2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、填空题(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分，把答案填在题中横线上)

(1) 设 $y=e^x(c_1\sin x+c_2\cos x)$ (c_1,c_2 为任意常数)为某二阶常系数线性齐次微分方程的通解，则该方程为 ______________

(2) 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 则 $div(gradr)|_{(1,-2,2)}=$ _______

(3) 交换二次积分的积分次序：$\int_{-1}^{0}dy\int_{2}^{1-y}f(x,y)dx=$ ______________

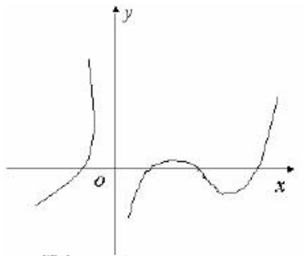
(4) 设矩阵 A 满足 $A^2+A-4E=0$,其中 E 为单位矩阵，则 $\left(A-E\right)^{-1}=$ ___________

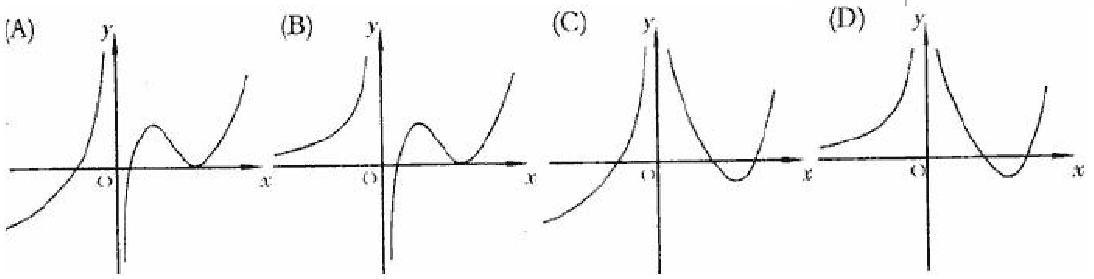
(5) 设随机变量 X 的方差为 2，则根据切比雪夫不等式有估计 $P\left\{\left|X-E(X)\right|\geq 2\right\}\leq$ ____

二、选择题(本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设函数 $f(x)$ 在定义域内可导， $y=f(x)$ 的图形如右图所示，

则导函数 $y=f'(x)$ 的图形为 (　　)





(2) 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 附近有定义，且 $f_x'(0,0)=3, f_y'(0,0)=1,$ 则 (　　)

(A) $dz|_{(0,0)}=3dx+dy.$

(B)曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的法向量为$\{3,1,1\}$.

(C)曲线$\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为$\{1, 0,3\}$.

(D)曲线$\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$在点(0, 0, f (0,0))的切向量为$\{3,0,1\}$.

(3) 设 $f(0)=0$ ，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充要条件为 (　　)

(A) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(1-\cosh)$ 存在.　　(B) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}f(1-e^{\mathrm{h}})$ 存在.

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(h-\sinh)$ 存在.　　(D) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[f(2h)-f(h)\right]$ 存在.

(4) 设 $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$, 则（　）

(A)合同且相似 .　　(B)合同但不相似.

(C)不合同但相似 .　　(D)不合同且不相似.

(5) 将一枚硬币重复掷 n 次，以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数，则 X 和 Y 的相关系数等于　　（　）

(A)-1　　(B)0　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D)1

三、(本题满分 6 分)

求 $\int\frac{\arctan e^x}{e^{2x}}dx$

四、(本题满分 6 分)

设函数 $z=f(x,y)$ 在点(1,1) 处可微，且 $f(1,1)=1,\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(1,1)}=3,\varphi(x)=f(x,f(x,x)).$

求 $\frac{d}{dx}\varphi^3(x)\Big|_{x=1}$.

五、(本题满分 8 分)

设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1+x^2}{x}\arctan x, x\neq 0\\ 1,\quad x=0\end{cases}$, 试将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和.

六、(本题满分 7 分)

计算 $I=\oint_L(y^2-z^2)dx+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz$, 其中 L 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线，从 z 轴正向看去，L 为逆时针方向.

七、(本题满分 7 分)

设 $y=f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内具有二阶连续导数且 $f''(x)\neq 0$, 试证：

(1) 对于(−1,1)内的任意 $x\neq 0$，存在唯一的 $\theta(x)\in(0,1)$ ，使 $f(x)=f(0)+xf'\left[\theta(x)x\right]$ 成立；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{2}.$

八、(本题满分 8 分)

设有一高度为 $h(t)$ （t 为时间）的雪堆在融化过程中，其侧面满足方程 $z=h(t)-\dfrac{2(x^2+y^2)}{h(t)}$ (设长度单位为厘米，时间单位为小时)，已知体积减少的速率与侧面积成正比(比例系数 0.9)，问高度为 130 厘米的雪堆全部融化需多少小时？

九、(本题满分 6 分)

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 为线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，$\beta_1=t_1\alpha_1+t_2\alpha_2,\beta_2=t_1\alpha_2+t_2\alpha_3,\cdots,\beta_s=t_1\alpha_s+t_2\alpha_1$，其中 t_1,t_2 为实常数.试问 t_1,t_2 满足什么关系时，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 也为 $Ax=0$ 的一个基础解系.

十、(本题满分 8 分)

已知 3 阶矩阵 A 与三维向量 x，使得向量组 x,Ax,A^2x 线性无关，且满足

$$A^3x=3Ax-2A^2x$$

(1) 记 $P=\left(x,Ax,A^2x\right)$，求 2 阶矩阵 B，使 $A=PBP^{-1}$；

(2) 计算行列式 $\left|A+E\right|$.

十一、(本题满分 7 分)

设某班车起点站上客人数 X 服从参数 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布，每位乘客在中途下车的概率为 $P(0<P<1)$，且途中下车与否相互独立，以 Y 表示在中途下车的人数，求：

(1)在发车时有 n 个乘客的条件下，中途有 m 人下车的概率；

(2)二维随机变量 (X,Y) 的概率分布.

十二、(本题满分 7 分)

设总体 X 服从证态分布 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$，从该总体中抽取简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_{2n}(n\ge 2)$，其样本均值为 $\overline{X}=\dfrac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i$，求统计量 $Y=\sum_{i=1}^{n}\left(X_i+X_{n+i}-2\overline{X}\right)^2$ 的数学期望 $E(Y)$.

2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析

一、填空题

(1)【答案】 $y''-2y'+2y=0$.

