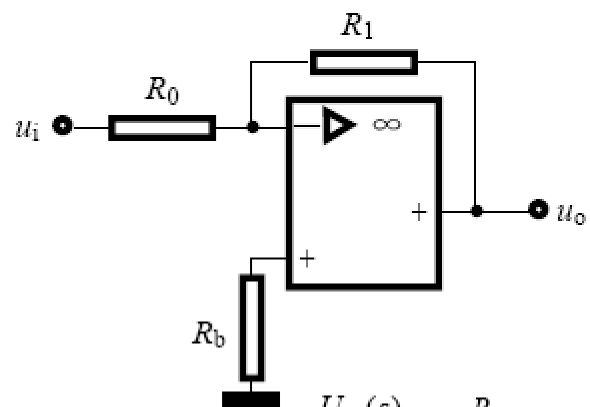
$$G(s) = K_p \tag{2.18}$$

$$y(t) = K_p r(t) \tag{2.19}$$

其中, K_p—比例系数增益



(a)单位阶跃响应曲线

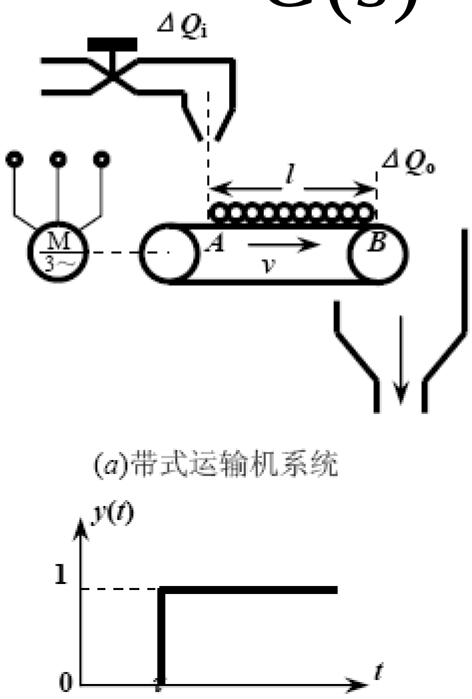


(b)比例调节器 $\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = -\frac{R_1}{R_0}$

