2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

(1) 设函数 $f(x)=\int_0^{x^2}\ln(2+t)dt$，则 $f'(x)$ 的零点个数(　　)

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

(2) 函数 $f(x,y)=\arctan\dfrac{x}{y}$ 在点 $(0,1)$ 处的梯度等于(　　)

(A) $\boldsymbol{i}$　　(B) $\boldsymbol{-i}$　　(C) $\boldsymbol{j}$　　(D) $-\boldsymbol{j}$

(3) 在下列微分方程中，以 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$ (C_1,C_2,C_3 为任意常数)为通解的是(　　)

(A) $y'''+y''-4y'-4y=0$.　　(B) $y'''+y''+4y'+4y=0$.

(C) $y'''-y''-4y'+4y=0$.　　(D) $y'''-y''+4y'-4y=0$.

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，$\{x_n\}$ 为数列，下列命题正确的是(　　)

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.　　(B) 若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.

(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛.　　(D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛.

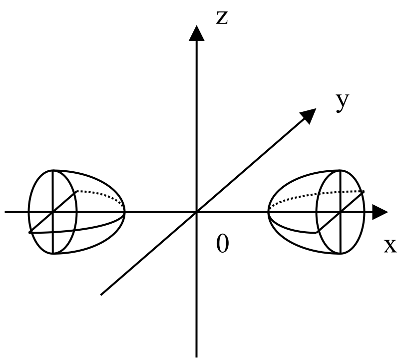
(5) 设 A 为 n 阶非零矩阵，E 为 n 阶单位矩阵，满足 $A^3=0$，则(　　)

(A) $E-A$ 不可逆，$E+A$ 不可逆.　　(B) $E-A$ 不可逆，$E+A$ 可逆.

(C) $E-A$ 可逆，$E+A$ 可逆.　　(D) $E-A$ 可逆，$E+A$ 不可逆.

(6) 设 A 为 3 阶实对称矩阵，如果二次曲面方程 $(x,y,z)A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=1$ 在正交变换下的标准方程的图形如图，则 A 的正特征值个数为(　　)

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.



(7) 设随机变量 X,Y 独立同分布，且 X 分布函数为 $F(x)$，则 $Z=\max\{X,Y\}$ 分布函数为 ( )

(A) $F^2(x)$. (B) $F(x)F(y)$.

(C) $1-[1-F(x)]^2$. (D) $[1-F(x)][1-F(y)]$.

(8)设随机变量 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(1,4)$，且相关系数 $\rho_{XY}=1$，则( )

(A) $P\{Y=-2X-1\}=1$. (B) $P\{Y=2X-1\}=1$.

(C) $P\{Y=-2X+1\}=1$. (D) $P\{Y=2X+1\}=1$.

二、填空题：9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 微分方程 $xy'+y=0$ 满足条件 $y(1)=1$ 的解是 $y=$ ________.

(10) 曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为________.

(11) 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛，在 $x=-4$ 处发散，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 的收敛域为________.

(12) 设曲面 Σ 是 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧，则 $\iint\limits_{\Sigma}xydydz+xdzdx+x^2dxdy=$ ________.

(13) 设 A 为 2 阶矩阵，α_1,α_2 为线性无关的 2 维列向量，$A\alpha_1=0,A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$，则 A 的非零特征值为________.

(14) 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，则 $P\{X=EX^2\}=$ ________.

三、解答题：15－23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 9 分)

求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[\sin x-\sin\left(\sin x\right)\right]\sin x}{x^4}$

(16)(本题满分 9 分)

计算曲线积分$\int_L \sin 2xdx+2\left(x^2-1\right)ydy$，其中$L$是曲线$y=\sin x$上从点$\left(0,0\right)$到点$\left(\pi,0\right)$的一段.

(17)(本题满分 11 分)

已知曲线$C:\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0\\ x+y+3z=5\end{cases}$，求曲线$C$距离$XOY$面最远的点和最近的点.

(18)(本题满分 10 分)

设$f\left(x\right)$是连续函数，

(I) 利用定义证明函数$F\left(x\right)=\int_0^x f\left(t\right)dt$可导，且$F'\left(x\right)=f\left(x\right)$.