【详解】因为二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解为 $y=e^{\alpha x}(c_1\sin\beta x+c_2\cos\beta x)$ 时，则特征方程 $r^2+pr+q=0$ 对应的两个根为一对共轭复根： $\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i$ ，所以根据题设 $y=e^x(c_1\sin x+c_2\cos x)$ (c_1,c_2 为任意常数)为某二阶常系数线性齐次微分方程的通解，知： $\alpha=1,\beta=1$ ，特征根为 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i=1\pm i,$ 从而对应的特征方程为： $\left(\lambda-(1+i)\right)\left(\lambda-(1-i)\right)=\lambda^2-2\lambda+2=0,$ 于是所求二阶常系数线性齐次微分方程为 $y''-2y'+2y=0$.

(2)【答案】 $\frac{2}{3}$.

【分析】若 $r\left(x,y,z\right)$ 具有连续的一阶偏导数，梯度 $gradr$ 在直角坐标中的计算公式为：

$$gradr=\frac{\partial r}{\partial x}i+\frac{\partial r}{\partial y}j+\frac{\partial r}{\partial z}k$$

设 $A\left(x,y,z\right)=P\left(x,y,z\right)i+Q\left(x,y,z\right)j+R\left(x,y,z\right)k$ ，其中 P,Q,R 具有一阶连续偏导数，散度 $divA$ 在直角坐标中的计算公式为：

$$divA=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

若 $r\left(x,y,z\right)$ 具有二阶连续偏导数，则在直角坐标中有计算公式：

$$div(gradr)=\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}$$

【详解】本题实际上是计算 $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}$

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial x}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)=\frac{r-x\dfrac{\partial r}{\partial x}}{r^2}\ \underline{\underline{\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}}}\ \frac{r-x\dfrac{x}{r}}{r^2}=\frac{r^2-x^2}{r^3}$$

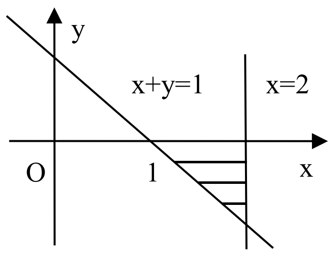
类似可得 $\dfrac{\partial r}{\partial y}=\dfrac{y}{r}$，$\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}=\dfrac{r^2-y^2}{r^3}$；$\dfrac{\partial r}{\partial z}=\dfrac{z}{r}$，$\dfrac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\dfrac{r^2-z^2}{r^3}$

根据定义有 $div(gradr)=\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\dfrac{r^2-x^2}{r^3}+\dfrac{r^2-y^2}{r^3}+\dfrac{r^2-z^2}{r^3}$

$$=\frac{3r^2-x^2-y^2-z^2}{r^3}=\frac{3r^2-r^2}{r^3}=\frac{2r^2}{r^3}=\frac{2}{r}=\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

于是 $div(gradr)|_{(1,-2,2)}=\left.\dfrac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right|_{(1,-2,2)}=\dfrac{2}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\dfrac{2}{3}$

(3)【答案】$\int_1^2 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy.$



【详解】由题设二次积分的限，画出对应的积分区域，如图阴影部分. 但在$-1\le y\le 0$内，$2\ge 1-y$，题设的二次积分并不是$f(x,y)$在某区域上的二重积分，

因此，应先将题设给的二次积分变形为：

$$\int_{-1}^0 dy\int_2^{1-y} f(x,y)dx=-\int_{-1}^0 dy\int_{1-y}^2 f(x,y)dx,$$

其中$D=\left\{(x,y)\middle|-1\le y\le 0,1-y\le x\le 2\right\}$，再由图所示，又可将$D$改写为

$$D=\left\{(x,y)\middle|1\le x\le 2,1-x\le y\le 0\right\},$$

于是 $\int_{-1}^0 dy\int_2^{1-y} f(x,y)dx=-\int_{-1}^0 dy\int_{1-y}^2 f(x,y)dx=-\int_1^2 dx\int_{1-x}^0 f(x,y)dy$

$$=\int_1^2 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy.$$

(4)【答案】 $\dfrac{1}{2}(A+2E).$

【详解】要求$(A-E)$的逆，应努力把题中所给条件化成$(A-E)B=E$的形式.

由题设$A^2+A-4E=0\Rightarrow A^2+A-2E=2E\Rightarrow\left(A-E\right)\left(A+2E\right)=2E$

即 $\left(A-E\right)\cdot\frac{1}{2}\left(A+2E\right)=E,$

故 $\left(A-E\right)^{-1}=\frac{1}{2}\left(A+2E\right).$

(5)【答案】$1/2$

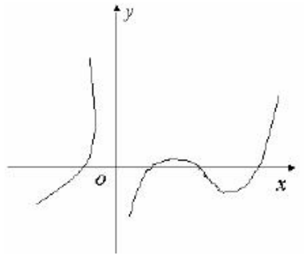
【分析】切比雪夫不等式：$P\left\{\left|X-E(X)\right|\geq\varepsilon\right\}\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$

【详解】根据切比雪夫不等式有

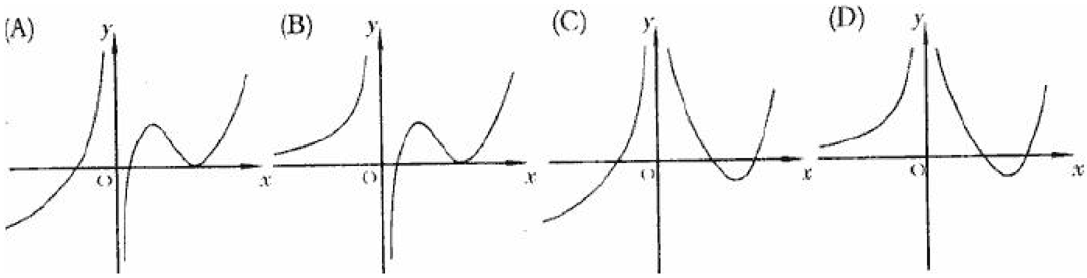
$$P\left\{\left|X-E(X)\right|\geq 2\right\}\leq\frac{D(X)}{2^2}=\frac{2}{2^2}=\frac{1}{2}$$

二、选择题

(1) 【答案】(D)



【详解】从题设图形可见，在 y 轴的左侧，曲线 $y=f(x)$ 是严格单调增加的，因此当 $x<0$ 时，一定有 $f'(x)>0$，对应 $y=f'(x)$ 图形必在 x 轴的上方，由此可排除(A)，(C)；



又 $y=f(x)$ 的图形在 y 轴右侧靠近 y 轴部分是单调增，所以在这一段内一定有 $f'(x)>0$，对应 $y=f'(x)$ 图形必在 x 轴的上方，进一步可排除(B)，故正确答案为(D).

