

2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、填空题：1-6 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(1) 曲线 $y = \frac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线方程为 _____

(2) 微分方程 $xy' + 2y = x \ln x$ 满足 $y(1) = -\frac{1}{9}$ 的解为. _____

(3) 设函数 $u(x, y, z) = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{18}$, 单位向量 $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\{1, 1, 1\}$, 则

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{(1,2,3)} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(4) 设 Ω 是由锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 围成的空间区域, Σ 是 Ω 的整个边界的外侧, 则 $\iiint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy = \underline{\hspace{2cm}}.$

(5) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维列向量, 记矩阵

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3),$$

如果 $|A| = 1$, 那么 $|B| = \underline{\hspace{2cm}}.$

(6) 从数 1, 2, 3, 4 中任取一个数, 记为 X , 再从 1, 2, \dots , X 中任取一个数, 记为 Y , 则

$$P\{Y = 2\} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

二、选择题：7-14 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

(7) 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + |x|^{3n}}$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内()

- (A) 处处可导. (B) 恰有一个不可导点.
(C) 恰有两个不可导点. (D) 至少有三个不可导点.

(8) 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数, " $M \Leftrightarrow N$ " 表示 " M 的充分必要条件是 N ", 则必有()

- (A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数. (B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数.
(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数. (D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数.

- (9) 设函数 $u(x, y) = \varphi(x+y) + \varphi(x-y) + \int_{x-y}^{x+y} \psi(t)dt$, 其中函数 φ 具有二阶导数, ψ 具有一阶导数, 则必有()

(A) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. (B) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(C) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. (D) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

- (10) 设有三元方程 $xy - z \ln y + e^{-xz} = 1$, 根据隐函数存在定理, 存在点 $(0, 1, 1)$ 的一个邻域, 在此邻域内该方程()

- (A) 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z = z(x, y)$.
- (B) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y = y(x, z)$ 和 $z = z(x, y)$.
- (C) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x = x(y, z)$ 和 $z = z(x, y)$.
- (D) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x = x(y, z)$ 和 $y = y(x, z)$.

- (11) 设 λ_1, λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值, 对应的特征向量分别为 α_1, α_2 , 则 α_1 ,

$A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关的充分必要条件是()

- (A) $\lambda_1 \neq 0$. (B) $\lambda_2 \neq 0$. (C) $\lambda_1 = 0$. (D) $\lambda_2 = 0$.

- (12) 设 A 为 n ($n \geq 2$) 阶可逆矩阵, 交换 A 的第 1 行与第 2 行得矩阵 B , A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵, 则()

- (A) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 B^* . (B) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 B^* .
- (C) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 $-B^*$. (D) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 $-B^*$.

- (13) 设二维随机变量 (X, Y) 的概率分布为()

$X \backslash Y$	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件 $\{X = 0\}$ 与 $\{X + Y = 1\}$ 相互独立, 则

- (A) $a = 0.2, b = 0.3$ (B) $a = 0.4, b = 0.1$
- (C) $a = 0.3, b = 0.2$ (D) $a = 0.1, b = 0.4$

(14) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本, \bar{X} 为样本均值, S^2 为样本方差, 则()

(A) $n\bar{X} \sim N(0,1)$

(B) $nS^2 \sim \chi^2(n).$

(C) $\frac{(n-1)\bar{X}}{S} \sim t(n-1)$

(D) $\frac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^n X_i^2} \sim F(1, n-1).$

三、解答题: 15—23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 11 分)

设 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq \sqrt{2}, x \geq 0, y \geq 0\}$, $[1 + x^2 + y^2]$ 表示不超过 $1 + x^2 + y^2$ 的最大整数. 计算二重积分 $\iint_D xy[1 + x^2 + y^2] dx dy$.

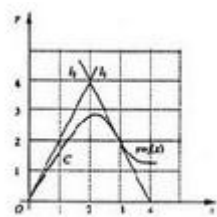
(16)(本题满分 12 分)

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (1 + \frac{1}{n(2n-1)}) x^{2n}$ 的收敛区间与和函数 $f(x)$.

(17)(本题满分 11 分)

如图, 曲线 C 的方程为 $y = f(x)$, 点(3,2)是它的一个拐点, 直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 C 在点(0,0)与(3,2)处的切线, 其交点为(2,4). 设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数, 计算定积分

$$\int_0^3 (x^2 + x) f'''(x) dx.$$



(18)(本题满分 12 分)

已知函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$. 证明:

(I) 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi) = 1 - \xi$;

(II) 存在两个不同的点 $\eta, \zeta \in (0,1)$, 使得 $f'(\eta)f'(\zeta) = 1$.

(19)(本题满分 12 分)

设函数 $\varphi(y)$ 具有连续导数, 在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线 L 上, 曲线积分

$\oint_L \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4}$ 的值恒为同一常数.

(I) 证明: 对右半平面 $x > 0$ 内的任意分段光滑简单闭曲线 C , 有 $\oint_C \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} = 0$;

(II) 求函数 $\varphi(y)$ 的表达式.

(20)(本题满分 9 分)

已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (1-a)x_1^2 + (1-a)x_2^2 + 2x_3^2 + 2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

(I) 求 a 的值;

(II) 求正交变换 $x = Qy$, 把 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化成标准形;

(III) 求方程 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解.

(21)(本题满分 9 分)

已知 3 阶矩阵 A 的第一行是 (a, b, c) , a, b, c 不全为零, 矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{bmatrix}$ (k 为常数),

且 $AB = 0$, 求线性方程组 $Ax = 0$ 的通解.

(22)(本题满分 9 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < y < 2x, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

求: (I) (X, Y) 的边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$;

(II) $Z = 2X - Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

(23)(本题满分 9 分)

设 X_1, X_2, \dots, X_n ($n > 2$) 为来自总体 $N(0, 1)$ 的简单随机样本, \bar{X} 为样本均值, 记

$Y_i = X_i - \bar{X}, i = 1, 2, \dots, n$.