(II) 当$f\left(x\right)$是以 2 为周期的周期函数时，证明函数$G\left(x\right)=2\int_0^x f\left(t\right)dt-x\int_0^2 f\left(t\right)dt$也是以 2 为周期的周期函数

(19)(本题满分 11 分)

$f\left(x\right)=1-x^2\left(0\le x\le\pi\right)$展开成(以$2\pi$为周期的)余弦级数，并求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^{n-1}}{n^2}$的和。

(20)(本题满分 10 分)

$A=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$，$\alpha,\beta$是三维列向量，$\alpha^T$为$\alpha$的转置，$\beta^T$为$\beta$的转置

(I) 证$r(A)\le 2$；

(II) 若α,β线性相关，则$r(A)<2$.

(21)(本题满分 12 分)

设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2a & 1 & & \\ a^2 & 2a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & a^2 & 2a \end{pmatrix}_{n\times n}$，现矩阵 A 满足方程 $AX=B$，其中 $X=\left(x_1,\cdots,x_n\right)^T$，

$B=\left(1,0,\cdots,0\right)^T$，

(I) 求证 $\left|A\right|=\left(n+1\right)a^n$

(II) a 为何值，方程组有唯一解，求 x_1

(III) a 为何值，方程组有无穷多解，求通解

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 的概率分布为 $P\left\{X=i\right\}=\dfrac{1}{3}\left(i=-1,0,1\right)$，$Y$ 的概率密度为 $f_Y\left(y\right)=\begin{cases}1 & 0\le y\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$，记 $Z=X+Y$

(I) 求 $P\left\{Z\le\dfrac{1}{2}\middle|X=0\right\}$

(II) 求 Z 的概率密度.

(23)(本题满分 11 分)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体为 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本.记 $\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，

$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，$T=\bar{X}^2-\dfrac{1}{n}S^2$

(I) 证 T 是 μ^2 的无偏估计量.

(II) 当 $\mu=0,\sigma=1$ 时，求 DT.

2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析

一、选择题

(1)【答案】B

【详解】$f'(x)=[\ln(2+x^2)]\cdot 2x$，$f'(0)=0$，即 $x=0$ 是 $f'(x)$ 的一个零点

又 $f''(x)=2\ln(2+x^2)+\dfrac{4x^2}{2+x^2}>0$，从而 $f'(x)$ 单调增加（$x\in(-\infty,+\infty)$）

所以 $f'(x)$ 只有一个零点.

(2)【答案】A

【详解】因为 $f'_x=\dfrac{1/y}{1+x^2/y^2}$，$f'_y=\dfrac{-x/y^2}{1+x^2/y^2}$，所以 $f'_x(0,1)=1$，$f'_y(0,1)=0$

所以 $\mathbf{grad}f(0,1)=1\cdot\boldsymbol{i}+0\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}$

(3)【答案】D

【详解】由微分方程的通解中含有 e^x、$\cos 2x$、$\sin 2x$ 知齐次线性方程所对应的特征方程有根 $r=1,r=\pm 2i$，所以特征方程为 $(r-1)(r-2i)(r+2i)=0$，即 $r^3-r^2+4r-4=0$. 故以已知函数为通解的微分方程是 $y'''-y''+4y'-4y=0$

(4)【答案】B

【详解】因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，且 $\{x_n\}$ 单调. 所以 $\{f(x_n)\}$ 单调且有界. 故 $\{f(x_n)\}$ 一定存在极限

(5)【答案】C

【详解】$(E-A)(E+A+A^2)=E-A^3=E$，$(E+A)(E-A+A^2)=E+A^3=E$

故 $E-A,E+A$ 均可逆.

(6)【答案】B

【详解】图示的二次曲面为双叶双曲面，其方程为 $\dfrac{x'^2}{a^2}-\dfrac{y'^2}{b^2}-\dfrac{z'^2}{c^2}=1$，即二次型的标准型

为 $f=\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}-\frac{z'^2}{c^2}$，而标准型的系数即为 A 的特征值.

(7)【答案】A

【详解】$F_Z(z)=P(Z\le z)=P\{\max\{X,Y\}\le z\}=P(X\le z)P(Y\le z)=F(z)F(z)=F^2(z)$

(8)【答案】D

【详解】用排除法. 设 $Y=aX+b$，由 $\rho_{XY}=1$，知道 X,Y 正相关，得 $a>0$，排除 (A)、(C)

由 $X\sim N(0,1),Y\sim N(1,4)$，得 $EX=0,EY=1,$

所以 $E(Y)=E(aX+b)=aEX+b=a\times 0+b=1,$ 所以 $b=1$. 排除 (B). 故选择 (D)

二、填空题

(9) 【答案】$1/x$

【详解】由 $\frac{dy}{dx}=\frac{-y}{x}$，两端积分得 $-\ln|y|=\ln|x|+C_1$，所以 $\frac{1}{|y|}=C|x|$，又 $y(1)=1$，所以 $y=\frac{1}{x}$.

