2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

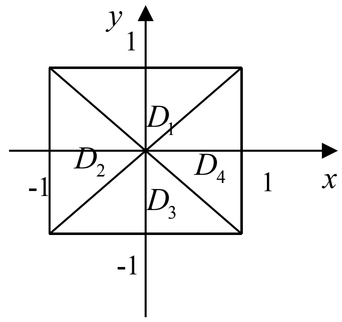
一、选择题：1～8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分.

(1) 当 $x\to 0$ 时, $f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小, 则 ( )

(A) $a=1,b=-\frac{1}{6}$.　　(B) $a=1,b=\frac{1}{6}$.

(C) $a=-1,b=-\frac{1}{6}$.　　(D) $a=-1,b=\frac{1}{6}$.

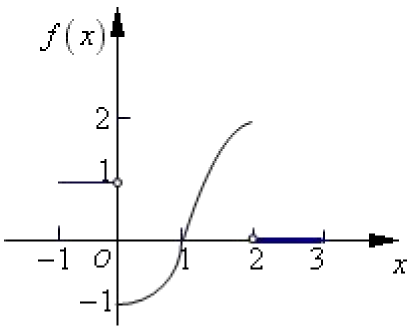
(2) 如图, 正方形 $\left\{(x,y)\,\middle|\,|x|\le 1,|y|\le 1\right\}$ 被其对角线划分为四个区域 $D_k\,(k=1,2,3,4)$, $I_k=\iint\limits_{D_k} y\cos x\,dxdy$, 则 $\max\limits_{1\le k\le 4}\{I_k\}=$ ( )



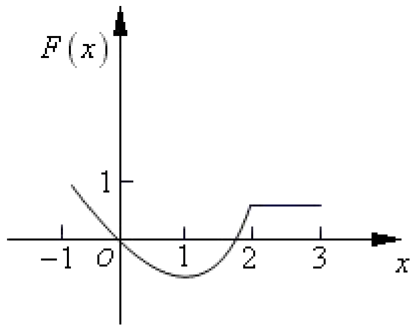
(A) I_1.　　(B) I_2.

(C) I_3.　　(D) I_4.

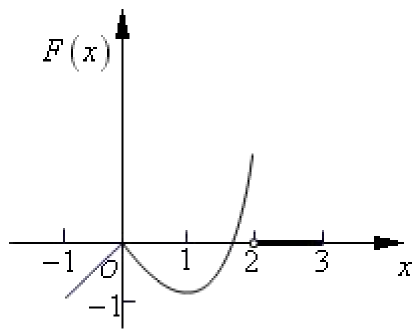
(3) 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形为



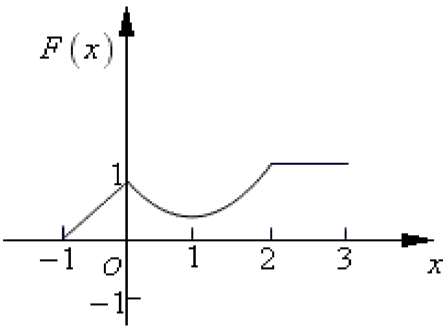
则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 的图形为 ( )



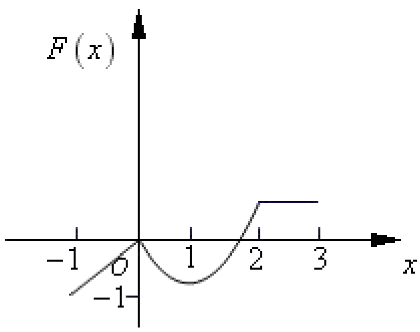
(A)



(B)



(C)



(D)

(4) 设有两个数列$\{a_n\},\{b_n\}$, 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 则 ( )

(A) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛.

(B) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$发散.

(C) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$收敛时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$收敛.

(D) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$发散时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$发散.

(5) 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是 3 维向量空间$R^3$的一组基, 则由基$\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3$到基

$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$的过渡矩阵为 ( )

(A) $\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}$.

(B) $\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&3\\1&0&3\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{6}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&\frac{1}{6}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$.

(D) $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$.