求: (I) Y_i 的方差 $DY_i, i = 1, 2, \dots, n$; (II) Y_1 与 Y_n 的协方差 $Cov(Y_1, Y_n)$.

2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析

一、填空题

(1) 【答案】 $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$.

【详解】由求斜渐近线公式 $y = ax + b$ (其中 $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$), 得:

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x^2 + x} = \frac{1}{2},$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{2(2x+1)} = -\frac{1}{4},$$

所以所求斜渐近线方程为 $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$.

(2) 【答案】 $y = \frac{1}{3}x \ln x - \frac{1}{9}x$.

【详解】求方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ 的解, 有公式

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C \right] \quad (\text{其中 } C \text{ 是常数}).$$

将原方程等价化为 $y' + \frac{2}{x}y = \ln x$, 于是利用公式得方程的通解

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \frac{2}{x} dx} \left[\int \ln x \cdot e^{\int \frac{2}{x} dx} dx + C \right] \\ &= \frac{1}{x^2} \cdot \left[\int x^2 \ln x dx + C \right] = \frac{1}{3}x \ln x - \frac{1}{9}x + \frac{C}{x^2}, \quad (\text{其中 } C \text{ 是常数}) \end{aligned}$$

由 $y(1) = -\frac{1}{9}$ 得 $C = 0$, 故所求解为 $y = \frac{1}{3}x \ln x - \frac{1}{9}x$.

(3) 【答案】 $\sqrt{3}/3$

【详解】设 $f(x, y, z)$ 有连续的一阶偏导数, $\vec{l}^0 = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ 为给定的向量 \vec{l} 的单位

向量, 则 $f(x, y, z)$ 沿 \vec{l} 方向的方向导数计算公式为 $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma$.

因为 $u(x, y, z) = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{18}$, 所以 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{3}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{6}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{9}$, 且向量 \vec{n} 的

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

于是所求方向导数为 $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{(1,2,3)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

(4) 【答案】 $(2 - \sqrt{2})\pi R^3$

【详解】 如果设函数 $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ 在 Ω 上具有一阶连续偏导数, 则有:

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \oiint_{\Sigma} P dydz + Q dx dz + R dx dy,$$

其中 Σ 是 Ω 的整个边界曲面的外侧.

以 Ω 表示由 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 所围成的有界闭区域, 由高斯公式得

$$\iiint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy = \iiint_{\Omega} 3 dx dy dz$$

利用球面坐标得

$$\iiint_{\Omega} 3 dx dy dz = 3 \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) R^3 = (2 - \sqrt{2})\pi R^3$$

(5) 【答案】 2

【详解】

$$\text{方法 1: 因为 } (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$(\alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix},$$

$$\text{故 } B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix},$$

记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 两边取行列式, 于是有

$$|B| = |A| \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 1 \times 2 = 2.$$

方法 2: 利用行列式性质(在行列式中, 把某行的各元素分别乘以非零常数加到另一行的对应元素上, 行列式的值不变; 从某一行或列中提取某一公因子行列式值不变)

$$\begin{aligned} |B| &= |\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3| \\ &\stackrel{[2]-[1]}{=} |\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + 3\alpha_3, 2\alpha_2 + 8\alpha_3| \stackrel{[3]-2[2]}{=} |\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + 3\alpha_3, 2\alpha_3| \\ &= 2 |\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + 3\alpha_3, \alpha_3| \stackrel{[1]-[3]}{=} 2 |\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3| \stackrel{[1]-[2]}{=} 2 |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| \end{aligned}$$

又因为 $|A| = |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = 1$, 故 $|B| = 2|A| = 2$.

(6) 【答案】 $\frac{13}{48}$

【详解】 由全概率公式:

$$\begin{aligned} P\{Y=2\} &= P\{X=1\}P\{Y=2|X=1\} + P\{X=2\}P\{Y=2|X=2\} \\ &\quad + P\{X=3\}P\{Y=2|X=3\} + P\{X=4\}P\{Y=2|X=4\} \end{aligned}$$

X 表示从数 1,2,3,4 中任取一个数, 故 X 是等可能取到 1,2,3,4, 所以 $P(X=i) = \frac{1}{4}, i=1,2,3,4$

而 Y 表示从 1,2,..., X 中任取一个数, 也就是说 Y 是等可能取到 1,2,..., X

也就是说 Y 在 X 的条件下等可能取值, 即

$$P\{Y=2|X=1\} = 0 \quad (X \text{ 取 } 1 \text{ 的条件下, } Y \text{ 取 } 2 \text{ 是不可能事件})$$

$$P\{Y=2|X=2\} = \frac{1}{2} \quad (X \text{ 取 } 2 \text{ 的条件下, } Y \text{ 在 } 1, 2 \text{ 等可能取值})$$

$$P\{Y=2|X=3\} = \frac{1}{3} \quad (X \text{ 取 } 3 \text{ 的条件下, } Y \text{ 在 } 1, 2, 3 \text{ 等可能取值})$$

$$P\{Y=2|X=4\} = \frac{1}{4} \quad (X \text{ 取 } 4 \text{ 的条件下, } Y \text{ 在 } 1, 2, 3, 4 \text{ 等可能取值})$$

故 $P\{Y=2\} = P\{X=1\}P\{Y=2|X=1\} + P\{X=2\}P\{Y=2|X=2\}$

$$+ P\{X=3\}P\{Y=2|X=3\} + P\{X=4\}P\{Y=2|X=4\} = \frac{1}{4} \times (0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}) = \frac{13}{48}.$$

二、选择题

(7) 【答案】 C

【详解】 分段讨论, 并应用夹逼准则,

当 $|x| < 1$ 时, 有 $\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{1+|x|^{3n}} \leq \sqrt[n]{2}$, 命 $n \rightarrow \infty$ 取极限, 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 1$,

由夹逼准则得 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+|x|^{3n}} = 1$;

当 $|x| = 1$ 时, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 1$;

当 $|x| > 1$ 时, $|x|^3 = \sqrt[n]{|x|^{3n}} < \sqrt[n]{1+|x|^{3n}} \leq \sqrt[n]{2|x|^{3n}} = \sqrt[n]{2}|x|^3$, 命 $n \rightarrow \infty$ 取极限, 得

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2|x|^{3n}} = |x|^3$, 由夹逼准则得 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} |x|^3 \left(\frac{1}{|x|^{3n}} + 1 \right)^{\frac{1}{n}} = |x|^3$.

$$\text{所以 } f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ |x|^3, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

再讨论 $f(x)$ 的不可导点. 按导数定义, 易知 $x = \pm 1$ 处 $f(x)$ 不可导, 故应选(C).

