2014年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、选择题:1 8小题,每小题4分,共32分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 下列曲线有渐近线的是 ( )

(A) $y=x+\sin x$ (B) $y=x^2+\sin x$

(C) $y=x+\sin\frac{1}{x}$ (D) $y=x^2+\sin\frac{1}{x}$

(2) 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，则在区间 $[0,1]$ 上 ( )

(A)当 $f'(x)\geq 0$ 时，$f(x)\geq g(x)$ (B) 当 $f'(x)\geq 0$ 时，$f(x)\leq g(x)$

(C) 当 $f''(x)\leq 0$ 时，$f(x)\geq g(x)$ (D) 当 $f''(x)\leq 0$ 时，$f(x)\leq g(x)$

(3) 设 $f(x)$ 是连续函数，则 $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx=$ ( )

(A) $\int_0^1 dx\int_0^{x-1} f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$

(B) $\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x,y)dy$

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$

(D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

(4) 若 $\int_{-\pi}^{\pi}(x-a_1\cos x-b_1\sin x)^2dx=\min\limits_{a,b\in R}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-b\sin x)^2dx\right\}$,则

$a_1\cos x+b_1\sin x=$ ( )

(A) $2\sin x$ (B) $2\cos x$ (C) $2\pi\sin x$ (D) $2\pi\cos x$

5．行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$ 等于

(A) $(ad-bc)^2$ (B) $-(ad-bc)^2$

(C) $a^2d^2-b^2c^2$ (D) $-a^2d^2+b^2c^2$

（6）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 3 维向量，则对任意常数 k,l，向量组 $\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3$ 线性无关是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关的（　）

（A）必要非充分条件　　（B）充分非必要条件

（C）充分必要条件　　（D）既非充分也非必要条件

（7）设随机事件 A 与 B 相互独立，且 $P(B)=0.5, P(A-B)=0.3$，则 $P(B-A)=$（　）

（A）0.1　(B)0.2　(C)0.3　(D)0.4

（8）设连续型随机变量 X_1,X_2 相互独立，且方差均存在，X_1,X_2 的概率密度分别为 $f_1(x),f_2(x)$，随机变量 Y_1 的概率密度为 $f_{Y_1}(y)=\frac{1}{2}[f_1(y)+f_2(y)]$，随机变量 $Y_2=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$，则

（A）$EY_1>EY_2, DY_1>DY_2$　　（B）$EY_1=EY_2, DY_1=DY_2$

（C）$EY_1=EY_2, DY_1<DY_2$　　（B）$EY_1=EY_2, DY_1>DY_2$

二、填空题：9~14 小题,每小题 4 分,共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 曲面 $z=x^2(1-\sin y)+y^2(1-\sin x)$ 在点 $(1,0,1)$ 处的切平面方程为________.

(10) 设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数，且 $f'(x)=2(x-1),\quad x\in[0,2]$，则 $f(7)=$________.

(11) 微分方程 $xy'+y(\ln x-\ln y)=0$ 满足条件 $y(1)=e^3$ 的解为 $y=$________.

(12) 设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $y+z=0$ 的交线，从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，则曲面积分 $\oiint_L zdx+ydz=$________.

(13) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数是 1，则 a 的取值范围________.

(14) 设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{2x}{3\theta^2}, \theta<x<2\theta\\ 0, 其他\end{cases}$，其中 θ 是未知参数，X_1，X_2，…，X_n 为来自总体 X 的简单样本，若 $c\sum_{i=1}^{n}x^2$ 是 θ 的无偏估计，则 $c=$________.

三、解答题：15~23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$.

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 确定，求 $f(x)$ 的极值.

(17)(本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 具有 2 阶连续导数，$z=f\left(e^x\cos y\right)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4\left(z+e^x\cos y\right)e^{2x}$.若

$f(0)=0,f'(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式.

(18)(本题满分 10 分)设 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2\ (z\le 1)$ 的上侧，计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy$$

(19)(本题满分 10 分)设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足 $0<a_n<\dfrac{\pi}{2}$，$0<b_n<\dfrac{\pi}{2}$，$\cos a_n-a_n=\cos b_n$，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛。

(I) 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。

(II) 证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ 收敛。

(20)(本题满分 11 分)

设 $A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}$,$E$ 为3阶单位矩阵.

(I) 求方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系；

(II) 求满足 $AB=E$ 的所有矩阵 B.