时滞环节

$$y(t) = r(t-\tau)1(t-\tau) \qquad (2.20)$$

$$G(s) = e^{-\tau s} \qquad (2.21)$$

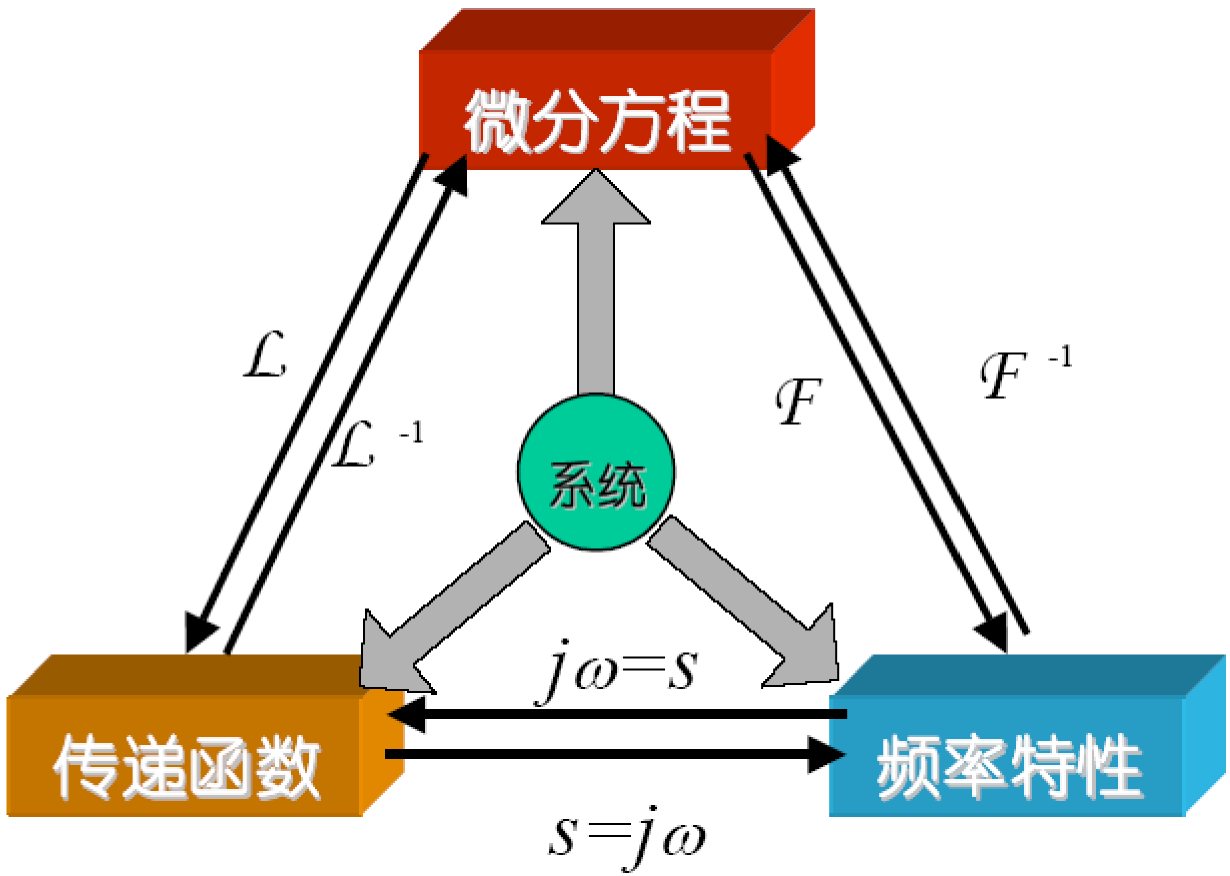


(a)带式运输机系统

(b)单位阶跃响应曲线

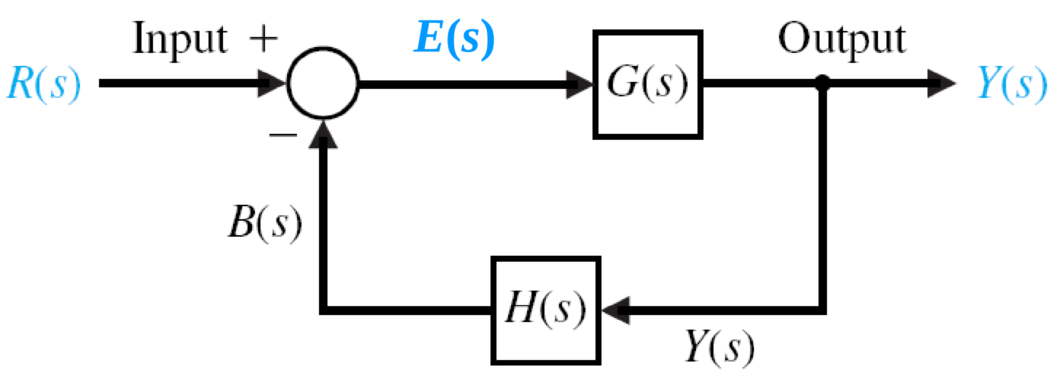
实际控制系统的传递函数均可视为上述典型环节的某种组合,因此熟悉和掌握典型环节对于分析研究系统是很基本的,也是很重要的

三种I/O模型之间的关系



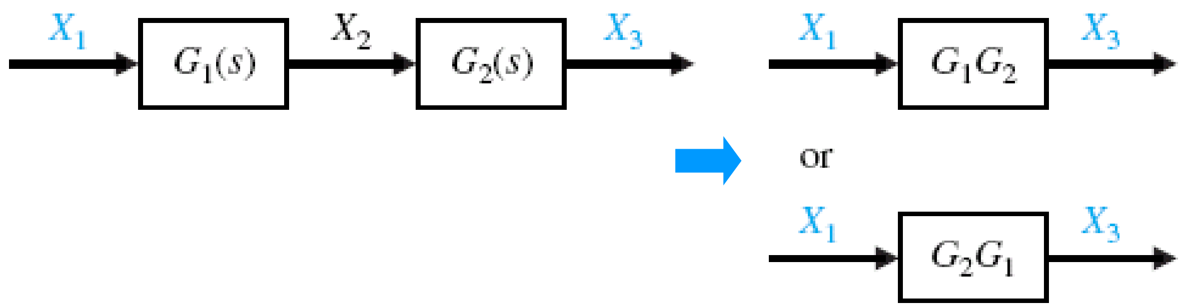
2.5 框图模型

- 系统结构图：就是系统的函数方框图，是系统中各环节的传函功能和信号流向的图解表示，是一种图形化的数学模型。
- 每个环节用方框图表示，框中表明其传函，根据信号的传递关系将各环节框图连接起来，即得到系统结构图，如