(10) 【答案】$y=x+1$

【详解】设 $F(x,y)=\sin(xy)+\ln(y-x)-x$，则 $\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{y\cos(xy)-\frac{1}{y-x}-1}{x\cos(xy)+\frac{1}{y-x}}$，

将 $y(0)=1$ 代入得 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=1$，所以切线方程为 $y-1=x-0$，即 $y=x+1$

(11)【答案】$(1,5]$

【详解】幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^n$ 的收敛区间以 $x=-2$ 为中心，因为该级数在 $x=0$ 处收敛，在 $x=-4$ 处发散，所以其收敛半径为 2，收敛域为 $(-4,0]$，即 $-2<x+2\le 2$ 时级数收敛，

亦即 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ 的收敛半径为 2，收敛域为 $(-2,2]$. 则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-3)^n$ 的收敛半径为 2，由 $-2 < x-3 \le 2$ 得 $1 < x \le 5$，即幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-3)^n$ 的收敛域为 $(1,5]$

(12)【答案】4π

【详解】加 $\Sigma_1 : z = 0 (x^2 + y^2 \le 4)$ 的下侧，记 Σ 与 Σ_1 所围空间区域为 Ω，则

$$
\begin{aligned}
&\iint_{\Sigma} xydydz + xdzdx + x^2 dxdy \\
&= \iint_{\Sigma+\Sigma_1} xydydz + xdzdx + x^2 dxdy - \iint_{\Sigma_1} xydydz + xdzdx + x^2 dxdy \\
&= \iiint_{\Omega} ydxdydz - (-\iint_{x^2+y^2\le 4} x^2 dxdy) = 0 + \frac{1}{2}\iint_{x^2+y^2\le 4} (x^2+y^2) dxdy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^3 dr = 4\pi
\end{aligned}
$$

(13)【答案】1

【详解】$A(\alpha_1,\alpha_2) = (A\alpha_1, A\alpha_2) = (0, 2\alpha_1 + \alpha_2) = (\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

记 $P = (\alpha_1,\alpha_2)$，$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，则 $AP = PB$

因为 α_1,α_2 线性无关，所以 P 可逆. 从而 $B = P^{-1}AP$，即 A 与 B 相似.

由 $|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1) = 0$，得 $\lambda = 0$ 及 $\lambda = 1$ 为 B 的特征值.

又相似矩阵有相同的特征值，故 A 的非零特征值为 1.

(14)【答案】$\frac{1}{2e}$

【详解】由 $DX = EX^2 - (EX)^2$，得 $EX^2 = DX + (EX)^2$，又因为 X 服从参数为 1 的泊松分布，所以 $DX = EX = 1$，所以 $EX^2 = 1 + 1 = 2$，所以 $P\{X = 2\} = \frac{1^2}{2!}e^{-1} = \frac{1}{2}e^{-1}$

三、解答题

(15) 【详解】

方法一： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos(\sin x)\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sin x)}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin^2 x}{3x^2}=\frac{1}{6}$$

方法二： $\because\ \sin x=x-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)\qquad \sin(\sin x)=\sin x-\dfrac{1}{6}\sin^3 x+o(\sin^3 x)$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin^4 x}{6x^4}+\frac{o(\sin^4 x)}{x^4}\right]=\frac{1}{6}$$

(16) 【详解】

方法一：（直接取 x 为参数将对坐标的曲线积分化成定积分计算）

$$\int_L \sin 2xdx+2(x^2-1)ydy$$

$$=\int_0^\pi[\sin 2x+2(x^2-1)\sin x\cdot\cos x]dx=\int_0^\pi x^2\sin 2xdx$$

$$=-\frac{x^2}{2}\cos 2x\Big|_0^\pi+\int_0^\pi x\cos 2xdx=-\frac{\pi^2}{2}+\frac{x}{2}\sin 2x\Big|_0^\pi-\frac{1}{2}\int_0^\pi\sin 2xdx=-\frac{\pi^2}{2}$$