(2)【答案】(C)

【详解】题目仅设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 附近有定义及 $f_x'(0,0)=3, f_y'(0,0)=1,$ 未设 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 可微，也没设 $z=f(x,y)$，所以谈不上 dz，因此可立即排除(A)；

令 $F(x,y,z)=z-f(x,y)$，则有 $F_x'=-f_x', F_y'=-f_y', F_z'=1$. 因此过点 $(0,0,f(0,0))$ 的法向量为 $\pm\left\{F_x',F_y',F_z'\right\}=\pm\left\{-f_x',-f_y',1\right\}=\pm\{-3,-1,1\}$，可排除(B)；

曲线$\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$可表示为参数形式：$\begin{cases} x=x \\ y=0 \\ z=f(x,0) \end{cases}$，点$(0,0,f(0,0))$的切向量为

$\pm\left\{1,0,f_x^{'}(0,0)\right\}=\pm\left\{1,0,3\right\}$. 故正确选项为(C).

(3)【答案】(B)

【详解】**方法 1**：因为

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}f(1-e^h)\xlongequal{1-e^h=x}\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\ln(1-x)}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{x}{\ln(1-x)}$$

$$\xlongequal{\ln(1-x)\sim -x}\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{x}{-x}=-\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}\xlongequal{f(0)=0}\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$$

可见，若$f(x)$在点$x=0$可导，则极限$\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}f(1-e^h)$一定存在；反过来也成立.

方法 2：排除法：举反例说明(A)，(C)，(D)说明不成立.

比如，$f(x)=|x|$，在$x=0$ 处不可导，但

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h^2}f(1-\cos h)=\lim_{h\to0}\frac{|1-\cos h|}{h^2}=\lim_{h\to0}\frac{1-\cos h}{h^2}=\lim_{h\to0}\frac{2\sin^2\left(\frac{1}{2}h\right)}{h^2}$$

$$\xlongequal{\sin\left(\frac{1}{2}h\right)\sim\frac{1}{2}h}\lim_{h\to0}\frac{\frac{1}{2}h^2}{h^2}=\frac{1}{2}$$，故排除(A)

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h^2}f(h-\sin h)=\lim_{h\to0}\frac{|h-\sin h|}{h^2}=\lim_{h\to0}\left|\frac{h-\sin h}{h^3}\right|\cdot|h|$$

其中，$\lim\limits_{h\to0}\left|\frac{h-\sin h}{h^3}\right|=\left|\lim\limits_{h\to0}\frac{h-\sin h}{h^3}\right|\xlongequal{洛}\left|\lim\limits_{h\to0}\frac{1-\cos h}{3h^2}\right|=\left|\lim\limits_{h\to0}\frac{2\sin^2\left(\frac{1}{2}h\right)}{3h^2}\right|\xlongequal{等}\left|\lim\limits_{h\to0}\frac{\frac{1}{2}h^2}{3h^2}\right|=\frac{1}{6}$

根据有界量与无穷小的乘积为无穷小，所以$\lim\limits_{h\to0}\left|\frac{h-\sinh}{h^3}\right|\cdot|h|=0$.故排除(C).

又如$f(x)=\begin{cases}1,x\neq0\\0,x=0\end{cases}$在$x=0$处不可导，但$\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}\left[f(2h)-f(h)\right]=\lim\limits_{h\to0}\frac{1-1}{h}=0$存在，

进一步可排除(D).

(4)【答案】 (A)

【详解】**方法 1**：因为 A 是实对称矩阵，必相似于对角阵 Λ.

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & \lambda-1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & \lambda-1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}\underline{\underline{\begin{matrix}2,3,4\text{行分}\\ \text{别加到1行}\end{matrix}}}\begin{vmatrix}\lambda-4 & \lambda-4 & \lambda-4 & \lambda-4\\ -1 & \lambda-1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & \lambda-1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{\begin{matrix}1\text{行提出公}\\ \text{因子}(\lambda-4)\end{matrix}}}\ (\lambda-4)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & \lambda-1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & \lambda-1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{\begin{matrix}1\text{行分别加}\\ \text{到}2,3,4\text{行}\end{matrix}}}\ (\lambda-4)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & \lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^3(\lambda-4)=0$$

得 A 的特征值为：$\lambda_1=4,\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0,$ 故必存在正交矩阵 Q，使得

$$Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

因此，A与B 相似.由两矩阵合同的充要条件：实对称矩阵 A与B 合同的充要条件是 A与B 相似. 因此，A与B 也合同. 即 A与B 既合同且相似.应选(A).

方法 2：因为 A 是实对称矩阵，故 A 必相似于一对角阵 Λ. 又由相似矩阵有相同的特征值,相同的秩, 知 A 与 Λ 有相同的秩，故 $r(\Lambda)=r(A)=1,$ 即 Λ 对角线上有 3 个元素为零. 因此，$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ 是 A 的特征值.

求另一个特征值，由特征值的和等于矩阵主对角线元素之和，知 $\sum\limits_{i=1}^{4}\lambda_i=\lambda_4=\sum\limits_{i=1}^{4}a_{ii}=4.$ 故，$\lambda_4=4$.

即 A 有特征值 $\lambda=4$和$\lambda=0$ (三重根)，和对角阵 B 的特征值完全一致，故 A,B 相似.又由两矩阵合同的充要条件：实对称矩阵 A与B 合同的充要条件是 A与B 相似. 知 A,B 合同.

(5)【答案】 A

【详解】 掷硬币结果不是正面向上就是反面向上，所以 $X+Y=n$，从而 $Y=n-X$，

故 $DY = D(n-X) = DX$

由方差的定义：$DX = EX^2 - (EX)^2$，所以

$$DY = D(n-X) = E(n-X)^2 - \left[E(n-X)\right]^2 = E(n^2 - 2nX + X^2) - (n-EX)^2$$

$$= n^2 - 2nEX + EX^2 - n^2 + 2nEX - (EX)^2 = EX^2 - (EX)^2 = DX\ )$$

由协方差的性质：$\operatorname{cov}(X,c) = 0$（$c$ 为常数）；$\operatorname{cov}(aX,bY) = ab\operatorname{cov}(X,Y)$

$$\operatorname{cov}(X_1 + X_2, Y) = \operatorname{cov}(X_1, Y) + \operatorname{cov}(X_2, Y)\ )$$

所以 $\operatorname{cov}(X,Y) = \operatorname{cov}(X, n-X) = \operatorname{cov}(X,n) - \operatorname{cov}(X,X) = 0 - DX = -DX$

由相关系数的定义，得 $\rho(X,Y) = \dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \dfrac{-DX}{\sqrt{DX}\sqrt{DX}} = -1$

三【详解】$\displaystyle\int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}}dx = \int e^{-2x}\arctan e^x dx = -\frac{1}{2}\int e^{-2x}\arctan e^x d\left(-2x\right)$

$$= -\frac{1}{2}\int \arctan e^x d\left(e^{-2x}\right) \underset{=\!=}{\text{分部}} -\frac{1}{2}\left(e^{-2x}\arctan e^x - \int e^{-2x} d\arctan e^x\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(e^{-2x}\arctan e^x - \int \frac{de^x}{e^{2x}(1+e^{2x})}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(e^{-2x}\arctan e^x - \int \left(\frac{1}{e^{2x}} - \frac{1}{1+e^{2x}}\right)de^x\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(e^{-2x}\arctan e^x - \int e^{-2x}de^x + \int \frac{1}{1+e^{2x}}de^x\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(e^{-2x}\arctan e^x + e^{-x} + \arctan e^x\right) + C$$