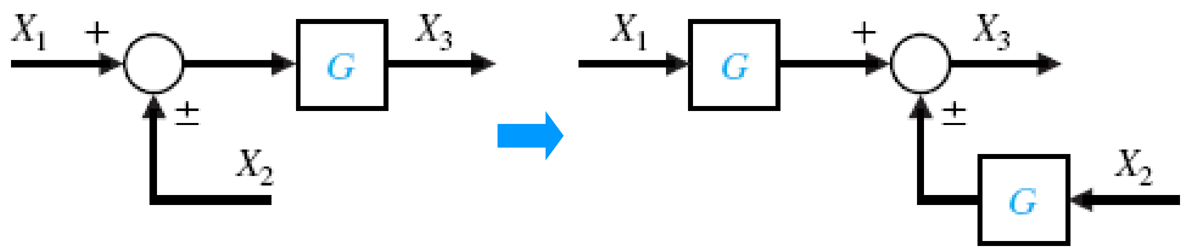


框图的基本变换

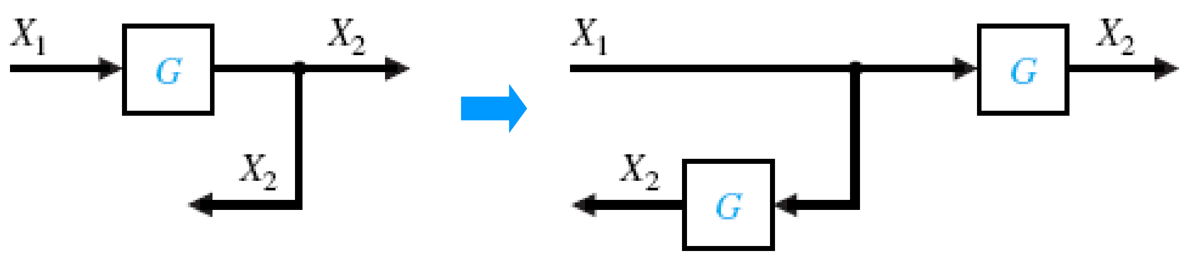
- 原则：输出、输入信号不变(端口条件不变)
- 合并串联方框



- 相加点后移

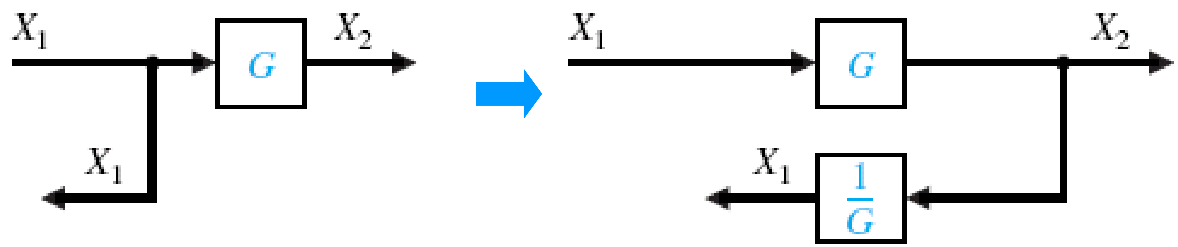


- 分支点前移

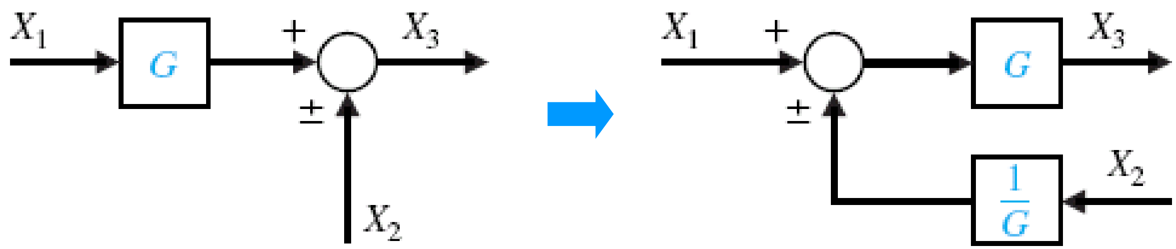


框图的基本变换

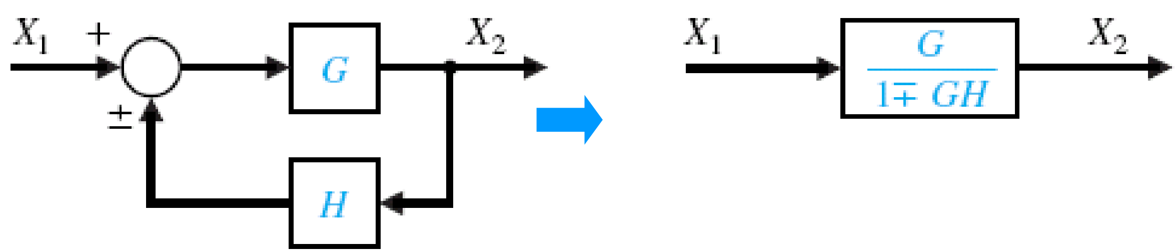
- 分支点后移



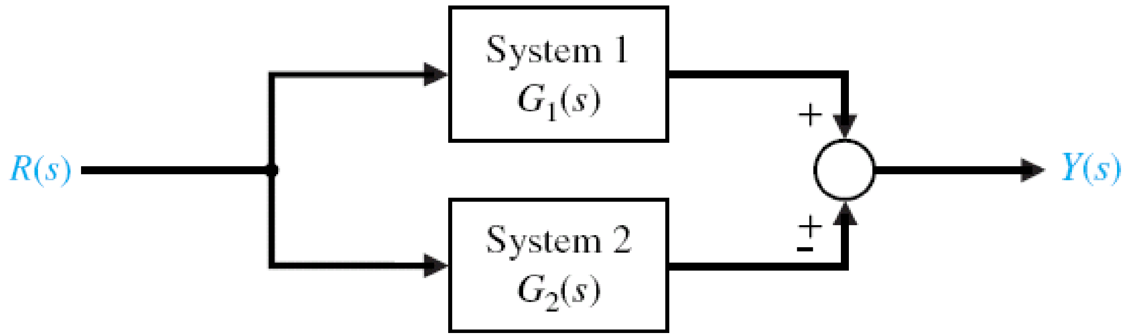
- 相加点前移

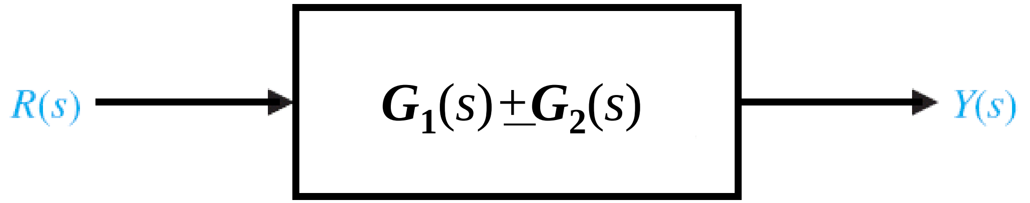


- 消去反馈回路

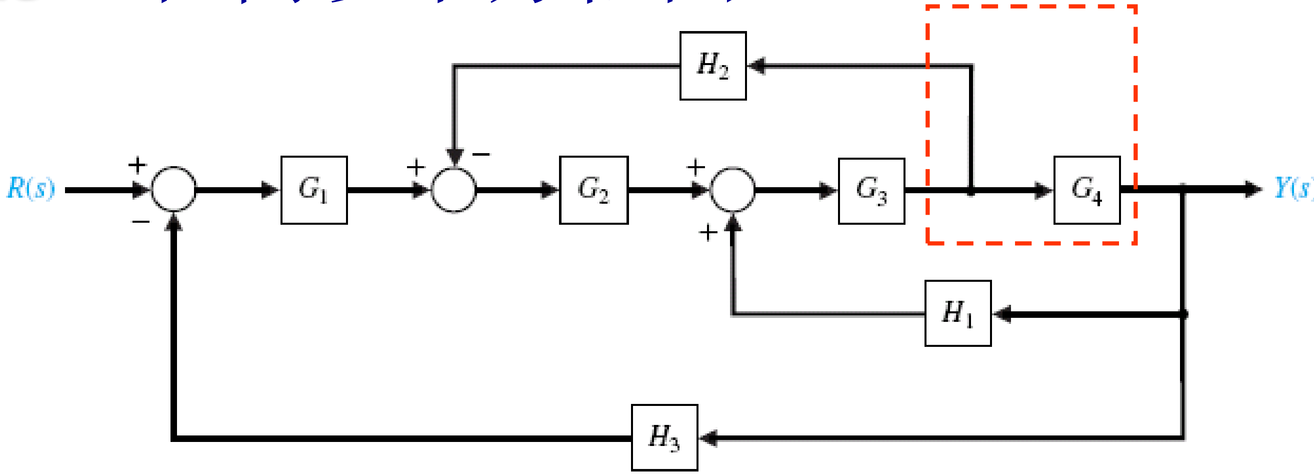


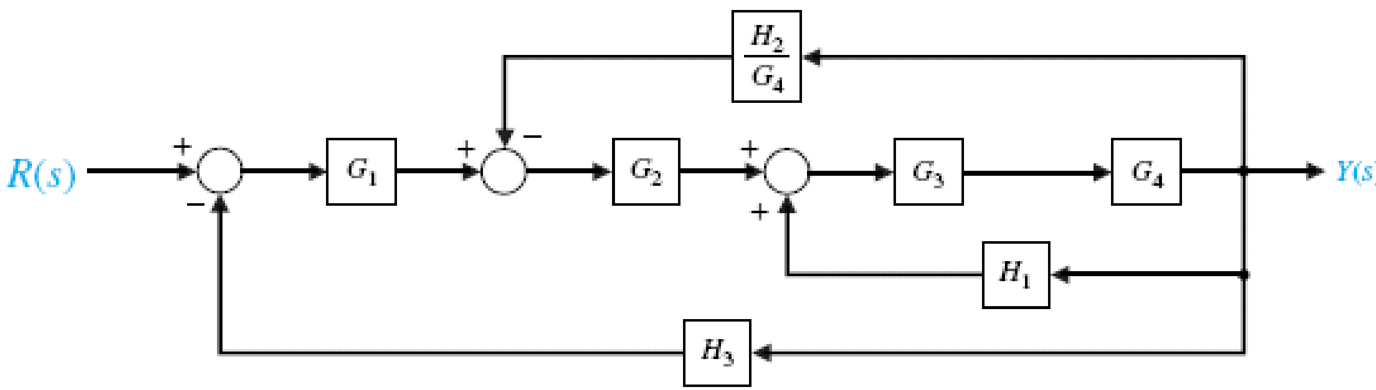
<例2.2> 化简并联方框图

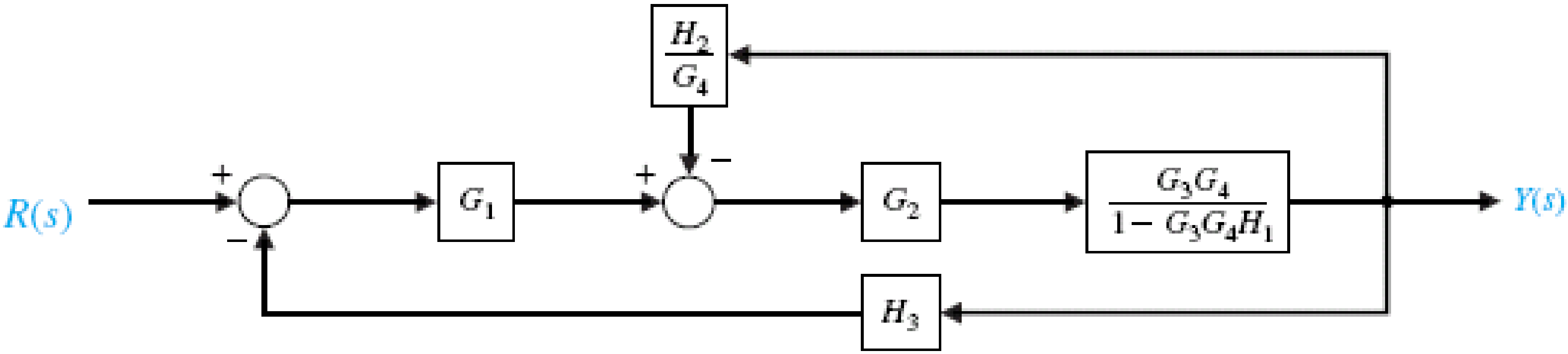


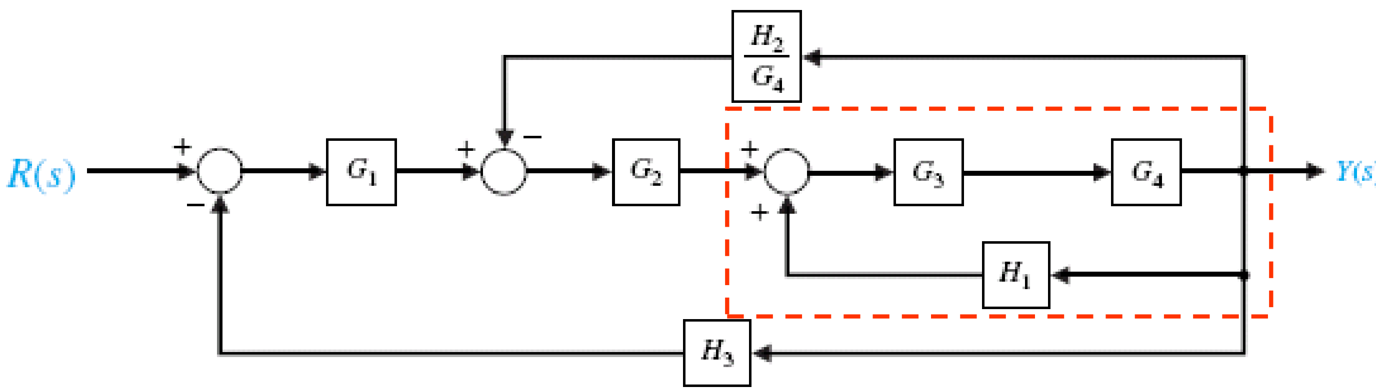


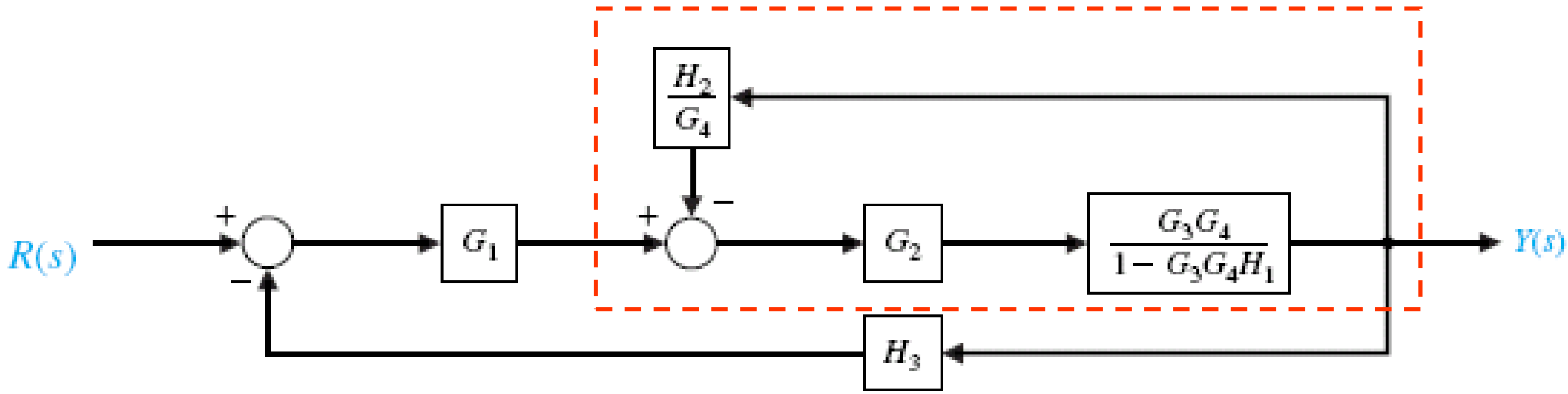
<例2.3> 化简以下方框图

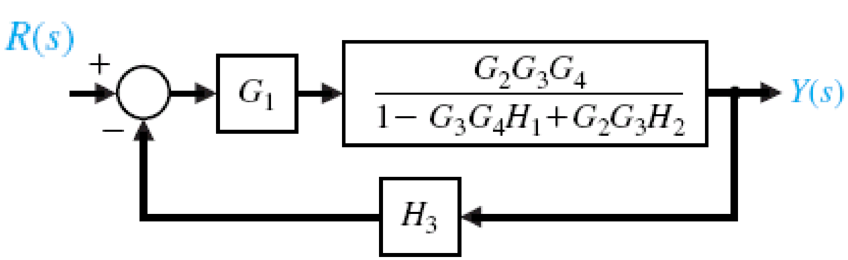


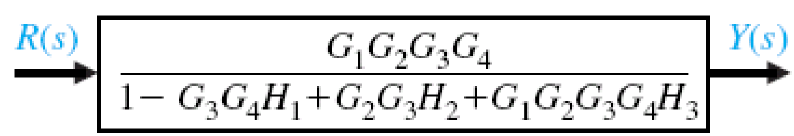