(8) 【答案】A

【详解】

方法 1: 应用函数奇偶性的定义判定,

函数 $f(x)$ 的任一原函数可表示为 $F(x) = \int_0^x f(t)dt + C$, 且 $F'(x) = f(x)$.

当 $F(x)$ 为偶函数时, 有 $F(-x) = F(x)$, 于是 $F'(-x) \cdot (-1) = F'(x)$, 即

$-f(-x) = f(x)$, 亦即 $f(-x) = -f(x)$, 可见 $f(x)$ 为奇函数;

反过来, 若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt + C$, 令 $t = -k$, 则有 $dt = -dk$,

所以 $F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt + C = -\int_0^x f(-k)dk + C = \int_0^x f(k)dk + C = F(x)$,

从而 $F(x) = \int_0^x f(t)dt + C$ 为偶函数, 可见(A)为正确选项.

方法 2: 排除法,

令 $f(x) = 1$, 则取 $F(x) = x + 1$, 排除(B)、(C);

令 $f(x) = x$, 则取 $F(x) = \frac{1}{2}x^2$, 排除(D);

(9) 【答案】B

【详解】因为 $\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(x+y) + \varphi'(x-y) + \psi(x+y) - \psi(x-y)$,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(x+y) - \varphi'(x-y) + \psi(x+y) + \psi(x-y),$$

$$\text{于是 } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi''(x+y) + \varphi''(x-y) + \psi'(x+y) - \psi'(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \varphi''(x+y) - \varphi''(x-y) + \psi'(x+y) + \psi'(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \varphi''(x+y) + \varphi''(x-y) + \psi'(x+y) - \psi'(x-y),$$

可见有 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, 应选(B).

(10) 【答案】D

【详解】隐函数存在定理: 设 $F(x, y, z)$ 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的某领域内具有连续的一阶偏导数, 且 $F(x_0, y_0, z_0) = 0, F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. 则存在点 M_0 的某邻域, 在此邻域内由方程 $F(x, y, z) = 0$ 可以确定唯一的连续偏导数的函数 $z = z(x, y)$ 满足 $z(x_0, y_0) = z_0$, 且

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{M_0} = - \frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} \bigg|_{M_0}, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{M_0} = - \frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} \bigg|_{M_0}$$

同理, 如果 $F(x_0, y_0, z_0) = 0, F'_y(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, 可确定 $y = y(x, z)$ 满足 $y_0 = y(x_0, z_0)$;

$F(x_0, y_0, z_0) = 0, F'_x(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, 可确定 $x = x(y, z)$ 满足 $x_0 = x(y_0, z_0)$.

本题中可令 $F(x, y, z) = xy - z \ln y + e^{xz} - 1$, 则

$$F'_x = y + e^{xz} z, \quad F'_y = x - \frac{z}{y}, \quad F'_z = -\ln y + e^{xz} x,$$

所以 $F'_x(0, 1, 1) = 2 \neq 0, F'_y(0, 1, 1) = -1 \neq 0, F'_z(0, 1, 1) = 0$.

由于 $F'_z(0, 1, 1) = 0$, 所以由隐函数存在定理知, 不一定能确定具有连续偏导数的函数 $z = z(x, y)$, 所以排除(A)、(B)、(C), 而 $F'_x(0, 1, 1) = 2 \neq 0$ 和 $F'_y(0, 1, 1) = -1 \neq 0$, 所以可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x = x(y, z)$ 和 $y = y(x, z)$, 故应选(D).

(11) 【答案】B

【详解】

方法 1: 利用线性无关的定义

α_1, α_2 分别是特征值 λ_1, λ_2 对应的特征向量, 根据特征值、特征向量的定义, 有

$$A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1, A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2 \Rightarrow A(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2.$$

设有数 k_1, k_2 , 使得 $k_1\alpha_1 + k_2A(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$, 则

$$k_1\alpha_1 + k_2\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_2\alpha_2 = 0 \Rightarrow (k_1 + k_2\lambda_1)\alpha_1 + k_2\lambda_2\alpha_2 = 0.$$

因 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 因不同特征值对应的特征向量必线性无关, 故 α_1, α_2 线性无关, 则

$$\begin{cases} k_1 + k_2\lambda_1 = 0, \\ k_2\lambda_2 = 0. \end{cases}$$

当 $\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 \neq 0$ 时, 方程只有零解, 则 $k_1 = 0, k_2 = 0$, 此时 $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性

无关; 反过来, 若 $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关, 则必然有 $\lambda_2 \neq 0$ (否则, α_1 与

$A(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda_1\alpha_1$ 线性相关), 故应选(B).

方法 2: 将向量组的表出关系表示成矩阵形式

α_1, α_2 分别是特征值 λ_1, λ_2 对应的特征向量, 根据特征值、特征向量的定义, 有

$$A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1, A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2 \Rightarrow A(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2.$$

$$\text{由于 } (\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)) = (\alpha_1, \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2) \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

因 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 因不同特征值对应的特征向量必线性无关, 知 α_1, α_2 线性无关. 若 $\alpha_1,$

$A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关, 则 $r(\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)) = 2$, 则

$$2 = r\left((\alpha_1, \alpha_2) \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\right) \leq \min \left\{ r(\alpha_1, \alpha_2), r\left(\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\right) \right\} \leq r\left(\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\right) \leq 2,$$

故 $2 \leq r\left(\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\right) \leq 2$, 从而 $r\left(\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\right) = 2$, 从而 $\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 \neq 0$

若 $\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 \neq 0$, 则 $r\left(\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\right) = 2$, 又 α_1, α_2 线性无关, 则

$$r\left((\alpha_1, \alpha_2) \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\right) = r\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = 2,$$

则

$$r(\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)) = r\left((\alpha_1, \alpha_2) \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\right) = 2$$

从而 $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关的充要条件是 $\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 \neq 0$. 故应选(B).