(6) 设A,B均为 2 阶矩阵, A^*,B^*分别为A,B的伴随矩阵, 若$|A|=2,|B|=3$, 则分块矩阵

$\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}$的伴随矩阵为 ( )

(A) $\begin{pmatrix}O&3B^*\\2A^*&O\end{pmatrix}$.

(B) $\begin{pmatrix}O&2B^*\\3A^*&O\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}O&3A^*\\2B^*&O\end{pmatrix}$.

(D) $\begin{pmatrix}O&2A^*\\3B^*&O\end{pmatrix}$.

(7) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数, 则 $EX=$ ( )

(A) 0. (B) 0.3. (C) 0.7. (D) 1.

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$, Y 的概率分布为 $P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$. 记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z=XY$ 的分布函数, 则函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数为 ( )

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

二、填空题：9-14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, $z=f(x,xy)$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$__________.

(10) 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x$, 则非齐次方程 $y''+ay'+by=x$ 满足条件 $y(0)=2, y'(0)=0$ 的解为 $y=$__________.

(11) 已知曲线 $L: y=x^2\left(0\le x\le\sqrt{2}\right)$, 则 $\int_L xds=$__________.

(12) 设 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$, 则 $\iiint\limits_{\Omega} z^2dxdydz=$____________.

(13) 若 3 维列向量 α,β 满足 $\alpha^T\beta=2$, 其中 α^T 为 α 的转置, 则矩阵 $\beta\alpha^T$ 的非零特征值为____________.

(14) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 为来自二项分布总体 $B(n,p)$ 的简单随机样本, $\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差. 若 $\overline{X}+kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量, 则 $k=$____________.

三、解答题：15－23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 9 分)

求二元函数 $f(x,y)=x^2\left(2+y^2\right)+y\ln y$ 的极值.

(16)(本题满分 9 分)

设 a_n 为曲线 $y=x^n$ 与 $y=x^{n+1}\ (n=1,2,\cdots)$ 所围成区域的面积, 记 $S_1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, $S_2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$, 求 S_1 与 S_2 的值.

(17)(本题满分 11 分)

椭球面 S_1 是椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 绕 x 轴旋转而成, 圆锥面 S_2 是由过点 $(4,0)$ 且与椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 相切的直线绕 x 轴旋转而成.

(Ⅰ)求 S_1 及 S_2 的方程;

(Ⅱ)求 S_1 与 S_2 之间的立体体积.

(18)(本题满分 11 分)

(Ⅰ)证明拉格朗日中值定理:若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 可导, 则存在 $\xi\in(a,b)$,

使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

(Ⅱ)证明:若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 在 $(0,\delta)(\delta>0)$ 内可导, 且 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=A$, 则

$f'_+(0)$ 存在, 且 $f'_+(0)=A$.

(19)(本题满分 10 分)

计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, 其中 Σ 是曲面 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧.

(20)(本题满分 11 分)

设

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix},\ \xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

(Ⅰ)求满足 $A\xi_2=\xi_1, A^2\xi_3=\xi_1$ 的所有向量 ξ_2,ξ_3;

(Ⅱ)对(Ⅰ)中的任意向量 ξ_2,ξ_3, 证明: ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关.

(21)(本题满分 11 分)

设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$$

(Ⅰ)求二次型 f 的矩阵的所有特征值;

(Ⅱ)若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$, 求 a 的值.

(22)(本题满分 11 分)

袋中有 1 个红球, 2 个黑球与 3 个白球. 现有放回地从袋中取两次, 每次取一个球, 以 X,Y,Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数.

(Ⅰ) 求 $P\left\{X=1\middle|Z=0\right\}$;

(Ⅱ) 求二维随机变量 $\left(X,Y\right)$ 的概率分布.

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda^2 xe^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中参数 $\lambda(\lambda>0)$ 未知, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(Ⅰ) 求参数 λ 的矩估计量;

(Ⅱ) 求参数 λ 的最大似然估计量.

2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分.

(1) 【答案】(A)

【解析】 $f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是 $x\to 0$ 时的等价无穷小，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}\overset{\text{等}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin ax}{x^2\cdot(-bx)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin ax}{-bx^3}\overset{\text{洛}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2}\overset{\text{洛}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{a^2\sin ax}{-6bx}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{a^3}{6b}\right)\frac{\sin ax}{ax}=-\frac{a^3}{6b}=1,$$

即 $a^3=-6b$，故排除 B，C.