$\frac{H_2}{G_4}$
$R(s)$
G_1
G_2
$\frac{G_3G_4}{1-G_3G_4H_1}$
$Y(s)$
H_3


$\frac{H_2}{G_4}$
$R(s)$
G_1
G_2
G_3
G_4
$Y(s)$
H_1
H_3

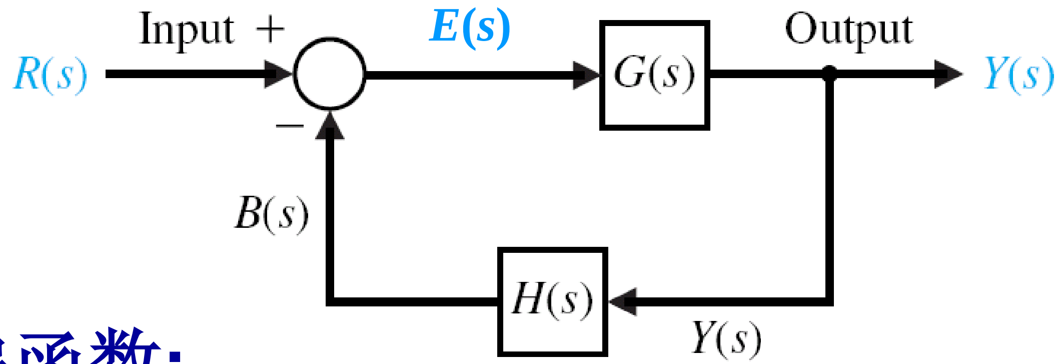

R(s)
+
−
G1
+
−
H2/G4
G2
G3G4/(1− G3G4H1)
Y(s)
H3


R(s)
+
−
G1
G2G3G4/(1− G3G4H1+G2G3H2)
Y(s)
H3


R(s)
G1G2G3G4/(1− G3G4H1+G2G3H2+G1G2G3G4H3)
Y(s)

反馈控制系统的传递函数

负反馈控制系统的典型结构图



等效传递函数:

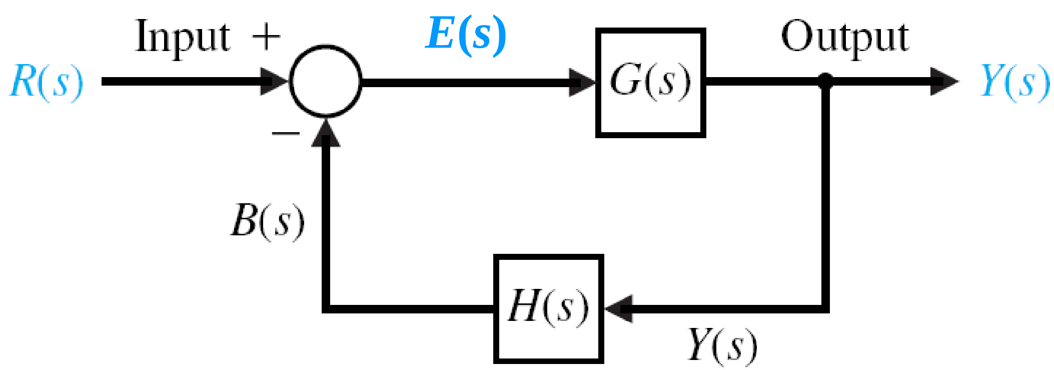
$$B(s) = H(s)Y(s)$$

$$E(s) = R(s)\text{-}B(s) = R(s)\text{-}H(s)Y(s)$$

$$Y(s) = G(s)E(s)= G(s)[R(s)\text{-}H(s)Y(s)]$$

$$[1+ G(s)H(s)]Y(s)= G(s)R(s)$$

反馈控制系统的传递函数



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$ 闭环传递函数

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = G(s)$$ 前向传递函数

$$\frac{B(s)}{E(s)} = G(s)H(s)$$ 开环传递函数

2.6 模型转换

- 由状态空间模型转换为传递函数(阵)
- n阶线性定常系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

- 考虑零初始条件，利用Laplace变换，有：

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \qquad (2.28)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \qquad (2.29)$$

- 由2.28式可得：

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \qquad (2.30)$$

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) \qquad (2.31)$$

- (2.31)代入到(2.29)得到：

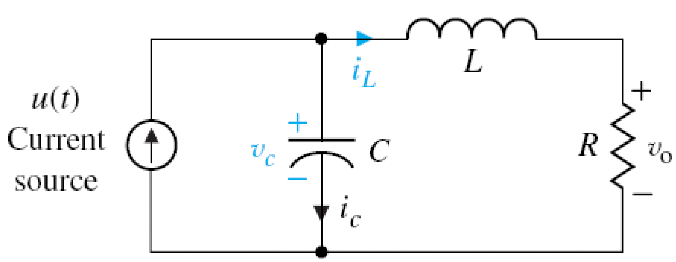
$$\mathbf{Y}(s)=\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)+\mathbf{D}\mathbf{U}(s)$$
$$=[\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}]\mathbf{U}(s)$$