方法二：（添加 x 轴上的直线段用格林公式化成二重积分计算）

取 L_1 为 x 轴上从点 $(\pi,0)$ 到点 $(0,0)$ 的一段，D 是由 L 与 L_1 围成的区域

$$\int_L \sin 2xdx+2(x^2-1)ydy$$

$$=\int_{L+L_1}\sin 2xdx+2(x^2-1)ydy-\int_{L_1}\sin 2xdx+2(x^2-1)ydy$$

$$=-\iint_D 4xydxdy-\int_\pi^0\sin 2xdx=-\int_0^\pi dx\int_0^{\sin x}4xydy-\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^\pi=-\int_0^\pi 2x\sin^2 xdx$$

$$=-\int_0^\pi x(1-\cos 2x)dx=-\frac{x^2}{2}\Big|_0^\pi+\frac{x}{2}\sin 2x\Big|_0^\pi-\frac{1}{2}\int_0^\pi\sin 2xdx=-\frac{\pi^2}{2}$$

方法三：（将其拆成 $\int_L\sin 2xdx-2ydy+\int_L 2x^2ydy$，前者与路径无关，选择沿 x 轴上的直线段积分，后者化成定积分计算）

$$\int_L \sin 2xdx+2(x^2-1)ydy=\int_L\sin 2xdx-2ydy+\int_L 2x^2ydy=I_1+I_2$$

对于 I_1，因为 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=0$，故曲线积分与路径无关，取 $(0,0)$ 到 $(\pi,0)$ 的直线段

积分 $I_1=\int_0^\pi\sin 2xdx=0$

$$I_2=\int_L 2x^2ydy=\int_0^{\pi}2x^2\sin x\cos xdx=\int_0^{\pi}x^2\sin 2xdx=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}x^2d\cos 2x$$

$$=-\frac{1}{2}x^2\cos 2x\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}2x\cos 2xdx=-\frac{1}{2}\pi^2+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}xd\sin 2x$$

$$=-\frac{1}{2}\pi^2+\frac{1}{2}\left[x\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi}=-\frac{1}{2}\pi^2$$

所以，原式$=-\dfrac{1}{2}\pi^2$

(17) 【详解】点(x,y,z)到xOy面的距离为$|z|$，故求C上距离xOy面的最远点和最近点的坐标，等价于求函数$H=z^2$在条件$x^2+y^2-2z^2=0$与$x+y+3z=5$下的最大值点和最小值点.

令　$L(x,y,z,\lambda,\mu)=z^2+\lambda(x^2+y^2-2z^2)+\mu(x+y+3z-5)$

所以 $$\begin{cases}L'_x=2\lambda x+\mu=0 & (1)\\ L'_y=2\lambda y+\mu=0 & (2)\\ L'_z=2z-4\lambda z+3\mu=0 & (3)\\ x^2+y^2-2z^2=0 & (4)\\ x+y+3z=5 & (5)\end{cases}$$

由(1)(2)得$x=y$，代入(4)(5)有 $\begin{cases}x^2-z^2=0\\ 2x+3z=5\end{cases}$，

解得$\begin{cases}x=-5\\ y=-5\\ z=5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1\\ y=1\\ z=1\end{cases}$

(18)【详解】(I) 对任意的x，由于f是连续函数，所以

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{F(x+\triangle x)-F(x)}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\int_0^{x+\triangle x}f(t)dt-\int_0^{x}f(t)dt}{\triangle x}$$

$$=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\int_x^{x+\triangle x}f(t)dt}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(\xi)\triangle x}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0}f(\xi)$$ ，其中ξ介于x与$x+\triangle x$之间

由于$\lim\limits_{\triangle x\to 0}f(\xi)=f(x)$，可知函数$F(x)$在$x$处可导，且$F'(x)=f(x)$.

(II)

方法一： 要证明$G(x)$以 2 为周期，即要证明对任意的x，都有$G(x+2)=G(x)$，

$H(x)=G(x+2)-G(x)$，则

$$H'(x)=\left(2\int_0^{x+2}f(t)dt-(x+2)\int_0^2 f(t)dt\right)'-\left(2\int_0^x f(t)dt-x\int_0^2 f(t)dt\right)'$$
$$=2f(x+2)-\int_0^2 f(t)dt-2f(x)+\int_0^2 f(t)dt=0$$