方法 3: 利用矩阵的秩

α_1, α_2 分别是特征值 λ_1, λ_2 对应的特征向量, 根据特征值、特征向量的定义, 有

$$A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1, A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2 \Rightarrow A(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2.$$

因 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 因不同特征值对应的特征向量必线性无关, 故 α_1, α_2 线性无关, 又

$$A(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2, \text{ 故 } \alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2) \text{ 线性无关} \Leftrightarrow r(\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)) = 2$$

$$\text{又因为 } (\alpha_1, \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2) \xrightarrow{\text{将 } \alpha_1 \text{ 的 } -\lambda_1 \text{ 倍加到第 2 列}} = (\alpha_1, \lambda_2\alpha_2)$$

则 $r(\alpha_1, \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2) = r(\alpha_1, \lambda_2\alpha_2) = 2 \Leftrightarrow \lambda_2 \neq 0$ (若 $\lambda_2 = 0$, 与 $r(\alpha_1, \lambda_2\alpha_2) = 2$ 矛盾)

方法 4: 利用线性齐次方程组

α_1, α_2 分别是特征值 λ_1, λ_2 对应的特征向量, 根据特征值、特征向量的定义, 有

$$A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1, A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2 \Rightarrow A(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2.$$

由 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 因不同特征值对应的特征向量必线性无关, 故 α_1, α_2 线性无关,

$$\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2) \text{ 线性无关}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1, \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 \text{ 线性无关}$$

$$\Leftrightarrow |\alpha_1, \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2| \neq 0,$$

$$\Leftrightarrow (\alpha_1, \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2)X = 0 \text{ 只有零解, 又 } (\alpha_1, \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2) \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2) \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \text{ 只有零解}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2 \text{ 线性无关时 } (\alpha_1, \alpha_2)Y = 0 \text{ 只有零解, 故 } Y = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0, \text{ 只有零解,}$$

$$\Leftrightarrow Y = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \text{ 的系数矩阵是个可逆矩阵,}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 \neq 0, \text{ 故应选(B)}$$

方法 5: 由 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, α_1, α_2 线性无关

α_1, α_2 分别是特征值 λ_1, λ_2 对应的特征向量, 根据特征值、特征向量的定义, 有

$$A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1, A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2 \Rightarrow A(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2.$$

向量组 (I): α_1, α_2 和向量组 (II): $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2$. 显然向量组 (II) 可

以由向量组 (I) 线性表出; 当 $\lambda_2 \neq 0$ 时, 不论 λ_1 的取值如何, 向量组 (I) 可以由向量组

(II) 线性表出

$$\alpha_1 = \alpha_1, \alpha_2 = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\alpha_1\right) + \frac{1}{\lambda_2}(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2) = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\alpha_1 + \frac{1}{\lambda_2}A(\alpha_1 + \alpha_2),$$

从而 (I), (II) 是等价向量组 \Rightarrow 当 $\lambda_2 \neq 0$ 时, $r(\alpha_1, \alpha_2) = r(\alpha_1, \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2) = 2$

(12) 【答案】(C)

【详解】

方法 1: 由题设, 存在初等矩阵 E_{12} (交换 n 阶单位矩阵的第 1 行与第 2 行所得), 使得

$$E_{12}A = B, (A \text{ 进行行变换, 故 } A \text{ 左乘初等矩阵}), \text{ 于是 } B^* = (E_{12}A)^* = A^*E_{12}^*,$$

$$\text{又初等矩阵都是可逆的, 故 } E_{12}^{-1} = \frac{E_{12}^*}{|E_{12}|},$$

又 $|E_{12}| = -|E| = -1$ (行列式的两行互换, 行列式反号), $E_{12}^{-1} = E_{12}$, 故

$$B^* = A^*E_{12}^* = A^*|E_{12}| \cdot E_{12}^{-1} = -A^*E_{12}^{-1} = -A^*E_{12},$$

即 $A^*E_{12} = -B^*$, 可见应选(C).

方法 2: 交换 A 的第一行与第二行得 B , 即 $B = E_{12}A$.

又因为 A 是可逆阵, $|E_{12}| = -|E| = -1$, 故 $|B| = |E_{12}A| = |E_{12}||A| = -|A| \neq 0$,

所以 B 可逆, 且 $B^{-1} = (E_{12}A)^{-1} = A^{-1}E_{12}$.

$$\text{又 } A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}, B^{-1} = \frac{B^*}{|B|}, \text{ 故 } \frac{B^*}{|B|} = \frac{A^*}{|A|} E_{12}, \text{ 又因 } |B| = -|A|, \text{ 故 } A^* E_{12} = -B^*.$$

(13) 【答案】B

【详解】

方法 1: 由二维离散型随机变量联合概率分布的性质 $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$, 有 $0.4 + a + b + 0.1 = 1$,

可知 $a + b = 0.5$, 又事件 $\{X = 0\}$ 与 $\{X + Y = 1\}$ 相互独立, 于是由独立的定义有:

$$P\{X = 0, X + Y = 1\} = P\{X = 0\}P\{X + Y = 1\},$$

$$\text{而 } P\{X = 0, X + Y = 1\} = P\{X = 0, Y = 1\} = a$$

$$P\{X + Y = 1\} = P\{X = 0, Y = 1\} + P\{X = 1, Y = 0\} = a + b = 0.5$$

由边缘分布的定义:

$$P\{X = 0\} = P\{X = 0, Y = 0\} + P\{X = 0, Y = 1\} = 0.4 + a$$

代入独立等式, 得 $a = (0.4 + a) \times 0.5$, 解得 $a = 0.4, b = 0.1$,

方法 2: 如果把独立性理解为: $P\{X + Y = 1 | X = 0\} = P\{X + Y = 1\}$ (因为独立, 所以

$\{X + Y = 1\}$ 发生与 $\{X = 0\}$ 发不发生没有关系), 即

$$P\{Y = 1 | X = 0\} = P\{X + Y = 1\} = a + b = 0.5;$$

$$\text{所以 } P\{Y = 0 | X = 0\} = 1 - P\{Y = 1 | X = 0\} = 1 - 0.5 = 0.5;$$

$$\text{因此 } P\{Y = 1 | X = 0\} = P\{Y = 0 | X = 0\} = 0.5$$

上式两边同乘以 $P\{X = 0\}$, 有 $P\{Y = 1 | X = 0\}P\{X = 0\} = P\{Y = 0 | X = 0\}P\{X = 0\}$