$\boxed{\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}}$ 称为传递函数矩阵

对于单输入单输出的系统, $U(s)$,$Y(s)$是标量，则传递函数为：

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+D \qquad (2.32)$$

<例2.6> 下图RLC网络，由系统状态转移矩阵推导系统传递函数



$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -\dfrac{1}{C}\\ \dfrac{1}{L} & -\dfrac{R}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{1}{C}\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]=\begin{bmatrix}s & \dfrac{1}{C}\\ -\dfrac{1}{L} & (s+\dfrac{R}{L})\end{bmatrix}$$

$$[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}=\frac{adj(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}$$

$$=\frac{1}{s^2+\dfrac{R}{L}s+\dfrac{1}{LC}}\begin{bmatrix}(s+\dfrac{R}{L}) & -\dfrac{1}{C}\\ \dfrac{1}{L} & s\end{bmatrix}$$

$$G(s)=\mathbf{C}[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{(s+\frac{R}{L})}{\Delta(s)} & \dfrac{-\frac{1}{C}}{\Delta(s)}\\ \dfrac{1}{L\Delta(s)} & \dfrac{s}{\Delta(s)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{C}\\ 0\end{bmatrix}$$

$$=\frac{R/LC}{s^2+\dfrac{R}{L}s+\dfrac{1}{LC}}$$

由传递函数转换为状态空间模型

由状态空间模型可以唯一的转换为一个传递函数(阵)；由传递函数转换为状态空间模型，称为系统的实现问题。由于状态量选择的多样性，对于一个传递函数(阵)，系统地实现是不唯一的。这里给出一种“能控规范型”的实现形式。

- 当传递函数的分子为多项式，m<n

考虑下面一个n阶系统的传递函数:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0} \tag{2.37}$$

$$=\frac{1}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}\left[b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0\right]$$

参考第1步，令

$$\frac{X_1(s)}{U(s)}=\frac{1}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0} \tag{2.38}$$

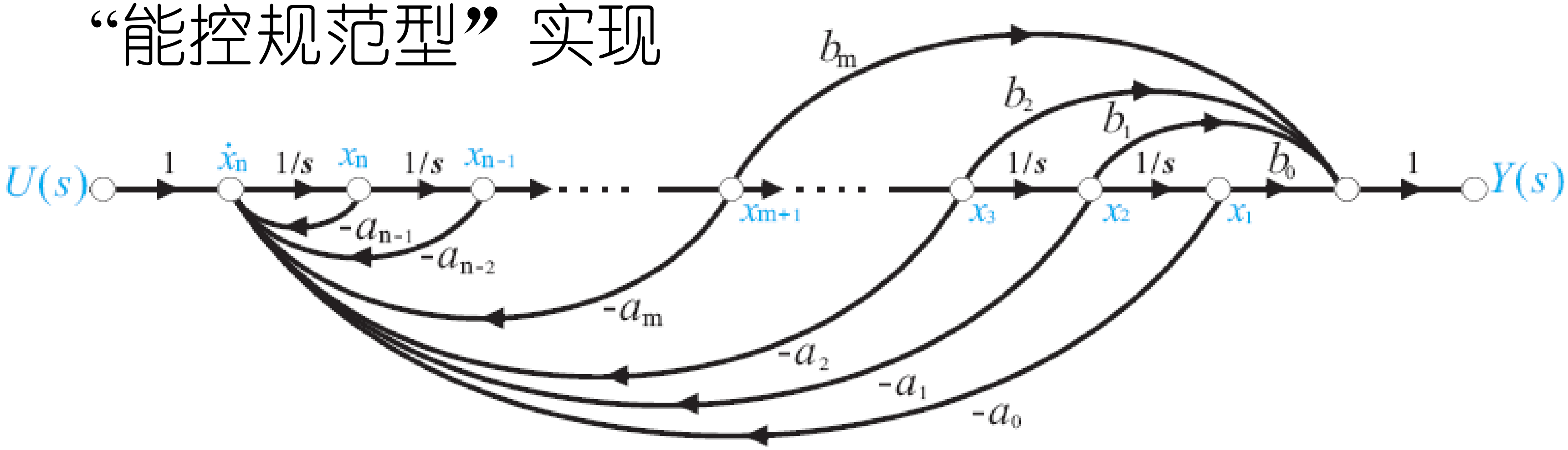
$$Y(s)=X_1(s)\left[b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0\right] \qquad (2.39)$$

运用拉普拉斯反变换得到：

$$y(t)=b_m\frac{d^m x_1}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}x_1}{dt^{m-1}}+\cdots+b_1\frac{dx_1}{dt}+b_0 x_1 \qquad (2.40)$$

$$=b_0x_1+b_1x_2+\cdots+b_{m-1}x_m+b_mx_{m+1}$$

“能控规范型” 实现



由图可写出系统状态微分方程为

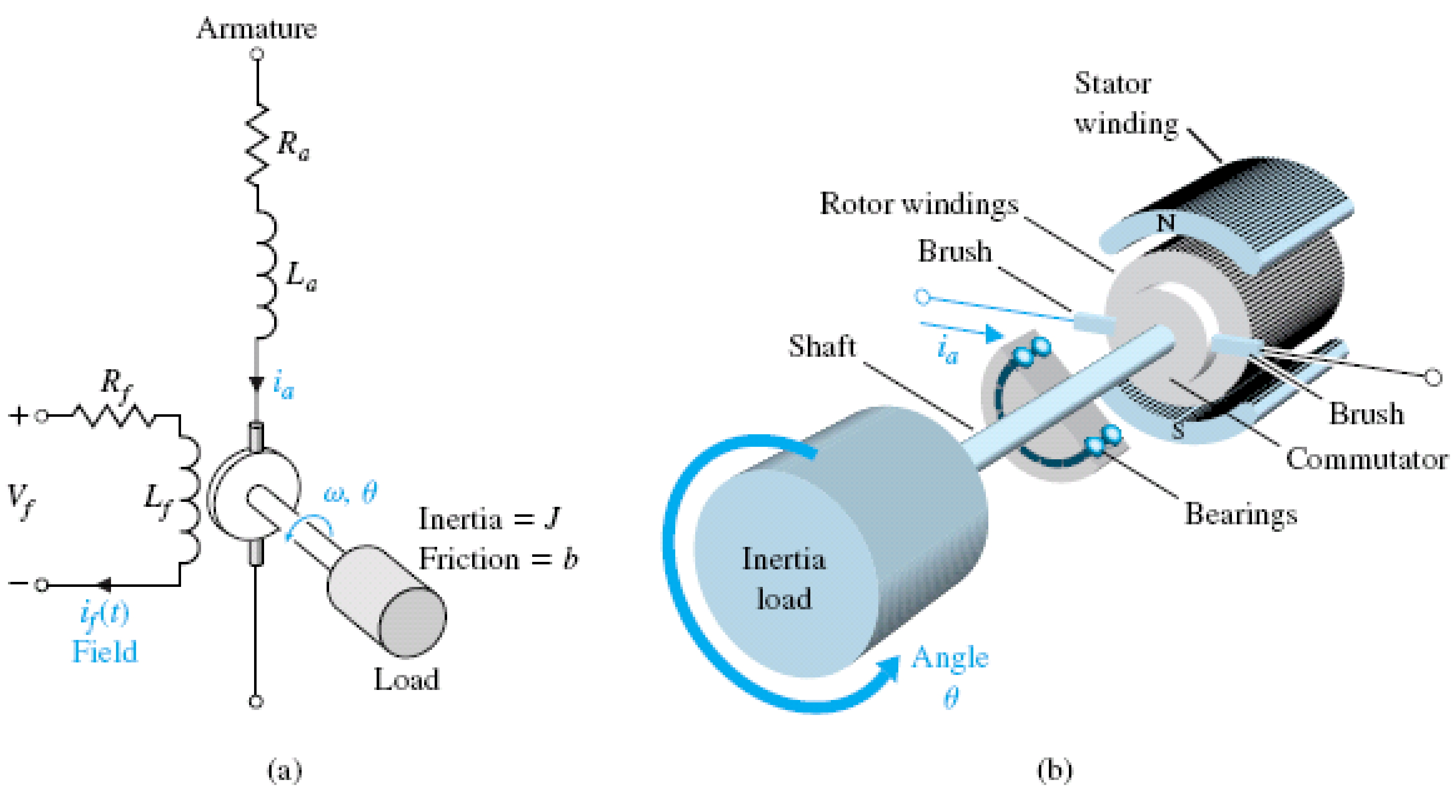
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad (2.35)$$