又因为 $H(0)=G(2)-G(0)=\left(2\int_0^2 f(t)dt-2\int_0^2 f(t)dt\right)-0=0$

所以 $H(x)=0$，即 $G(x+2)=G(x)$

方法二：由于 f 是以 2 为周期的连续函数，所以对任意的 x，有

$$G(x+2)-G(x)=2\int_0^{x+2}f(t)dt-(x+2)\int_0^2 f(t)dt-2\int_0^x f(t)dt+x\int_0^2 f(t)dt$$
$$=2\left[\int_0^2 f(t)dt+\int_2^{x+2}f(t)dt-\int_0^2 f(t)dt-\int_0^x f(t)dt\right]$$
$$=2\left[-\int_0^x f(t)dt+\int_0^x f(u+2)du\right]=2\int_0^x[f(t+2)-f(t)]dt=0$$

即 $G(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

(19)【详解】

由于 $a_0=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)dx=2-\dfrac{2\pi^2}{3}$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\cos nxdx=(-1)^{n+1}\frac{4}{n^2} \qquad n=1,2,\cdots$$

所以 $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=1-\dfrac{\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx \qquad 0\le x\le \pi$

令 $x=0$，有 $f(0)=1-\dfrac{\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

又 $f(0)=1$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{12}$

(20)【详解】(I) $r(A)=r(\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\le r(\alpha\alpha^T)+r(\beta\beta^T)\le r(\alpha)+r(\beta)\le 2$

(II) 由于 α,β 线性相关，不妨设 $\alpha=k\beta$. 于是

$$r(A)=r(\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)=r\left((1+k^2)\beta\beta^T\right)\le r(\beta)\le 1<2$$

(21)【详解】(I)**证法一：**

$$|A|=\begin{vmatrix}2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & a^2 & 2a\end{vmatrix} \xlongequal{r_2-\frac{1}{2}ar_1} \begin{vmatrix}2a & 1 & & & & \\ 0 & \frac{3a}{2} & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & a^2 & 2a\end{vmatrix} = \cdots$$

$$\xlongequal{r_n-\frac{n-1}{n}ar_{n-1}} \begin{vmatrix}2a & 1 & & & & \\ 0 & \frac{3a}{2} & 1 & & & \\ & 0 & \frac{4a}{3} & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 0 & \frac{(n+1)a}{n}\end{vmatrix} = 2a\cdot\frac{3a}{2}\cdot\frac{4a}{3}\cdots\cdot\frac{(n+1)a}{n}=(n+1)a^n$$

证法二：记 $D_n=|A|$，下面用数学归纳法证明 $D_n=(n+1)a^n$.

当 $n=1$ 时，$D_1=2a$，结论成立.

当 $n=2$ 时，$D_2=\begin{vmatrix}2a & 1\\ a^2 & 2a\end{vmatrix}=3a^2$，结论成立.

假设结论对小于 n 的情况成立．将 D_n 按第 1 行展开得

$$D_n=2aD_{n-1}-\begin{vmatrix}a^2 & 1 & & & & \\ 0 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & a^2 & 2a\end{vmatrix}$$

$$=2aD_{n-1}-a^2D_{n-2}=2ana^{n-1}-a^2(n-1)a^{n-2}=(n+1)a^n$$

故　　$|A|=(n+1)a^n$

证法三：记 $D_n=|A|$，将其按第一列展开得　　$D_n=2aD_{n-1}-a^2D_{n-2}$，

所以　　$D_n-aD_{n-1}=aD_{n-1}-a^2D_{n-2}=a(D_{n-1}-aD_{n-2})$

$$=a^2(D_{n-2}-aD_{n-3})=\cdots=a^{n-2}(D_2-aD_1)=a^n$$

即 $$D_n=a^n+aD_{n-1}=a^n+a(a^{n-1}+aD_{n-2})=2a^n++a^2D_{n-2}$$

$$=\cdots=(n-2)a^n+a^{n-2}D_2=(n-1)a^n+a^{n-1}D_1$$

$$=(n-1)a^n+a^{n-1}\cdot 2a=(n+1)a^n$$

(II)因为方程组有唯一解，所以由 $Ax=B$ 知 $\left|A\right|\neq 0$，又 $\left|A\right|=(n+1)a^n$，故 $a\neq 0$.

由克莱姆法则，将 D_n 的第 1 列换成 b，得行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & \\ 0 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{n\times n}=\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}=D_{n-1}=na^{n-1}$$

所以 $$x_1=\frac{D_{n-1}}{D_n}=\frac{n}{(n+1)a}$$

(III)方程组有无穷多解，由 $\left|A\right|=0$，有 $a=0$，则方程组为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

此时方程组系数矩阵的秩和增广矩阵的秩均为 $n-1$，所以方程组有无穷多解，其通解为 $k\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}^T+\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}^T,k$ 为任意常数.