另外，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-a\cos ax}{-3bx^2}$ 存在，蕴含了 $1-a\cos ax\to 0\ (x\to 0)$，故 $a=1$，排除 D.

所以本题选 A.

(2) 【答案】(A)

【解析】本题利用二重积分区域的对称性及被积函数的奇偶性.

令 $f(x,y)=y\cos x$，

D_2,D_4 两区域关于 x 轴对称，$f(x,-y)=-y\cos x=-f(x,y)$，即被积函数是关于 y 的奇函数，所以 $I_2=I_4=0$；

D_1,D_3 两区域关于 y 轴对称，$f(-x,y)=y\cos(-x)=y\cos x=f(x,y)$，即被积函数是关于 x 的偶函数，所以

$$I_1=2\iint\limits_{\{(x,y)|y\ge x,0\le x\le 1\}}y\cos x\,dxdy>0,$$
$$I_3=2\iint\limits_{\{(x,y)|y\le -x,0\le x\le 1\}}y\cos x\,dxdy<0.$$

所以正确答案为(A).

(3) 【答案】(D)

【解析】此题为定积分的应用知识考核，由 $y=f(x)$ 的图形可以看出，其图像与 x 轴及 y 轴、$x=x_0$ 所围的图形的代数面积为所求函数 $F(x)$，从而可得出下面几个方面的特征：

① $x\in[-1,0]$ 时，$F(x)\le 0$ 为线性函数，单调递增；

② $x\in[0,1]$ 时，$F(x)\le 0$，且单调递减；

③ $x\in[1,2]$时，$F(x)$单调递增；

④ $x\in[2,3]$时，$F(x)$为常函数；

⑤ $F(x)$为连续函数.

结合这些特点，可见正确选项为(D).

(4) 【答案】C

【解析】**解法1** 举反例：

取$a_n=b_n=(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$是收敛的，但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，排除(A)；

取$a_n=b_n=\frac{1}{n}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$是发散的，但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，排除(B)；

取$a_n=b_n=\frac{1}{n}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$是发散的，但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$收敛，排除(D)，

故答案为(C).

解法2 因为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则由定义可知$\exists N_1$，使得$n>N_1$时，有$|a_n|<1$；

又因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$收敛，可得$\lim\limits_{n\to\infty}|b_n|=0$，则由定义可知$\exists N_2$，使得$n>N_2$时，有$|b_n|<1$，

从而，当$n>N_1+N_2$时，有$a_n^2b_n^2<|b_n|$，则由正项级数的比较判别法可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$收敛.

(5) 【答案】(A)

【解析】根据过渡矩阵的定义，知由基$\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3$到$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$的过渡矩阵$M$满足：

$$\begin{aligned}(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1)&=\left(\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3\right)M\\&=\left(\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3\right)\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix},\end{aligned}$$

所以此题选(A).

(6) 【答案】(B)

【解析】分块矩阵$\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}$的行列式

$$\begin{vmatrix}O&A\\B&O\end{vmatrix}=(-1)^{2\times2}|A||B|=2\times3=6,$$

即分块矩阵可逆,且

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^* = \begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = 6\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$$

$$= 6\begin{pmatrix} O & \dfrac{1}{|B|}B^* \\ \dfrac{1}{|A|}A^* & O \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} O & \dfrac{1}{3}B^* \\ \dfrac{1}{2}A^* & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}.$$

故答案为(B).

(7) 【答案】(C)

【解析】因为$F(x) = 0.3\Phi(x) + 0.7\Phi\left(\dfrac{x-1}{2}\right)$,所以

$$F'(x) = 0.3\Phi'(x) + \frac{0.7}{2}\Phi'\left(\frac{x-1}{2}\right),$$

因此, $$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xF'(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left[0.3\Phi'(x) + 0.35\Phi'\left(\frac{x-1}{2}\right)\right]dx$$

$$= 0.3\int_{-\infty}^{+\infty} x\Phi'(x)dx + 0.35\int_{-\infty}^{+\infty} x\Phi'\left(\frac{x-1}{2}\right)dx\ .$$