系统的输出方程为

$$y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_m & 0 \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad (2.41)$$

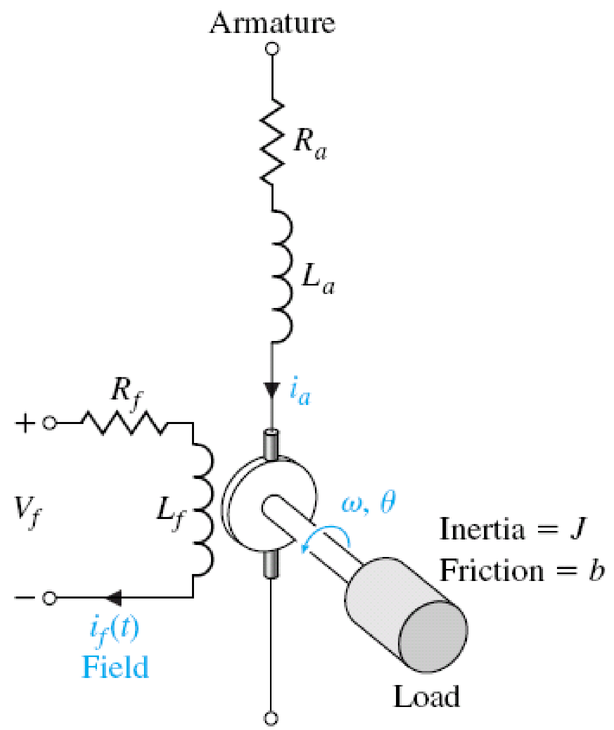
2.7 系统数学模型举例

■ 枢控电动机微分方程



电枢回路方程

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + e_m = u_a$$



L_a 电枢回路电感(H)

R_a 电枢回路电阻(Ω)

$e_m = C'_e \Phi \omega = C_e \omega$ 电动机反电势

C_e 为电动机反电势系数(V/(rad/s))

■ 电动机运动方程

$$J\frac{d\omega}{dt}+f\omega+M_L=M \qquad (2.46)$$

J和f分别为折算到电动机轴上的转动惯量($kg.\mathrm{m}^2$)和粘性摩擦系数(N.m.s/rad)

M_L为折算置电动机轴上的负载转矩$(\mathrm{N}\cdot\mathrm{m})$

$M=C_m i_a$为电动机电磁转矩$(\mathrm{N}\cdot\mathrm{m})$

C_m为电动机转矩系数$(\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}/\mathrm{A})$

(2.45)和(2.46)式可以写成

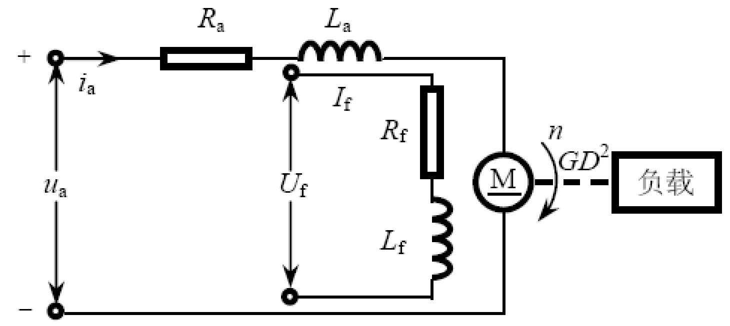
$$\frac{di_a}{dt} = -\frac{R_a}{L_a} i_a - \frac{C_e}{L_a}\omega + \frac{1}{L_a} u_a \qquad (2.47)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{C_m}{J} i_a - \frac{f}{J}\omega - \frac{1}{J} M_L \qquad (2.48)$$

令 $x_1 = i_a; x_2 = \omega$,可得到系统状态微分方程

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_a/L_a & -C_e/L_a \\ C_m/J & -f/J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L_a & 0 \\ 0 & -1/J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ M_L \end{bmatrix} \qquad (2.49)$$

直流枢控电动机转速反馈控制系统



电枢回路环节

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_e n = u_a \qquad (2.49)$$

其中n为转速(r/min)，K_e为反电势系数

令$T_a = L_a / R_a$(电枢回路时间常数)