由乘法公式: $P(AB) = P(A|B)P(B)$, 上式即为 $P\{X = 0, Y = 0\} = P\{X = 0, Y = 1\}$

即 $0.4 = a$. 又因为 $a + b = 0.5$, 得 $b = 0.1$.

(14) 【答案】D

【概念】 F 分布的定义: 若 $X \sim \chi^2(n_1)$, $Y \sim \chi^2(n_2)$, 则 $\frac{X/n_1}{Y/n_2} \sim F(n_1, n_2)$

χ^2 分布的定义: 若 Z_1, \dots, Z_n 相互独立, 且都服从标准正态分布 $N(0, 1)$, 则

$$\sum_{i=1}^n Z_i^2 \sim \chi^2(n)$$

正态分布标准化的定义: 若 $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $\frac{Z-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

【详解】因 $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本, 独立正态分布的线

性组合也服从正态分布, 故 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim N(0, \frac{1}{n})$.

将其标准化有: $\frac{\bar{X}-0}{1/\sqrt{n}} = \sqrt{n}\bar{X} \sim N(0,1)$, 故(A)错

又 $\frac{\bar{X}-0}{S/\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}\bar{X}}{S} \sim t(n-1)$, 故(C)错;

而 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{1^2} = (n-1)S^2 \sim \chi^2(n-1)$, 不能断定(B)是正确选项.

又 $X_1^2 \sim \chi^2(1)$, $\sum_{i=2}^n X_i^2 \sim \chi^2(n-1)$, 且 $X_1^2 \sim \chi^2(1)$ 与 $\sum_{i=2}^n X_i^2 \sim \chi^2(n-1)$ 相互独立,

于是 $\frac{X_1^2/1}{\sum_{i=2}^n X_i^2 / (n-1)} = \frac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^n X_i^2} \sim F(1, n-1)$. 故应选(D).

三、解答题

(15) 【详解】

方法 1: 令 $D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x^2 + y^2 < 1, x \geq 0, y \geq 0\}$,

$$D_2 = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq \sqrt{2}, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

于是有 $[1 + x^2 + y^2] = \begin{cases} 1, & \text{当 } (x, y) \in D_1 \\ 2, & \text{当 } (x, y) \in D_2 \end{cases}$

从而

$$\begin{aligned} \iint_D xy[1 + x^2 + y^2] dx dy &= \iint_{D_1} xy dx dy + \iint_{D_2} 2xy dx dy \quad (\text{二重积分对区域的可加性}) \\ &= \iint_{D_1} xy dx dy + 2 \iint_{D_2} xy dx dy \quad (\text{用极坐标把不同区域上的二重积分化为累次积分}) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^1 r^3 dr + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_1^{\sqrt{2}} r^3 dr \quad (\text{根据牛—莱公式}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \frac{r^4}{4} \Big|_0^1 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \frac{r^4}{4} \Big|_1^{\sqrt[4]{2}} \\
&= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta + 2 \times \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \quad (\text{凑微分}) \\
&= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \sin^2 \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin^2 \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

方法 2: 用极坐标

$$\begin{aligned}
\iint_D xy[1+x^2+y^2]dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt[4]{2}} r^3 \sin \theta \cos \theta \cdot [1+r^2]dr \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{\sqrt[4]{2}} r^3 \cdot [1+r^2]dr \quad (\text{根据牛—莱公式}) \\
&= \frac{1}{2} \sin^2 \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt[4]{2}} r^3 \cdot [1+r^2]dr = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt[4]{2}} r^3 \cdot [1+r^2]dr.
\end{aligned}$$

$$\text{而} \quad [1+r^2] = \begin{cases} 1 & 0 \leq r < 1 \\ 2 & 1 \leq r < \sqrt[4]{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\text{从而} \quad \iint_D xy[1+x^2+y^2]dxdy &= \frac{1}{2} \left(\int_0^1 r^3 dr + \int_1^{\sqrt[4]{2}} 2r^3 dr \right) \quad (\text{定积分对区域的可加性}) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{r^4}{4} \Big|_0^1 + 2 \times \frac{r^4}{4} \Big|_1^{\sqrt[4]{2}} \right) \quad (\text{根据牛—莱公式}) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} (2-1) \right) = \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

(16) 【详解】 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n \left(1 + \frac{1}{(n+1)(2n+1)}\right) x^{2n+2}}{(-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n(2n-1)}\right) x^{2n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)+1}{(n+1)(2n+1)} \cdot \frac{n(2n-1)}{n(2n-1)+1} x^2 = x^2,$$

所以, 由比值判别法知, 当 $x^2 < 1$ 时, 原级数绝对收敛, 当 $x^2 > 1$ 时, 原级数发散, 因此原级数的收敛半径为 1, 收敛区间为 $(-1, 1)$. 另外, 当 $x = \pm 1$ 时由于通项极限不为零, 故原幂级数在 $x = \pm 1$ 处为发散的.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n(2n-1)}\right) x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n} + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n(2n-1)}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} (-x^2)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)} = S_1(x) + S_2(x), \quad x \in (-1, 1)$$

对 $S_1(x)$, 由等比级数求和公式 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}$, $x \in (-1, 1)$ 得

$$S_1(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} (-x^2)^n = -\frac{-1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in (-1, 1)$$