(22)【详解】

(I) $$P(Z\leq\frac{1}{2}\big|X=0)=P(X+Y\leq\frac{1}{2}\big|X=0)=\frac{P(X=0,Y\leq\frac{1}{2})}{P(X=0)}=P(Y\leq\frac{1}{2})=\int_0^{\frac{1}{2}}1dy=\frac{1}{2}$$

(II) $$F_Z(z)=P\{Z\leq z\}=P\{X+Y\leq z\}$$

$$=P\{X+Y\leq z,X=-1\}+P\{X+Y\leq z,X=0\}+P\{X+Y\leq z,X=1\}$$

$$=P\{Y\le z+1,X=-1\}+P\{Y\le z,X=0\}+P\{Y\le z-1,X=1\}$$

$$=P\{Y\le z+1\}P\{X=-1\}+P\{Y\le z\}P\{X=0\}+P\{Y\le z-1\}P\{X=1\}$$

$$=\frac{1}{3}\left[P\{Y\le z+1\}+P\{Y\le z\}+P\{Y\le z-1\}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[F_Y(z+1)+F_Y(z)+F_Y(z-1)\right]$$

所以 $f_Z(z)=\frac{1}{3}\left[f_Y(z+1)+f_Y(z)+f_Y(z-1)\right]=\begin{cases}\frac{1}{3}, & -1\le z<2\\ 0, & 其它\end{cases}$

(23)【详解】

(I) 因为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，所以 $\overline{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$，从而 $E\overline{X}=\mu,\ D\overline{X}=\frac{\sigma^2}{n}$.

因为 $E(T)=E(\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2)=E\overline{X}^2-\frac{1}{n}E(S^2)$

$$=D\overline{X}+(E\overline{X})^2-\frac{1}{n}E(S^2)=\frac{1}{n}\sigma^2+\mu^2-\frac{1}{n}\sigma^2=\mu^2$$

所以，T 是 μ^2 的无偏估计

(II)

方法一： $D(T)=ET^2-(ET)^2$，$E(T)=0$，$E(S^2)=\sigma^2=1$

所以 $D(T)=ET^2=E(\overline{X}^4-\frac{2}{n}\overline{X}^2\cdot S^2+\frac{S^4}{n^2})$

$$=E(\overline{X}^4)-\frac{2}{n}E(\overline{X}^2)E(S^2)+\frac{1}{n^2}E(S^4)$$

因为 $X\sim N(0,1)$，所以 $\overline{X}\sim N(0,\frac{1}{n})$，

有 $E\overline{X}=0,D\overline{X}=\frac{1}{n}$，$E\overline{X}^2=D\overline{X}+\left(E\overline{X}\right)^2=\frac{1}{n}$

所以 $E(\overline{X}^4)=D(\overline{X}^2)+E^2(\overline{X}^2)=D\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sqrt{n}\overline{X}\right)^2+\left[D(\overline{X})+E^2(\overline{X})\right]^2$

$$=\frac{1}{n^2}D\left(\sqrt{n}\overline{X}\right)^2+\left[D(\overline{X})\right]^2=\frac{1}{n^2}\cdot 2+\left(\frac{1}{n}\right)^2=\frac{3}{n^2}$$

$$ES^4=E\left[\left(S^2\right)^2\right]=DS^2+(ES^2)^2=DS^2+1$$

因为$W=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=(n-1)S^2\sim\chi^2(n-1)$，所以$DW=2(n-1)$，

又因为$DW=(n-1)^2DS^2$，所以$DS^2=\frac{2}{(n-1)}$,所以$ES^4=\frac{2}{(n-1)}+1=\frac{n+1}{n-1}$

所以 $ET^2=\frac{3}{n^2}-\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdot1+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n+1}{n-1}=\frac{2}{n(n-1)}$.

方法二：当$\mu=0,\sigma=1$时

$$D(T)=D(\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2)\qquad (注意\ \overline{X}\ 和\ S^2\ 独立)$$

$$=D\overline{X}^2+\frac{1}{n^2}DS^2=\frac{1}{n^2}D\left(\sqrt{n}\overline{X}\right)^2+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{(n-1)^2}D\left[(n-1)S^2\right]$$

$$=\frac{1}{n^2}\cdot2+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{(n-1)^2}\cdot2(n-1)=\frac{2}{n(n-1)}$$