传递函数

$$\frac{I_a(s)}{U_a(s) - K_e N(s)} = \frac{1/R_a}{1 + T_a s} \qquad (2.50)$$

直流枢控电动机转速反馈控制系统

- 转动环节:电动机功率较大时其粘性摩擦系数可以忽略不计，则运动方程为:

$$J_G \frac{dn}{dt} + M_L = M \qquad (2.51)$$

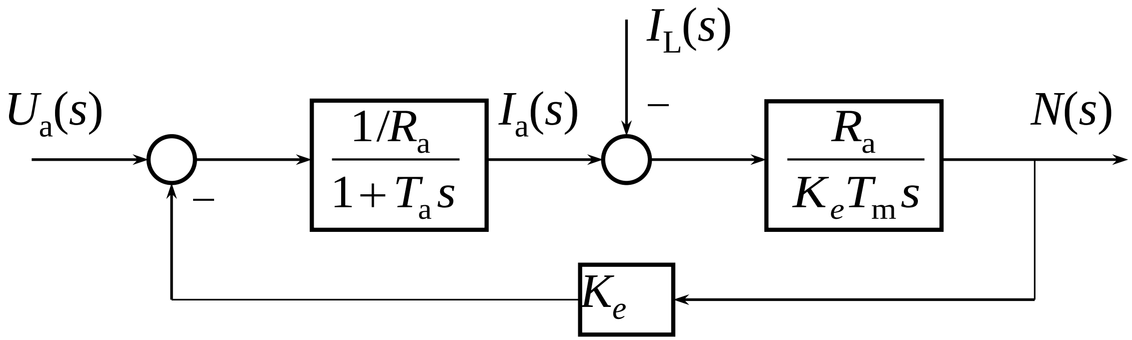
其中 $J_G = \dfrac{GD^2}{375}, M = K_m i_a, M_L = K_m i_L$

令 $T_m = \dfrac{GD^2}{375}\dfrac{R_a}{K_e K_m}$ (机电时间常数)

传递函数

$$\frac{N(s)}{I_a(s) - I_L(s)} = \frac{K_m}{J_G} = \frac{R_a}{K_e T_m s} \qquad (2.52)$$

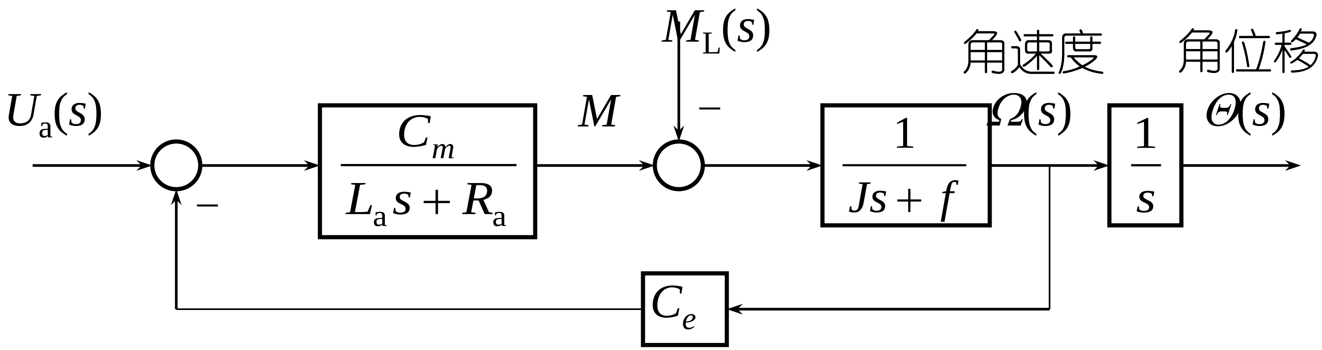
■ 枢控电动机结构图(以转速为输出量)



枢控电动机结构图

- 以角速度或角位移作为输出量(小功率伺服系统),由于电动机功率较小，要考虑粘性摩擦, 由(2.46)式,转动环节的输入输出方程为:

$$(Js+f)\Omega(s)=M(s)-M_L(s) \tag{2.53}$$



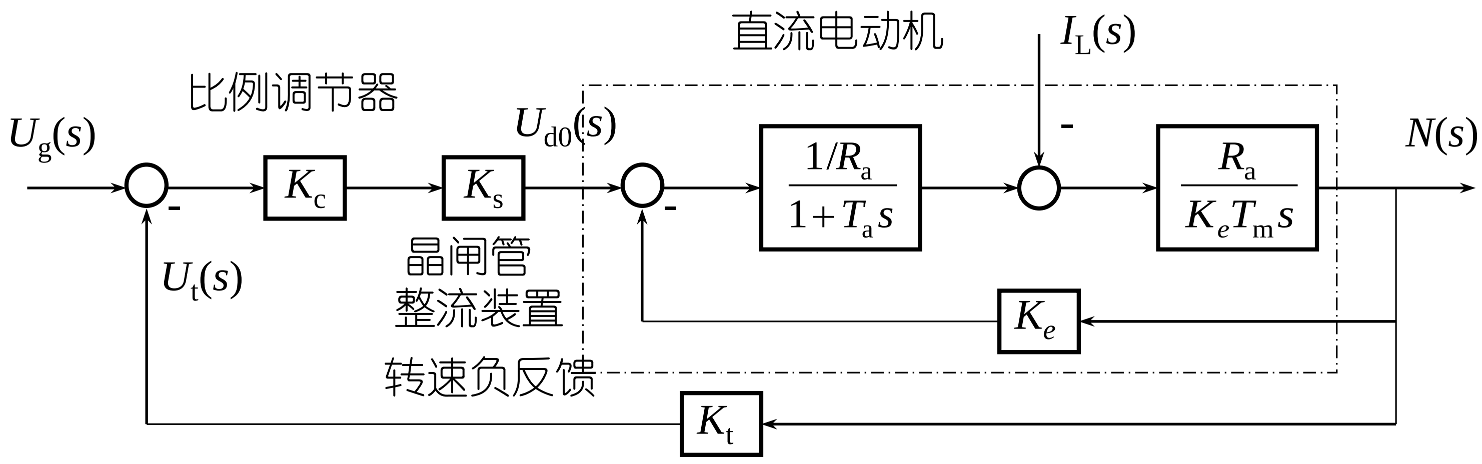
枢控电动机框图模型

■ 枢控电动机直流调速系统结构框图

- 以测速发电机作为转速负反馈环节，有

$$u_t = K_t n$$

- 采用比例调节器时，系统的结构框图



小结

- 本章讨论了控制系统常用的几种**数学模型**形式，并简要介绍了**输入输出数学模型**与**状态空间模型**之间的关系，在控制系统的分析与设计中，建立系统数学模型的工作十分重要，需要根据相关物理系统的数学模型，并运用相应的数学方法；
- 本章要求重点掌握**传递函数**、**系统结构框图**等数学模型；

阅读

- Dorf，Bishop. 现代控制系统. 第二章：系统的数学模型