对 $S_2(x)$, 则由幂级数在收敛区间上可导并有逐项求导公式得

$$S_2'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2}{2n-1} x^{2n-1}, \quad x \in (-1, 1),$$

同理可得

$$S_2''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} 2x^{2n-2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-x^2)^{n-1} = 2 \cdot \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in (-1, 1)$$

可得 $S_2(0) = 0, S_2'(0) = 0$,

所以, 由牛—莱公式得

$$S_2'(x) = S_2'(0) + \int_0^x S_2''(t) dt = \int_0^x \frac{2}{1+t^2} dt = 2 \arctan x, \quad x \in (-1, 1)$$

同理得

$$\begin{aligned} S_2(x) &= S_2(0) + \int_0^x S_2'(t) dt = 2 \int_0^x \arctan t dt \\ &= 2t \arctan t \Big|_0^x - 2 \int_0^x t d \arctan t \quad (\text{分部积分}) \\ &= 2x \arctan x - 2 \int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt \quad (\text{计算出微分}) \\ &= 2x \arctan x - \int_0^x \frac{1}{1+t^2} d(1+t^2) \quad (\text{凑微分}) \\ &= 2x \arctan x - \ln(1+t^2) \Big|_0^x \quad (\text{基本积分表中的公式}) \\ &= 2x \arctan x - \ln(1+x^2) \quad x \in (-1, 1) \end{aligned}$$

从而 $f(x) = S_1(x) + S_2(x) = \frac{x^2}{1+x^2} + 2x \arctan x - \ln(1+x^2), \quad x \in (-1, 1).$

(17) 【详解】由直线 l_1 过 $(0,0)$ 和 $(2,4)$ 两点知直线 l_1 的斜率为 2. 由直线 l_1 是曲线 C 在点 $(0,0)$ 的切线, 由导数的几何意义知 $f'(0) = 2$. 同理可得 $f'(3) = -2$. 另外由点 $(3,2)$ 是曲线 C 的

一个拐点知 $f''(3) = 0$.

由分部积分公式,

$$\begin{aligned}
 \int_0^3 (x^2 + x) f'''(x) dx &= \int_0^3 (x^2 + x) df''(x) = (x^2 + x) f''(x) \Big|_0^3 - \int_0^3 f''(x)(2x + 1) dx \\
 &= (3^2 + 3) f''(3) - (0^2 + 0) f''(0) - \int_0^3 f''(x)(2x + 1) dx \\
 &= - \int_0^3 (2x + 1) df'(x) = -(2x + 1) f'(x) \Big|_0^3 + 2 \int_0^3 f'(x) dx \\
 &= -(2 \times 3 + 1) f'(3) + (2 \times 0 + 1) f'(0) + 2 \int_0^3 f'(x) dx \\
 &= 16 + 2[f(3) - f(0)] = 20.
 \end{aligned}$$

(18) 【详解】

(I) 令 $F(x) = f(x) - 1 + x$, 则 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $F(0) = -1 < 0$, $F(1) = 1 > 0$,

于是由闭区间连续函数的介值定理知, 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $F(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = 1 - \xi$.

(II) 在 $[0, \xi]$ 和 $[\xi, 1]$ 上对 $f(x)$ 分别应用拉格朗日中值定理, 知存在两个不同的点

$$\eta \in (0, \xi), \zeta \in (\xi, 1), \text{ 使得 } f'(\eta) = \frac{f(\xi) - f(0)}{\xi - 0}, \quad f'(\zeta) = \frac{f(1) - f(\xi)}{1 - \xi}$$

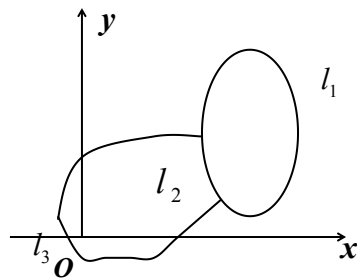
$$\text{于是 } f'(\eta) f'(\zeta) = \frac{f(\xi)}{\xi} \cdot \frac{1 - f(\xi)}{1 - \xi} = \frac{1 - \xi}{\xi} \cdot \frac{\xi}{1 - \xi} = 1.$$

(19) 【详解】

(I) 如图, 将 C 分解为: $C = l_1 + l_2$, 另作

一条曲线 l_3 围绕原点且与 C 相接, 则

$$\begin{aligned}
 &\oint_C \frac{\phi(y) dx + 2xy dy}{2x^2 + y^4} \\
 &= \oint_{l_1 + l_3} \frac{\phi(y) dx + 2xy dy}{2x^2 + y^4} - \oint_{l_2 + l_3} \frac{\phi(y) dx + 2xy dy}{2x^2 + y^4} = 0.
 \end{aligned}$$



(II) 设 $P = \frac{\phi(y)}{2x^2 + y^4}$, $Q = \frac{2xy}{2x^2 + y^4}$, P, Q 在单连通区域 $x > 0$ 内具有一阶连续偏导

数, 由(I)知, 曲线积分 $\int_L \frac{\phi(y) dx + 2xy dy}{2x^2 + y^4}$ 在该区域内与路径无关, 故当 $x > 0$ 时, 总有

$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. 经计算,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2y(2x^2 + y^4) - 4x \cdot 2xy}{(2x^2 + y^4)^2} = \frac{-4x^2y + 2y^5}{(2x^2 + y^4)^2}, \quad ①$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\varphi'(y)(2x^2 + y^4) - 4\varphi(y)y^3}{(2x^2 + y^4)^2} = \frac{2x^2\varphi'(y) + \varphi'(y)y^4 - 4\varphi(y)y^3}{(2x^2 + y^4)^2} \quad ②$$

比较①、②两式的右端, 得

$$\begin{cases} \varphi'(y) = -2y \\ \varphi'(y)y^4 - 4\varphi(y)y^3 = 2y^5 \end{cases} \quad ③$$

④

由③得 $\varphi(y) = -y^2 + c$, 将 $\varphi(y)$ 代入④得 $2y^5 - 4cy^3 = 2y^5$,

所以 $c = 0$, 从而 $\varphi(y) = -y^2$.