四【详解】 由题设，

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left[f(x, f(x,x))\right] = f_1'(x, f(x,x)) + f_2'(x, f(x,x))\left(f(x,x)\right)'$$

$$= f_1'(x, f(x,x)) + f_2'(x, f(x,x))\left[f_1{}'(x,x) + f_2{}'(x,x)\right]$$

这里 $f_1' = \dfrac{\partial f}{\partial x}$，$f_2' = \dfrac{\partial f}{\partial y}$，

所以 $\left.\dfrac{d\varphi(x)}{dx}\right|_{x=1}=\left\{f_1'(x,f(x,x))+f_2'(x,f(x,x))\left[f_1{}'(x,x)+f_2{}'(x,x)\right]\right\}_{x=1}$

$$=f_1'(1,1)+f_2'(1,1)\left[f_1{}'(1,1)+f_2{}'(1,1)\right]=2+3\cdot[2+3]=17$$

又 $f(1,1)=1,\ \varphi(x)=f(x,f(x,x))$，

所以 $\varphi(1)=f(1,f(1,1))\ \underline{\underline{f(1,1)=1}}\ f(1,1)=1$,

所以 $\dfrac{d}{dx}\varphi^3(x)\Big|_{x=1}=\left[3\varphi^2(x)\dfrac{d\varphi(x)}{dx}\right]\Big|_{x=1}$

$$=3\varphi^2(1)\left.\frac{d\varphi(x)}{dx}\right|_{x=1}\ \underline{\underline{\varphi(1)=1,\left.\frac{d\varphi(x)}{dx}\right|_{x=1}=17}}\ 3\cdot1\cdot17=51$$

五【详解】 首先将 $\arctan x$ 展开.

因为 $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\qquad x\in(-1,1)$

故 $\arctan x=\arctan 0+\int_0^x(\arctan x)'dx=0+\int_0^x\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\right)dx$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\qquad x\in(-1,1)$$

于是 $f(x)=\dfrac{1+x^2}{x}\arctan x=\dfrac{1+x^2}{x}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=(1+x^2)\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}=\frac{(-1)^0}{2\cdot0+1}x^0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1-1}}{2(n+1)-1}x^{2(n+1)}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}x^{2n}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n-1}\right)x^{2n}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n2}{1-4n^2}x^{2n},\quad x\in(-1,1),x\neq0$$

又 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n2}{1-4n^2}x^{2n}\right)=1$，且 $f(0)=1$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，从而 $x=0$ 时，$f(x)=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n2}{1-4n^2}x^{2n}$ 也成立. 进而 $f(x)=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n2}{1-4n^2}x^{2n}$，$x\in(-1,1)$，

又在 $x=\pm 1$ 处级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2}{1-4n^2}x^{2n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2}{1-4n^2}$ 收敛，

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{1+x^2}{x}\arctan x=\lim_{x\to 1^-}\frac{1+x^2}{x}\cdot\lim_{x\to 1^-}\arctan x=2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}=f\left(1\right),$$

$$\lim_{x\to -1^+}f(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{1+x^2}{x}\arctan x=\lim_{x\to -1^+}\frac{1+x^2}{x}\cdot\lim_{x\to -1^+}\arctan x=-2\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}=f\left(-1\right),$$

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处左连续，在 $x=-1$ 处右连续，所以等式可扩大到 $x=\pm 1$，

从而 $$f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2}{1-4n^2}x^{2n},\quad x\in\left[-1,1\right],$$

变形得 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}x^{2n}=\frac{f(x)-1}{2}$$

因此 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}\cdot 1^{2n}=\frac{1}{2}\left[f(1)-1\right]=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\pi}{2}-1\right]=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

六【详解】方法 1：用斯托克斯公式之后化成第一型曲面积分计算.

记 S 为平面 $x+y+z=2$ 上由 L 所围成的有界部分的上侧，(曲线的正向与曲面的侧的方向符合右手法则) D 为 S 在 xoy 坐标面上的投影， $D=\{(x,y)\mid |x|+|y|=1\}$

$$\left\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\right\}=\frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}\{-z_x',-z_y',1\}$$

在 $x+y+z=2$ 中，左右两边关于 x 求偏导，得 $1+z_x'=0$，得 $z_x'=-1$.

在 $x+y+z=2$ 中，左右两边关于 y 求偏导，得 $1+z_y'=0$，得 $z_y'=-1$.

代入上式得

$$\left\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\right\}=\left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$$

为 S 指定侧方向的单位法向量，由斯托克斯公式得

$$I=\oint_L(y^2-z^2)dx+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz$$

$$=\iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & 2z^2-x^2 & 3x^2-y^2 \end{vmatrix}$$

$$=\iint_S (-2y-4z)dydz+(-2z-6x)dzdx+(-2x-2y)dxdy$$

将题中的空间曲线积分化为第二类曲面积分，而对于第二类曲面积分，一般的解答方法是将它先化为第一类曲面积分，进而化为二重积分进行计算.

把 $dS=\frac{1}{|\cos\alpha|}dydz, dS=\frac{1}{|\cos\beta|}dzdx, dS=\frac{1}{|\cos\lambda|}dxdy$ 代入上式，

$$I=\iint_S[(-2y-4z)\cos\alpha+(-2z-6x)\cos\beta+(-2x-2y)\cos\gamma]dS$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_S[(-2y-4z)+(-2z-6x)+(-2x-2y)]dS$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_S[-8x-4y-6z]dS=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_S(4x+2y+3z)dS$$

按第一型曲面积分的算法，将 S 投影到 xoy，记为 σ . dS 与它在 xoy 平面上的投影 $d\sigma$ 的关系是

$$dS=\frac{1}{|\cos\gamma|}d\sigma=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,d\sigma$$

故 $dS=\sqrt{3}d\sigma$，将 $x+y+z=2$ 代入

$$I=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_S(4x+2y+3z)dS=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_S[4x+2y+3(2-x-y)](\sqrt{3}d\sigma)$$

$$=-2\iint_D(x-y+6)d\sigma$$

由于 D 关于 y 轴对称，利用区域的对称性，因为区域关于 y 轴对称，被积函数是关于 x 的奇函数，所以 $\iint_D xd\sigma=0$. D 关于 x 轴对称，利用区域的对称性，因为区域关于 x 轴对称，被积函数是关于 y 的奇函数，故 $\iint_D yd\sigma=0$，所以

$$I=-2\iint_D(x-y+6)d\sigma=-2\iint_D xd\sigma+2\iint_D yd\sigma-12\iint_D d\sigma=-12\iint_D dxdy$$

$=-12\cdot D$的面积 (由二重积分的几何意义知，$\iint_D dxdy$ 即 D 的面积)

其中，D 为$|x|+|y|\le 1$，D 的面积$=4\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=2$，所以$I=-12\cdot 2=-24$.