由于$\Phi(x)$为标准正态分布的分布函数,所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\Phi'(x)dx = 0\ ,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\Phi'\left(\frac{x-1}{2}\right)dx \ \underline{\underline{\frac{x-1}{2}=u}}\ 2\int_{-\infty}^{+\infty}(2u+1)\Phi'(u)du$$

$$= 2\int_{-\infty}^{+\infty} 2u\Phi'(u)du + 2\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi'(u)du = 2,$$

$$EX = 0.3\int_{-\infty}^{+\infty} x\Phi'(x)dx + 0.35\int_{-\infty}^{+\infty} x\Phi'\left(\frac{x-1}{2}\right)dx = 0 + 0.35\times 2 = 0.7\ .$$

(8) 【答案】(B)

【解析】

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{XY \le z\} \\ &= P\{XY \le z | Y=0\}P\{Y=0\} + P\{XY \le z | Y=1\}P\{Y=1\} \\ &= \frac{1}{2}P\{XY \le z | Y=0\} + \frac{1}{2}P\{XY \le z | Y=1\} \\ &= \frac{1}{2}P\{X\cdot 0 \le z | Y=0\} + \frac{1}{2}P\{X \le z | Y=1\}, \end{aligned}$$

由于 X,Y 相互独立, 所以

$$F_Z(z)=\frac{1}{2}P\{X\cdot 0\le z\}+\frac{1}{2}P\{X\le z\}\ .$$

(1) 当 $z<0$ 时, $F_Z(z)=\frac{1}{2}\Phi(z)$；

(2) 当 $z\ge 0$ 时, $F_Z(z)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Phi(z)$,

因此, $z=0$ 为间断点, 故选(B).

二、填空题：9-14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 【答案】$xf''_{12}+f'_2+xyf''_{22}$

【解析】 $\frac{\partial z}{\partial x}=f'_1+f'_2\cdot y$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=xf''_{12}+f'_2+yx\cdot f''_{22}=xf''_{12}+f'_2+xyf''_{22}\ .$$

(10) 【答案】$x(1-e^x)+2$

【解析】由常系数线性齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=\left(C_1+C_2x\right)e^x$ 可知

$y_1=e^x$, $y_2=xe^x$ 为其两个线性无关的解, 代入齐次方程, 有

$$\begin{aligned}&y''_1+ay'_1+by_1=(1+a+b)e^x=0\Rightarrow 1+a+b=0,\\&y''_2+ay'_2+by_2=[2+a+(1+a+b)x]e^x=0\Rightarrow 2+a=0,\end{aligned}$$

从而可见 $a=-2,b=1$, 非齐次微分方程为 $y''-2y'+y=x$.

设特解 $y^*=Ax+B$, 代入非齐次微分方程, 得 $-2A+Ax+B=x$, 即

$$Ax+(-2A+B)=x\Rightarrow\begin{cases}A=1\\-2A+B=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=2\end{cases}$$

所以特解 $y^*=x+2$, 通解 $y=\left(C_1+C_2x\right)e^x+x+2$.

把 $y\left(0\right)=2,y'\left(0\right)=0$ 代入通解, 得 $C_1=0,C_2=-1$. 所以所求解为

$$y=-xe^x+x+2=x(1-e^x)+2\ .$$

(11)【答案】$\frac{13}{6}$

【解析】由题意可知, $y=x^2,0\le x\le\sqrt{2}$, 则

$$ds=\sqrt{1+\left(y'\right)^2}dx=\sqrt{1+4x^2}dx,$$

所以
$$\int_L xds=\int_0^{\sqrt{2}}x\sqrt{1+4x^2}dx=\frac{1}{8}\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4x^2}d\left(1+4x^2\right)$$
$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{\left(1+4x^2\right)^3}\Bigg|_0^{\sqrt{2}}=\frac{13}{6}.$$

(12) 【答案】$\frac{4}{15}\pi$

【解析】**解法 1：**

$$\iiint_\Omega z^2dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1\rho^2\sin\varphi\rho^2\cos^2\varphi d\rho$$
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\cos^2\varphi d\left(-\cos\varphi\right)\int_0^1\rho^4d\rho$$
$$=2\pi\cdot\left(-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi}\cdot\frac{\rho^5}{5}\Bigg|_0^1=\frac{4}{15}\pi.$$