(20) 【详解】 (I) 二次型对应矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1-a & 1+a & 0 \\ 1+a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

由二次型的秩为 2, 知 $r(A) = 2 < 3$, 所以 $|A| = 0$,

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1-a & 1+a & 0 \\ 1+a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按第3行展开}} 2 \cdot (-1)^{3 \times 3} \cdot \begin{vmatrix} 1-a & 1+a \\ 1+a & 1-a \end{vmatrix} \\ &= 2 \begin{vmatrix} 1-a & 1+a \\ 1+a & 1-a \end{vmatrix} = 2 \times [(1-a)^2 - (1+a)^2] = -8a = 0, \end{aligned}$$

得 $a = 0$.

(II) 当 $a = 0$ 时, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 所以

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}$$

两边取行列式,

$$\begin{aligned}
 |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2) \cdot (-1)^{3 \times 3} \cdot \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
 &= (\lambda-2)[(\lambda-1)^2 - 1] = (\lambda-2)(\lambda^2 - 2\lambda) = \lambda(\lambda-2)^2
 \end{aligned}$$

令 $|\lambda E - A| = 0$, 解得 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 0$, 故 A 有特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 0$.

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ 时, 根据特征值的定义, 有 $(2E - A)X = 0$, 即 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$,

$r \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$, 因为未知数个数为 3, 故 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$ 的基础解系中含有 2

个(未知数的个数-系数矩阵的秩)线性无关的解, 同解方程组为 $x_1 - x_2 = 0$, 选 x_2, x_3 为自由

未知量, 分别取 $x_2 = 1, x_3 = 0$ 和 $x_2 = 0, x_3 = 1$, 得特征向量为:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

(根据特征向量的定义, α_1, α_2 即为特征值 λ_1, λ_2 所对应的特征向量)因为 $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = 0$, 故

α_1, α_2 正交.

当 $\lambda_3 = 0$ 时, 由 $(0E - A)X = 0 \Rightarrow -AX = 0 \Rightarrow AX = 0$, 即

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

对系数矩阵作初等行变换,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\text{行}-1\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

故

$$r \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2,$$

基础解系中含有 1 个(未知量的个数—系数矩阵的秩)线性无关的解向量, 同解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{cases},$$

选 x_1 为自由未知量, 取 $x_1 = 1$ (选取任意非零常数都可, 因为特征向量必须为非零向量, 不能选 0), 得特征向量为: $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

由于实对称矩阵对应于不同特征值的特征向量是相互正交的, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 两两正交, 将 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 单位化,

$$\eta_1 = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \eta_3 = \frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

其中 $\|\alpha_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$, $\|\alpha_2\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$, $\|\alpha_3\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$

取 $Q = [\eta_1 \ \eta_2 \ \eta_3]$, 即为所求的正交变换矩阵, 故 $Q^T Q = E$, 则 $Q^{-1} = Q$, 令 $x = Qy$, 则

$$Q^{-1} A Q = Q^T A Q = \text{diag} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 0 \end{pmatrix},$$

可化原二次型为标准形:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x^T A x = (Qy)^T A Q y = y^T Q^T A Q y = y^T \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 0 \end{bmatrix} y = 2y_1^2 + 2y_2^2.$$

(III) 方法 1: 由 $f(x_1, x_2, x_3) = 2y_1^2 + 2y_2^2 = 0$, 得 $y_1 = 0, y_2 = 0$ (因为方程中不含有 y_3)

则 $y_3 = k$ (k 为任意常数). 从而所求解为:

$$x = Qy = [\eta_1 \ \eta_2 \ \eta_3] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix} = 0 \cdot \eta_1 + 0 \cdot \eta_2 + k\eta_3 = k\eta_3 = \frac{k}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = k' \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

其中 $k' = \frac{k}{\sqrt{2}}$ 为任意常数.

方法 2: 用配方法, 方程 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 = 0$, 得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases},$$

系数矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的秩为 2, 因为未知数的个数为 3, 故它的基础解系中含有 1 个(未知数

的个数—系数矩阵的秩)线性无关的解向量, 选 x_1, x_3 为自由未知量, 取 $x_1 = 1$, 解得 $[1, -1, 0]^T$,

所以, $f = 0$ 的解为 $k[1, -1, 0]^T$, k 为任意常数.

(21) 【详解】 由 $AB = 0$ 知, B 的每一列均为 $Ax = 0$ 的解, 且 $r(A) + r(B) \leq 3$. (3 是 A 的列数或 B 的行数)

(1) 若 $k \neq 9$, β_1, β_3 不成比例, β_1, β_2 成比例, 则 $r(B) = 2$, 方程组 $Ax = 0$ 的解向量中至少有两个线性无关的解向量, 故它的基础解系中解向量的个数 ≥ 2 , 又基础解系中解向量的个数 = 未知数的个数 $- r(A) = 3 - r(A)$, 于是 $r(A) \leq 1$.

又矩阵 A 的第一行元素 (a, b, c) 不全为零, 显然 $r(A) \geq 1$, 故 $r(A) = 1$. 可见此时 $Ax = 0$ 的基础解系由 $3 - r(A) = 2$ 个线性无关解向量组成, β_1, β_3 是方程组的解且线性无关, 可作为其基础解系, 故 $Ax = 0$ 的通解为:

$$x = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ k \end{pmatrix}, k_1, k_2 \text{ 为任意常数.}$$

(2) 若 $k = 9$, 则 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 均成比例, 故 $r(B) = 1$, 从而 $1 \leq r(A) \leq 2$. 故 $r(A) = 1$ 或 $r(A) = 2$.

①若 $r(A) = 2$, 则方程组的基础解系由一个线性无关的解组成, β_1 是方程组 $Ax = 0$ 的基础

解系, 则 $Ax = 0$ 的通解为: $x = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, k_1$ 为任意常数.