方法 2：转换投影法.

用斯托克斯公式，取平面$x+y+z=2$被L所围成的部分为S，按斯托克斯公式的规定，它的方向向上 (曲线的正向与曲面的侧的方向符合右手法则) ，S在xoy平面上的投影域记为

$$D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|=1\}.$$

由斯托克斯公式得

$$I=\oint_L (y^2-z^2)dx+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz$$

$$=\iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & 2z^2-x^2 & 3x^2-y^2 \end{vmatrix}$$

$$=\iint_S (-2y-4z)dydz+(-2z-6x)dzdx+(-2x-2y)dxdy$$

由 $dS=\frac{1}{|\cos\alpha|}dydz, dS=\frac{1}{|\cos\beta|}dzdx, dS=\frac{1}{|\cos\lambda|}dxdy$，

及 $\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}\{-z_x',-z_y',1\}$

知 $dS=\frac{1}{|\cos\alpha|}dydz=\frac{1}{|\cos\lambda|}dxdy$，$dS=\frac{1}{|\cos\beta|}dzdx=\frac{1}{|\cos\lambda|}dxdy$，

故 $$dydz=\frac{|\cos\alpha|}{|\cos\lambda|}dxdy=\frac{\frac{-z_x'}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}}dxdy=-z_x'dxdy$$

$$dzdx=\frac{|\cos\beta|}{|\cos\lambda|}dxdy=\frac{\frac{-z_y'}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}}dxdy=-z_y'dxdy$$

因为S为$z=2-x-y$，式子左右两端分别关于x,y求偏导，$\frac{\partial z}{\partial x}=-1,\frac{\partial z}{\partial y}=-1,$ 于是

$$I=\iint_S (-2y-4z)dydz+(-2z-6x)dzdx+(-2x-6y)dxdy$$

$$=\iint_S \{-2y-4z,-2z-6x,-2x-6y\}\cdot\left\{-\frac{\partial z}{\partial x},-\frac{\partial z}{\partial y},1\right\}dxdy$$

$$=-2\iint_S (4x+2y+3z)dxdy=-2\iint_D (x-y+6)dxdy$$

因为区域D关于y轴对称，被积函数是关于x的奇函数，所以$\iint_D xd\sigma=0$. 类似的，因为区域D关于x轴对称，被积函数是关于y的奇函数，故$\iint_D yd\sigma=0$，所以

$$I=-2\iint_D (x-y+6)d\sigma=-2\iint_D xd\sigma+2\iint_D yd\sigma-12\iint_D d\sigma=-12\iint_D dxdy$$

$=-12\cdot D$的面积(由二重积分的几何意义知，$\iint_D dxdy$即D的面积)

D为$|x|+|y|\le 1$，D的面积$=4\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=2$，所以

$$I=-12\cdot 2=-24.$$

方法3：降维法.

记S为平面$x+y+z=2$上由L所围成的有界部分的上侧 (曲线的正向与曲面的侧的方向符合右手法则) ，D为S在xoy坐标面上的投影，$D=\{(x,y)\mid |x|+|y|=1\}$

把$x+y+z=2$代入I 中， L_1为L 在xoy平面上投影，逆时针.

$$I=\oint_{L_1}(y^2-(2-x-y)^2)dx+(2(2-x-y)^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)(-dx-dy)$$

$$=\oint_{L_1}(y^2-4x^2-2xy+4x+4y-4)dx+(3y^2-2x^2+4xy-8x-8y+8)dy$$

$$\underline{\underline{\text{格林公式}}}\oint_{L_1}\left[\frac{\partial(3y^2-2x^2+4xy-8x-8y+8)}{\partial x}-\frac{\partial(y^2-4x^2-2xy+4x+4y-4)}{\partial y}\right]dxdy$$

$$=-2\iint_D (x-y+6)dxdy=-24$$

方法4：用斯托克斯公式后用第二型曲面积分逐个投影法.

记S为平面$x+y+z=2$上由L所围成的有界部分的上侧，(曲线的正向与曲面的侧的方向符合右手法则)

$$\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}\{-z_x',-z_y',1\}$$

在$x+y+z=2$中，左右两边关于x求偏导，得$1+z_x'=0$，得$z_x'=-1$.

在$x+y+z=2$中，左右两边关于y求偏导，得$1+z_y'=0$，得$z_y'=-1$.

代入上式得

$$\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$$

为 S 指定侧方向的单位法向量，由斯托克斯公式得

$$I = \oint_L (y^2 - z^2)dx + (2z^2 - x^2)dy + (3x^2 - y^2)dz$$

$$= \iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & 2z^2 - x^2 & 3x^2 - y^2 \end{vmatrix}$$

$$= \iint_S (-2y - 4z)dydz + (-2z - 6x)dzdx + (-2x - 2y)dxdy$$

用逐个投影法，先计算 $I_1 = \iint_S (-2y - 4z)dydz,$ 其中 $D_{yz} = \{(y, z) \mid |2 - y - z| + |y| \le 1\}$ 为 S 在 yoz 平面上的投影，分别令 $y \ge 0, y \le 0, 2 - y - z \ge 0, 2 - y - z \le 0$，可得到 D_{yz} 的 4 条边界线的方程：

右：$2y + z = 3$；上：$z = 3$ ；左：$2y + z = 1$；下：$z = 1$.

于是 $$I_1 = -2\int_1^3 dz \int_{\frac{1}{2}(1-z)}^{\frac{1}{2}(3-z)} (y + 2z)dy = -16$$

再计算 $I_2 = \iint_S (-2z - 6x)dzdx$，其中 $D_{xz} = \{(x, z) \mid |x| + |2 - x - z| \le 1\}$ 为 S 在 xoz 平面上的投影，分别令 $x \ge 0, x \le 0, 2 - x - z \ge 0, 2 - x - z \le 0$，可得到 D_{xz} 的 4 条边界线的方程：

右：$2y + z = 3$；上：$z = 3$ ；左：$2y + z = 1$；下：$z = 1$.