解法 2：由轮换对称性可知

$$\iiint_\Omega z^2dxdydz=\iiint_\Omega x^2dxdydz=\iiint_\Omega y^2dxdydz$$

所以，
$$\iiint_\Omega z^2dxdydz=\frac{1}{3}\iiint_\Omega\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz=\frac{1}{3}\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1r^4\sin\varphi dr$$
$$=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^1r^4dr=\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi=\frac{4}{15}\pi.$$

(13) 【答案】2

【解析】$\alpha^T\beta=2$，$\therefore\beta\alpha^T\beta=\beta\left(\alpha^T\beta\right)=2\cdot\beta$，又由于 $\beta\neq0$，$\therefore\beta\alpha^T$ 的非零特征值为 2.

(14) 【答案】-1

【解析】由于 $\overline{X}+kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量，所以 $E(\overline{X}+kS^2)=np^2$，即

$$E(\overline{X}+kS^2)=np^2\Rightarrow E(\overline{X})+E(kS^2)=np^2$$
$$\Rightarrow np+knp(1-p)=np^2$$
$$\Rightarrow 1+k(1-p)=p$$
$$\Rightarrow k(1-p)=p-1\Rightarrow k=-1.$$

三、解答题：15－23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 9 分)

【解析】 $f_x'(x,y)=2x(2+y^2)$，

$$f_y'(x,y)=2x^2y+\ln y+1.$$

令 $\begin{cases} f_x'(x,y)=0, \\ f_y'(x,y)=0, \end{cases}$ 解得唯一驻点 $(0,\dfrac{1}{e})$.

由于

$$A=f''_{xx}(0,\frac{1}{e})=2(2+y^2)\Big|_{(0,\frac{1}{e})}=2(2+\frac{1}{e^2}),$$

$$B=f''_{xy}(0,\frac{1}{e})=4xy\Big|_{(0,\frac{1}{e})}=0,$$

$$C=f''_{yy}(0,\frac{1}{e})=(2x^2+\frac{1}{y})\Big|_{(0,\frac{1}{e})}=e,$$

所以 $\qquad B^2-AC=-2e(2+\dfrac{1}{e^2})<0$, 且 $A>0$.

从而 $f(0,\dfrac{1}{e})$ 是 $f(x,y)$ 的极小值, 极小值为 $f(0,\dfrac{1}{e})=-\dfrac{1}{e}$.

(16)(本题满分 9 分)

【解析】曲线 $y=x^n$ 与 $y=x^{n+1}$ 的交点为 $(0,0)$ 和 $(1,1)$, 所围区域的面积

$$a_n=\int_0^1(x^n-x^{n+1})dx=(\frac{1}{n+1}x^{n+1}-\frac{1}{n+2}x^{n+2})\Big|_0^1=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2},$$

$$S_1=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}a_n$$
$$=\lim_{N\to\infty}(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2})=\lim_{N\to\infty}(\frac{1}{2}-\frac{1}{N+2})=\frac{1}{2},$$

$$S_2=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1})=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}.$$

考查幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}x^n$, 知其收敛域为 $(-1,1]$, 和函数为 $-\ln(1+x)$.

因为 $S(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}x^n=x-\ln(1+x)$, 令 $x=1$, 得

$$S_2=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=S(1)=1-\ln 2.$$

(17)(本题满分 11 分)

【解析】(I)椭球面 S_1 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2+z^2}{3}=1$.

设切点为 (x_0,y_0), 则 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 在 (x_0,y_0) 处的切线方程为 $\frac{x_0x}{4}+\frac{y_0y}{3}=1$.

将 $x=4,y=0$ 代入切线方程得 $x_0=1$, 从而 $y_0=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{4-x_0^2}=\pm\frac{3}{2}$.

所以切线方程为 $\frac{x}{4}\pm\frac{y}{2}=1$, 从而圆锥面 S_2 的方程为 $(\frac{x}{4}-1)^2=\frac{y^2+z^2}{4}$, 即

$$(x-4)^2-4y^2-4z^2=0.$$

(II) S_1 与 S_2 之间的体积等于一个底面半径为 $\frac{3}{2}$ 、高为 3 的锥体体积 $\frac{9}{4}\pi$ 与部分椭球体体积 V 之差, 其中 $V=\frac{3\pi}{4}\int_1^2(4-x^2)dx=\frac{5}{4}\pi$.