②若 $r(A) = 1$, 则 A 的三个行向量成比例, 因第 1 行元素 (a, b, c) 不全为零, 不妨设 $a \neq 0$, 则 $Ax = 0$ 的同解方程组为: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$, 系数矩阵的秩为 1, 故基础解系由 $3 - 1 = 2$ 个线性无关解向量组成, 选 x_2, x_3 为自由未知量, 分别取 $x_2 = 1, x_3 = 0$ 或 $x_2 = 0, x_3 = 1$, 方

程组的基础解系为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 则其通解为 $x = k_1 \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, k_1, k_2$ 为任意

常数.

(22) 【详解】(I)由边缘密度函数的定义: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$, $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$

则关于 X 的边缘概率密度为:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^{2x} dy, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

关于 Y 的边缘概率密度

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_{\frac{y}{2}}^1 dx, & 0 < y < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} = \begin{cases} 1 - \frac{y}{2}, & 0 < y < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

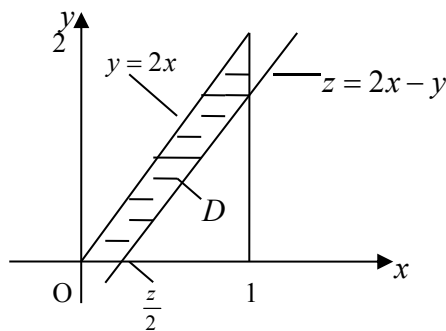
(因为 $0 < x < 1, 0 < y < 2x$, 故 x 的取值范围为 $\frac{y}{2} < x < 1$)

(II)由分布函数的定义: $F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{2X - Y \leq z\}$

(1) 当 $z < 0$ 时, $F_Z(z) = P\{2X - Y \leq z\} = 0$ (由定义域为 $0 < x < 1, 0 < y < 2x$, 故 $2X - Y > 0$, 则 $\{2X - Y \leq 0\}$ 是不可能事件)

(2) 当 $0 \leq z < 2$ 时, 如图转换成阴影部分的二重积分

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{2X - Y \leq z\} \\ &= \iint_{2x-y \leq z} f(x, y) dx dy \\ &= 1 - \iint_{2x-y > z} f(x, y) dx dy \\ &= 1 - \int_{\frac{z}{2}}^1 dx \int_0^{2x-z} dy = z - \frac{1}{4} z^2; \end{aligned}$$



(3) 当 $z \geq 2$ 时, $F_Z(z) = P\{2X - Y \leq z\} = 1$. (因 X 最大取 1, Y 最小取 0, 故 $2X - Y$ 最大就只能取到 2, 所以 $2X - Y \leq 2$ 是必然事件)

所以分布函数为: $F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ z - \frac{1}{4} z^2, & 0 \leq z < 2, \\ 1, & z \geq 2. \end{cases}$

由密度函数与分布函数的关系: $f(x) = F'(x)$

故所求的概率密度为: $f_z(z) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}z, & 0 < z < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

(23) 【详解】由题设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 2)$ 为来自总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 知

$X_1, X_2, \dots, X_n (n > 2)$ 相互独立, 且 $EX_i = 0, DX_i = \sigma^2 (i = 1, 2, \dots, n)$,

$$E\bar{X} = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{\sum_{i=1}^n EX_i}{n} = \frac{n \times 0}{n} = 0$$

$$D\bar{X} = D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n DX_i = \frac{DX}{n} = \frac{\sigma^2}{n}$$

(方差的性质: $D(cX) = c^2 DX$, $D(X+Y) = DX + DY$ (X, Y 独立))

$$EY_i = E(X_i - \bar{X}) = EX_i - E\bar{X} = 0, i = 1, 2, \dots, n.$$

(根据期望的性质: $EcX = cEX$, $E(X+Y) = EX + EY$)

$$(I) DY_i = D(X_i - \bar{X}) = D\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)X_i - \frac{1}{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n X_j\right] \text{ (由于 } X_i \text{ 与 } \bar{X} \text{ 不独立, 所以把 } \bar{X} \text{ 中含有}$$

X_i 的剔出来, 则 X_i 与剩下的就相互独立)

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 DX_i + \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n DX_j = \frac{(n-1)^2 \sigma^2}{n^2} + \frac{\sigma^2}{n^2} \cdot (n-1) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$$

(方差的性质: $D(cX) = c^2 DX$, $D(X+Y) = DX + DY$ (X, Y 独立))

(II) 由协方差的定义:

$$\text{Cov}(Y_1, Y_n) = E[(Y_1 - EY_1)(Y_n - EY_n)] = E(Y_1 Y_n) \quad (EY_i = 0, i = 1, 2, \dots, n)$$

$$= E[(X_1 - \bar{X})(X_n - \bar{X})] = E(X_1 X_n - X_1 \bar{X} - X_n \bar{X} + \bar{X}^2)$$

$$= E(X_1 X_n) - E(X_1 \bar{X}) - E(X_n \bar{X}) + E\bar{X}^2$$

又 $E(X_1 X_n) = EX_1 EX_n = 0 \times 0 = 0$ (因 X_1, X_n 独立)

$$E\bar{X}^2 = D\bar{X} + (E\bar{X})^2 = \frac{\sigma^2}{n} + 0 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$E(X_1\bar{X}) = E\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_1 X_j\right] = E\left[\frac{1}{n}X_1^2 + \frac{1}{n}\sum_{j=2}^n X_1 X_j\right] = \frac{1}{n}EX_1^2 + \frac{1}{n}\sum_{j=2}^n EX_1 EX_j$$

$$= \frac{1}{n}(DX_1 + (EX_1)^2) + 0 = \frac{1}{n}(\sigma^2 + 0) = \frac{\sigma^2}{n}$$

同理 $E(X_n\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ (因 X_1 与 X_j 独立 $j = 2, \dots, n$)

所以 $Cov(Y_1, Y_n) = E(X_1 X_n) - E(X_1\bar{X}) - E(X_n\bar{X}) + E\bar{X}^2 = 0 - \frac{\sigma^2}{n} - \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{n} = -\frac{\sigma^2}{n}$