于是 $$I_2 = -2\int_1^3 dz \int_{\frac{1}{2}(1-z)}^{\frac{1}{2}(3-z)} (z + 3x)dx = \int_1^3 (z - 6)dz = -8$$

再计算 $I_3 = \iint_D (-2x - 2y)dxdy$，其中 $D_{xy} = \{(x, y) \mid |x| + |y| \le 1\}$ 为 S 在 xoy 平面上的投影，因为区域关于 y 轴和 x 轴均对称，被积函数是关于 x 和 y 都是奇函数，

于是 $$I_3 = -2\iint_S (x + y)dxdy = 0$$

故 $$I = I_1 + I_2 + I_3 = -24.$$

方法 5：参数式法.

L 是平面 $x + y + z = 2$ 与柱面 $|x| + |y| = 1$ 的交线，是由 4 条直线段构成的封闭折

线，将题中要求的空间曲线积分分成四部分来求.

当 $x \geq 0, y \geq 0$ 时，$L_1 : y = 1 - x, z = 2 - x - y$，则 $dy = -dx, dz = -dx$，x 从 1 到 0. 以 x 为参数，于是

$$(y^2 - z^2)dx + (2z^2 - x^2)dy + (3x^2 - y^2)dz$$

$$= [(1-x)^2 - (2-x-y)^2]dx + [2(2-x-y)^2 - x^2](-dx) + [3x^2 - (1-x)^2](-dx)$$

$$= [(1-x)^2 - 1 + (2-x^2)(-1)]dx$$

则 $$\oint_{L_1} (y^2 - z^2)dx + (2z^2 - x^2)dy + (3x^2 - y^2)dz$$

$$= \int_1^0 \left[(1-x)^2 - 1 + (2-x^2)(-1)\right]dx = \frac{7}{3}.$$

当 $x \leq 0, y \geq 0$，$L_2 : y = 1 + x, z = 1 - 2x$，则 $dy = dx, dz = -2dx$，x 从 0 到 -1

于是

$$(y^2 - z^2)dx + (2z^2 - x^2)dy + (3x^2 - y^2)dz$$

$$= [(1+x)^2 - (1-2x)^2]dx + [2(1-2x)^2 - x^2]dx + [3x^2 - (1+x)^2](-2dx)$$

$$= (2x+4)dx$$

所以 $$\oint_{L_2} (y^2 - z^2)dx + (2z^2 - x^2)dy + (3x^2 - y^2)dz = \int_0^{-1} (2x+4)dx = -3$$

当 $x \leq 0, y \leq 0$，$L_3 : y = 1 - x, z = 3$，则 $dy = -dx, dz = 0$，x 从 -1 到 0，于是

$$(y^2 - z^2)dx + (2z^2 - x^2)dy + (3x^2 - y^2)dz$$

$$= [(1-x)^2 - 3^2]dx + [2 \cdot 3^2 - x^2](-dx) + [3x^2 - (1-x)^2] \cdot 0$$

$$= (2x^2 + 2x - 26)dx$$

所以 $$\oint_{L_3} (y^2 - z^2)dx + (2z^2 - x^2)dy + (3x^2 - y^2)dz = \int_{-1}^0 (2x^2 + 2x - 26)dx = -\frac{79}{3}$$

当 $x \geq 0, y \leq 0$，$L_4 : y = x - 1, z = 3 - 2x$，则 $dy = dx, dz = -2dx$，x 从 0 到 1，

于是

$$(y^2 - z^2)dx + (2z^2 - x^2)dy + (3x^2 - y^2)dz$$

$$= [(x-1)^2 - (3-2x)^2]dx + [2(3-2x)^2 - x^2]dx + [3x^2 - (x-1)^2](-2dx)$$

$$= (-18x + 12)dx$$

所以 $\oint_{L_4}(y^2-z^2)dx+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz=\int_0^1(-18x+12)dx=3.$

所以 $I=\oint_L=\int_{L_1}+\int_{L_2}+\int_{L_3}+\int_{L_4}=-24.$

七【分析】拉格朗日中值定理：如果 $f(x)$ 满足在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使等式 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$ 成立

【详解】(1) 因为 $y=f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内具有二阶连续导数，所以一阶导数存在，由拉格朗日中值定理得，任给非零 $x\in(-1,1)$，存在 $\theta(x)\in(0,1)$，$\theta(x)\cdot x\in(-1,1)$，使 $f(x)=f(0)+xf'[\theta(x)\cdot x]$，$(0<\theta(x)<1)$ 成立.

因为 $f''(x)$ 在 $(-1,1)$ 内连续且 $f''(x)\neq 0,$ 所以 $f''(x)$ 在 $(-1,1)$ 内不变号，不妨设 $f''(x)>0,$ 则 $f'(x)$ 在 $(-1,1)$ 内严格单调且增加，故 $\theta(x)$ 唯一.

(2)**方法 1**：由(1)知 $f(x)=f(0)+xf'[\theta(x)\cdot x]$，$(0<\theta(x)<1)$

于是有 $xf'[\theta(x)x]=f(x)-f(0)$，即 $f'[\theta(x)x]=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$

所以 $\dfrac{f'[\theta(x)x]-f'(0)}{x}=\dfrac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}$

上式两边取极限，再根据导数定义，得

$$左端＝\lim_{x\to0}\frac{f'[\theta(x)x]-f'(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f'[\theta(x)x]-f'(0)}{\theta(x)x}\theta(x)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f'[\theta(x)x]-f'(0)}{\theta(x)x}\lim_{x\to0}\theta(x)=f''(0)\lim_{x\to0}\theta(x)$$

$$右端＝\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}\ \underline{\underline{\text{洛}}}\ \lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}\ \underline{\underline{\text{导数定义}}}\ \frac{1}{2}f''(0)$$

左边=右边，即 $f''(0)\lim\limits_{x\to0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}f''(0)$，故 $\lim\limits_{x\to0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}.$

方法 2：由泰勒公式得 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{1}{2}f''(\xi)x^2,\quad \xi\in(0，x)$

再与(1)中的 $f(x)=f(0)+xf'[\theta(x)x](0<\theta(x)<1)$

比较，所以 $$xf'[\theta(x)x] = f(x) - f(0) = f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2,$$

约去 x，有 $$f'[\theta(x)x] = f'(0) + \frac{1}{2}f''(\xi)x,$$

凑成 $$\frac{f'[\theta(x)x] - f'(0)}{\theta(x)x}\theta(x) = \frac{1}{2}f''(\xi),$$

由于 $$\lim_{x\to 0}\frac{f'[\theta(x)x] - f'(0)}{\theta(x)x} = f''(0)，\quad \lim_{x\to 0} f''(x) = \lim_{\xi\to 0} f''(\xi) = f''(0)$$

所以 $$f''(0)\lim_{x\to 0}\theta(x) = \frac{1}{2}f''(0)$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x) = \dfrac{1}{2}.$