故所求体积为 $\frac{9}{4}\pi-\frac{5}{4}\pi=\pi$.

(18)(本题满分 11 分)

【解析】(Ⅰ)取 $F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$,

由题意知 $F(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续, 在 $\left(a,b\right)$ 内可导, 且

$$F(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)=f(a),$$
$$F(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=f(a).$$

根据罗尔定理, 存在 $\xi\in\left(a,b\right)$, 使得 $F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$, 即

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

(Ⅱ)对于任意的 $t\in(0,\delta)$, 函数 $f(x)$ 在 $\left[0,t\right]$ 上连续, 在 $\left(0,t\right)$ 内可导, 由右导数定义及拉格朗日中值定理

$$f_+'\left(0\right)=\lim_{t\to0^+}\frac{f(t)-f\left(0\right)}{t-0}=\lim_{t\to0^+}\frac{f'(\xi)t}{t}=\lim_{t\to0^+}f'(\xi)\text{, 其中 }\xi\in\left(0,t\right).$$

由于 $\lim_{t\to0^+}f'\left(t\right)=A$, 且当 $t\to0^+$ 时, $\xi\to0^+$, 所以 $\lim_{t\to0^+}f'(\xi)=A$, 故 $f_+'(0)$ 存在, 且

$f'_+(0)=A$.

(19)(本题满分 10 分)

【解析】取$\Sigma_1: x^2+y^2+z^2=1$的外侧, Ω为Σ与Σ_1之间的部分.

$$I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\oiint\limits_{\Sigma-\Sigma_1}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\oiint\limits_{\Sigma_1}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

根据高斯公式

$$\oiint\limits_{\Sigma-\Sigma_1}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\iiint\limits_{\Omega}0dxdydz=0.$$

$$\oiint\limits_{\Sigma_1}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\oiint\limits_{\Sigma_1}xdydz+ydzdx+zdxdy$$

$$=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1}3dxdydz=4\pi.$$

所以$I=4\pi$.

(20)(本题满分 11 分)

【解析】(Ⅰ)对矩阵$(A\vdots\xi_1)$施以初等行变换

$$\left(A\vdots\xi_1\right)=\begin{pmatrix}1&-1&-1&\vdots&-1\\-1&1&1&\vdots&1\\0&-4&-2&\vdots&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}&\vdots&-\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}&\vdots&\frac{1}{2}\\0&0&0&\vdots&0\end{pmatrix}$$

可求得 $\xi_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}+\frac{k}{2}\\ \frac{1}{2}-\frac{k}{2}\\ k\end{pmatrix}$, 其中$k$为任意常数.

又$A^2=\begin{pmatrix}2&2&0\\-2&-2&0\\4&4&0\end{pmatrix}$, 对矩阵$(A^2\vdots\xi_1)$施以初等行变换

$$\left(A^2 \vdots \xi_1\right)=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0 & \vdots & -1\\ -2 & -2 & 0 & \vdots & 1\\ 4 & 4 & 0 & \vdots & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & \vdots & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{pmatrix},$$

可求得 $\xi_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}-a\\ a\\ b\end{pmatrix}$, 其中 a,b 为任意常数.

(Ⅱ)**解法 1** 由(Ⅰ)知

$$\left|\xi_1,\xi_2,\xi_3\right|=\begin{vmatrix}-1 & -\frac{1}{2}+\frac{k}{2} & -\frac{1}{2}-a\\ 1 & \frac{1}{2}-\frac{k}{2} & a\\ -2 & k & b\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\neq 0,$$

所以 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关.

解法 2 由题设可得 $A\xi_1=0$. 设存在数 k_1,k_2,k_3, 使得

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3=0, \qquad ①$$

等式两端左乘 A, 得 $k_2A\xi_2+k_3A\xi_3=0$, 即

$$k_2\xi_1+k_3A\xi_3=0, \qquad ②$$

等式两端再左乘 A, 得 $k_3A^2\xi_3=0$, 即 $k_3\xi_1=0$.