八【详解】$z = h(t) - \dfrac{2(x^2+y^2)}{h(t)} \ge 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \le \dfrac{1}{2}h^2(t)$，所以侧面在 xoy 面上的投影为：

$$D = \left\{(x,y): x^2 + y^2 \le \frac{1}{2}h^2(t)\right\}$$

记 V 为雪堆体积，S 为雪堆的侧面积，则由体积公式

$$V = \iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D zdxdy = \iint_D \left[h(t) - \frac{2(x^2+y^2)}{h(t)}\right]dxdy$$

化为极坐标，令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，$0 \le r \le \dfrac{h(t)}{\sqrt{2}}, 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$

$$V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}} \left(h(t) - \frac{2r^2}{h(t)}\right) rdr = 2\pi \int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}} \left(h(t) - \frac{2r^2}{h(t)}\right) rdr$$

$$= 2\pi\left(\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}} h(t)rdr - \int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}} - \frac{2r^2}{h(t)} rdr\right) = 2\pi\left(h(t)\frac{r^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}} - \frac{r^4}{2h(t)}\Bigg|_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\right)$$

$$= 2\pi\left(\frac{h^3(t)}{4} - \frac{h^3(t)}{8}\right) = \frac{\pi}{4}h(t)^3$$

再由侧面积公式：

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(f_x'\right)^2 + \left(f_y'\right)^2} dxdy = \iint_D \sqrt{1 + \left(z_x'\right)^2 + \left(z_y'\right)^2} dxdy$$

$$=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{4x}{h(t)}\right)^2+\left(\frac{4y}{h(t)}\right)^2}dxdy=\iint_D \sqrt{1+\frac{16(x^2+y^2)}{h(t)^2}}dxdy$$

化为极坐标，令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，$0\le r\le \frac{h(t)}{\sqrt{2}},0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

$$S=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\sqrt{1+\frac{16r^2}{h^2(t)}}rdr=2\pi\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\sqrt{1+\frac{16r^2}{h^2(t)}}rdr=\pi\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\sqrt{1+\frac{16r^2}{h^2(t)}}dr^2$$

$$=\frac{\pi h^2(t)}{16}\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\sqrt{1+\frac{16r^2}{h^2(t)}}d\frac{16r^2}{h^2(t)}=\frac{\pi h^2(t)}{16}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(1+\frac{16r^2}{h^2(t)}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{\pi h^2(t)}{16}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left[\left(1+\frac{8h^2(t)}{h^2(t)}\right)^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}}\right]=\frac{\pi h^2(t)}{16}\cdot\frac{2}{3}\cdot(27-1)=\frac{13\pi h^2(t)}{12}$$

由题意知 $\frac{dV}{dt}=-0.9S(t)$，将上述 $V(t)$ 和 $S(t)$ 代入，得

$$\frac{d\frac{\pi}{4}h(t)^3}{dt}=-0.9\cdot\frac{13\pi h^2(t)}{12}\Rightarrow\frac{3\pi}{4}h^2(t)\frac{dh(t)}{dt}=-0.9\cdot\frac{13\pi h^2(t)}{12}\Rightarrow\frac{dh(t)}{dt}=-1.3$$

积分解得 $h(t)=-\frac{13}{10}t+C$

由 $h(0)=130$，得 $C=130$. 所以 $h(t)=-\frac{13}{10}t+130.$

令 $h(t)\to 0$，即 $-\frac{13}{10}t+130\to 0\Rightarrow t\to 100$

因此高度为 130 厘米的雪堆全部融化所需要时间为 100 小时.

九【详解】由题设知，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 均为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的线性组合，齐次方程组当有非零解时，解向量的任意组合仍是该齐次方程组的解向量，所以 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 均为 $Ax=0$ 的解. 下面证明 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关. 设

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_s\beta_s=0 \qquad (*)$$

把 $\beta_1=t_1\alpha_1+t_2\alpha_2$, $\beta_2=t_1\alpha_2+t_2\alpha_3$, $\cdots$, $\beta_s=t_1\alpha_s+t_2\alpha_1$, 代入整理得，

$$(t_1k_1+t_2k_s)\alpha_1+(t_2k_1+t_1k_2)\alpha_2+\cdots+(t_2k_{s-1}+t_1k_s)\alpha_s=0$$

由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 为线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，由线性

无关的定义，知 $(*)$ 中其系数全为零，即

$$\begin{cases} t_1k_1+t_2k_s=0 \\ t_2k_1+t_1k_2=0 \\ \qquad\vdots \\ t_2k_{s-1}+t_1k_s=0 \end{cases}$$

其系数行列式

$$\begin{vmatrix} t_1 & 0 & 0 & 0 & t_2 \\ t_2 & t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_2 & t_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & t_2 & t_1 \end{vmatrix} \overset{(*)}{=\!=} \begin{vmatrix} t_1 & 0 & 0 & 0 & t_2 \\ 0 & t_1 & 0 & \cdots & -\dfrac{t_2^2}{t_1} \\ 0 & 0 & t_1 & \cdots & \dfrac{t_2^3}{t_1^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_1+(-1)^{s+1}\dfrac{t_2^s}{t_1^{s-1}} \end{vmatrix} = t_1^{s-1}\left(t_1+(-1)^{s+1}\frac{t_2^s}{t_1^{s-1}}\right)=t_1^s+(-1)^{s+1}t_2^s$$

(（$*$）变换：把原行列式第 i 行乘以 $-\dfrac{t_2}{t_1}$ 加到第 $i+1$ 行，其中 $i=1,\cdots,s-1$.)

由齐次线性方程组只有零解得充要条件，可见，当 $t_1^s+(-1)t_2^s\neq 0,$，即 $t_1^s\neq(-t_2)^s,$ 即当 s 为偶数，$t_1\neq\pm t_2$; 当 s 为奇数，$t_1\neq t_2$ 时，上述方程组只有零解 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0,$ 因此向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关，

故当 $\begin{cases} s=2n, & t_1\neq\pm t_2 \\ s=2n+1, & t_1\neq t_2 \end{cases}$ 时，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 也是方程组 $Ax=0$ 的基础解系.

十【详解】(1)

方法 1：求 B，使 $A=PBP^{-1}$ 成立，等式两边右乘 P，即 $AP=PB$ 成立.

由题设知，$AP=A\left(x,Ax,A^2x\right)=\left(Ax,A^2x,A^3x\right)$，又 $A^3x=3Ax-2A^2x$，故有

$$AP=\left(Ax,A^2x,3Ax-2A^2x\right)=\left(x,Ax,A^2x\right)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

即如果取 $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$，此时的 B 满足 $A=PBP^{-1}$，即为所求.

方法 2：由题设条件 $P=\left(x,Ax,A^2x\right)$ 是可逆矩阵，由可逆的定义，知有 P^{-1} 使

$$PP^{-1}=P^{-1}P=P^{-1}\left(x,Ax,A^2x\right)=\left(P^{-1}x,P^{-1}Ax,P^{-1}A^2x\right)=E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

即有 $P^{-1}x=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},P^{-1}Ax=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},P^{-1}A^2x=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. 由题设条件， $A^3x=3Ax-2A^2x$ ，有

$$P^{-1}A^3x=P^{-1}\left(3Ax-2A^2x\right)=3P^{-1}Ax-2P^{-1}A^2x=3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}$$

由 $A=PBP^{-1}$ ，得

$$B=P^{-1}AP=P^{-1}A\left(x,Ax,A^2x\right)=P^{-1}\left(Ax,A^2x,A^3x\right)$$

$$=\left(P^{-1}Ax,P^{-1}A^2x,P^{-1}A^3x\right)=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{pmatrix}$$

(2) 由(1)及矩阵相似的定义知， A 与 B 相似. 由矩阵相似的性质：若 $A\sim B$ ，则 $f(A)\sim f(B)$ ，则 $A+E$ 与 $A-E$ 也相似. 又由相似矩阵的行列式相等，得

$$\left|A+E\right|=\left|B+E\right|=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&3\\0&1&-1\end{bmatrix}\xlongequal[\text{加到2行}]{\text{1行}\times(-1)}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&1&-1\end{bmatrix}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&3\\1&-1\end{vmatrix}=-4$$

十一【分析】首先需要清楚二项分布的产生背景. 它的背景是：做 n 次独立重复试验，每次试验的结果只有两个(要么成功，要么失败)，每次试验成功的概率都为 p ，随机变量 X 表示 n 次试验成功的次数，则 $X\sim B(n,p)$. 在此题中，每位乘客在中途下车看成是一次实验，每个人下车是独立的，有 n 个人相当于做了 n 次独立重复实验，把乘客下车看成实验成功，不下车看成实验失败，而且每次实验成功的概率都为 p ，则问题(1)成为 n 重伯努利实验中有 m 次成功.

【详解】 (1)求在发车时有 n 个乘客的条件下，中途有 m 人下车的概率，相当于求条件概率 $P\left\{Y=m\mid X=n\right\}$ ，由题设知，此条件概率服从二项分布，因此根据二项分布的分布律有:

$$P\left\{Y=m\mid X=n\right\}=C_n^mP^m(1-P)^{n-m},0\le m\le n,n=0,1,2\cdots$$

(2) 求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布，其实就是求 $P\left\{X=n,Y=m\right\}$ ，利用乘法公式，

有 $P\{X=n,Y=m\}=P\{Y=m\mid X=n\}P\{X=n\}$

又 X 服从参数 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布，由泊松分布的分布律有 $P\{X=n\}=\dfrac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$

故 $P\{X=n,Y=m\}=P\{Y=m\mid X=n\}P\{X=n\}=C_n^m P^m(1-P)^{n-m}\cdot\dfrac{e^{-\lambda}}{n!}\lambda^n$，

其中 $0\le m\le n, n=0,1,2\cdots$

十二【详解】 记 $\overline{X_1}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\overline{X_2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_{n+i}$，则 $\overline{X}=\frac{1}{2}\left(\overline{X_1}+\overline{X_2}\right)$，即 $2\overline{X}=\overline{X_1}+\overline{X_2}$

且 $E\overline{X_1}=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}EX_i}{n}=\dfrac{nu}{n}=u$， $E\overline{X_2}=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_{n+i}\right)=u$

因此 $E(Y)=E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i+X_{n+i}-2\overline{X}\right)^2\right]=E\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(X_i-\overline{X_1}\right)+\left(X_{n+i}-\overline{X_2}\right)\right]^2\right\}$

$$=E\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(X_i-\overline{X_1}\right)^2+2\left(X_i-\overline{X_1}\right)\left(X_{n+i}-\overline{X_2}\right)+\left(X_{n+i}-\overline{X_2}\right)^2\right]\right\}$$

$$=E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X_1}\right)^2\right]+E\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[2\left(X_i-\overline{X_1}\right)\left(X_{n+i}-\overline{X_2}\right)\right]\right\}+E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_{n+i}-\overline{X_2}\right)^2\right]$$

因为样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X_1}\right)^2\right]$ 是总体方差的无偏估计，则 $ES^2=\sigma^2$，即

$$ES^2=E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X_1}\right)^2\right]=\sigma^2$$

所以 $E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X_1}\right)^2\right]=(n-1)\sigma^2$，同理 $E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_{n+i}-\overline{X_2}\right)^2\right]=(n-1)\sigma^2$

而 $E\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[2\left(X_i-\overline{X_1}\right)\left(X_{n+i}-\overline{X_2}\right)\right]\right\}=2E\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(X_i-\overline{X_1}\right)\left(X_{n+i}-\overline{X_2}\right)\right]\right\}$

$$=2\sum_{i=1}^{n}E\left[\left(X_i-\overline{X_1}\right)\left(X_{n+i}-\overline{X_2}\right)\right]=\sum_{i=1}^{n}E\left(X_iX_{n+i}-X_i\overline{X_2}-\overline{X_1}X_{n+i}+\overline{X_1}\,\overline{X_2}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(EX_iX_{n+i}-EX_i\overline{X_2}-E\overline{X_1}X_{n+i}+E\overline{X_1}\,\overline{X_2}\right)$$

由于 $X_1, X_2, \cdots, X_{2n} (n \geq 2)$ 相互独立同分布，则 X_i与$\overline{X_2}$，$\overline{X_1}$与X_{n+i}，$\overline{X_1}$与$\overline{X_2}$ 也独立($i = 1, 2 \cdots n$). 而由独立随机变量期望的性质(若随机变量 X, Y 独立，且 EX, EY 都存在，则 $EXY = EXEY$)，所以

$$EX_i X_{n+i} = EX_i EX_{n+i} = u^2, \quad EX_i \overline{X_2} = EX_i E\overline{X_2} = u^2$$

$$E\overline{X_1} X_{n+i} = E\overline{X_1} EX_{n+i} = u^2, \quad E\overline{X_1}\,\overline{X_2} = E\overline{X_1} E\overline{X_2} = u^2$$

故有 $$E\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(X_i - \overline{X_1}\right)\left(X_{n+i} - \overline{X_2}\right)\right]\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(EX_i X_{n+i} - EX_i \overline{X_2} - E\overline{X_1} X_{n+i} + E\overline{X_1}\,\overline{X_2}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(u^2 - u^2 - u^2 + u^2\right) = 0$$

即 $$E(Y) = E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X_1}\right)^2\right] + E\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[2\left(X_i - \overline{X_1}\right)\left(X_{n+i} - \overline{X_2}\right)\right]\right\} + E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_{n+i} - \overline{X_2}\right)^2\right]$$

$$= (n-1)\sigma^2 + (n-1)\sigma^2 = 2(n-1)\sigma^2$$