由于 $\xi_1\neq 0$， 于是 $k_3=0$, 代入②式, 得 $k_2\xi_1=0$, 故 $k_2=0$. 将 $k_2=k_3=0$ 代入①式, 可得 $k_1=0$, 从而 ξ_1, ξ_2,ξ_3 线性无关.

(21) (本题满分 11 分)

【解析】(Ⅰ)二次型 f 的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a & 0 & 1\\ 0 & a & -1\\ 1 & -1 & a-1\end{pmatrix}.$$

由于

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a & 0 & -1\\ 0 & \lambda-a & 1\\ -1 & 1 & \lambda-a+1\end{vmatrix}=(\lambda-a)(\lambda-(a+1))(\lambda-(a-2)),$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=a,\lambda_2=a+1,\lambda_3=a-2$.

(Ⅱ)**解法 1** 由于 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$, 所以 A 合同于 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, 其秩为 2, 故

$|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=0$, 于是 $a=0$ 或 $a=-1$ 或 $a=2$.

当 $a=0$ 时, $\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=-2$, 此时 f 的规范形为 $y_1^2-y_2^2$, 不合题意.

当 $a=-1$ 时, $\lambda_1=-1,\lambda_2=0,\lambda_3=-3$, 此时 f 的规范形为 $-y_1^2-y_2^2$, 不合题意.

当 $a=2$ 时, $\lambda_1=2,\lambda_2=3,\lambda_3=0$, 此时 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$.

综上可知, $a=2$.

解法 2 由于 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$, 所以 A 的特征值有 2 个为正数, 1 个为零.

又 $a-2<a<a+1$, 所以 $a=2$.

(22)(本题满分 11 分)

【解析】(Ⅰ) $P(X=1|Z=0)=\dfrac{P\{X=1,Z=0\}}{P\{Z=0\}}=\dfrac{C_2^1\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}}{(\frac{1}{2})^2}=\dfrac{4}{9}$.

(Ⅱ)由题意知 X 与 Y 的所有可能取值均为 0, 1, 2.

$$P(X=0,Y=0)=\frac{C_3^1\cdot C_3^1}{C_6^1\cdot C_6^1}=\frac{1}{4},P(X=1,Y=0)=\frac{C_2^1\cdot C_3^1}{C_6^1\cdot C_6^1}=\frac{1}{6},$$

$$P(X=2,Y=0)=\frac{1}{C_6^1\cdot C_6^1}=\frac{1}{36},P(X=0,Y=1)=\frac{C_2^1\cdot C_2^1\cdot C_3^1}{C_6^1\cdot C_6^1}=\frac{1}{3},$$

$$P(X=1,Y=1)=\frac{C_2^1\cdot C_2^1}{C_6^1\cdot C_6^1}=\frac{1}{9},P(X=2,Y=1)=0,$$

$$P(X=0,Y=2)=\frac{C_2^1\cdot C_2^1}{C_6^1\cdot C_6^1}=\frac{1}{9},$$

$$P(X=1,Y=2)=0,P(X=2,Y=2)=0,$$

故 (X,Y) 的概率分布为

X	0	1	2

Y			
0	1/4	1/6	1/36
1	1/3	1/9	0
2	1/9	0	0

(23)(本题满分 11 分)

【解析】(Ⅰ) $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{0}^{+\infty}\lambda^2x^2e^{-\lambda x}dx=\frac{2}{\lambda}.$

令 $\overline{X}=EX$，即 $\overline{X}=\frac{2}{\lambda}$，得 λ 的矩估计量为 $\hat{\lambda}_1=\frac{2}{\overline{X}}$.

(Ⅱ)设 $x_1,x_2,\cdots,x_n(x_i>0,i=1,2,\cdots,n)$ 为样本观测值，则似然函数为

$$L\left(x_1,x_2,\cdots,x_n;\lambda\right)=\lambda^{2n}\cdot e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i}\prod_{i=1}^{n}x_i,$$

$$\ln L=2n\ln\lambda-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\ ,$$

由 $\frac{d\ln L}{d\lambda}=\frac{2n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}x_i=0$，得 λ 的最大似然估计量为 $\hat{\lambda}_2=\frac{2}{\overline{X}}$.