（21）（本题满分 11分）

证明：n阶矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$相似

（22）（本题满分 11分）

设随机变量X的概率分布为$P\{X=1\}=P\{X=2\}=\frac{1}{2}$，在给定$X=i$的条件下，随机变量

Y服从均匀分布$U(0,i)(i=1,2)$，

（I）求Y的分布函数$F_Y(y)$；

（II）求EY

（23）（本题满分 11 分）

设总体X的分布函数

$F(x;\theta)=\begin{cases} 1-e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x\ge 0 \\ \theta, & x<0 \end{cases}$，其中$\theta$是未知参数且大于零，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体$X$的

简单随机样本.

（1）求$\boldsymbol{E(X),E(X^2)}$；（2）求θ的极大似然估计量．

（3）是否存在常数a，使得对任意的$\boldsymbol{\varepsilon}>0$，都有$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\hat{\theta}_n-a\right|\ge\boldsymbol{\varepsilon}\right\}=0$．

2014 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一试题答案

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）C （2）D （3）D （4）B （5）B （6）A （7）（B） （8）（D）

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）$2x-y-z-1=0$

（10）$f(-1)=1$

（11）$ln\dfrac{y}{x}=2x+1$

（12）π

（13）[-2,2]

（14）$\dfrac{2}{5n}$

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）【答案】

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-t]dt}{x^2 ln(1+\frac{1}{x})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^{\frac{1}{x}}-1)\int_1^x t^2dt-\int_1^x tdt}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x^2(e-1)-x$$

令$u=\dfrac{1}{x}$,

则$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(e-1)-x$

$$=\lim_{u\to 0^+}\frac{e^u-1-u}{u^2}$$

$$=\lim_{u\to 0^+}\frac{e^u-1}{2u}=\frac{1}{2}$$

（16）【答案】

$3y^2y'+y^2+x\cdot 2yy'+2xy+x^2y'=0$

$y^2+2xy=0$

$y(y+2x)=0$

$y=0(舍)或y=-2x$。

$y=-2x$ 时，

$y^3+xy^2+x^2y+6=0$

$-8x^3+x\cdot(4x^2)+x^2\cdot(-2x)+6=0$

$-8x^3+4x^3-2x^3+6=0$

$-6x^3+6=0$

$x^3=1\Rightarrow x=1,y=-2$

$6(y')^2y+3y^2y''+2yy'+2y'y+x\cdot 2(y')^2+x\cdot 2yy''+2y+2xy'+2xy'+x^2y''=0$

$12y''(1)-4y''(1)-4+y''(1)=0$

$9y''(1)=4$

$y''(1)=\dfrac{9}{4}>0$

所以 $y(1)=-2$ 为极小值。

（17）【答案】

$$\frac{\partial E}{\partial x}=f'(e^x\cos y)e^x\cos y$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}=f''(e^x\cos y)e^{2x}\cos^2 y+f'(e^x\cos y)e^x\cos y$$

$$\frac{\partial E}{\partial y}=f'(e^x\cos y)e^x(-\sin y)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}=f''(e^x\cos y)e^{2x}\sin^2 y+f'(e^x\cos y)e^x(-\cos y)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}=f''(e^x\cos y)e^{2x}=(4E+e^x\cos y)e^{2x}$$

$$f''(e^x\cos y)=4f(e^x\cos y)+e^x\cos y$$

令 $e^x\cos y=u$，

则 $f''(u)=4f(u)+u$，

故 $f(u)=C_1e^{2u}+C_2e^{-2u}-\frac{u}{4},(C_1,C_2\text{为任意常数})$

由 $f(0)=0,f'(0)=0,$ 得

$$f(u)=\frac{e^{2u}}{16}-\frac{e^{-2u}}{16}-\frac{u}{4}$$

（18）【答案】

补 $\sum_1:\{(x,y,z)|z=1\}$ 的下侧，使之与 Σ 围成闭合的区域 Ω，

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}$$
$$=-\iiint_{\Omega}[3(x-1)^2+3(y-1)^2+1]dxdydz$$
$$=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 d\rho\int_{\rho^2}^1[3(\rho\cos\theta-1)^2+3(\rho\sin\theta-1)^2+1]\rho dz$$
$$=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 d\rho\int_{\rho^2}^1[3\rho^2-6\rho^2\cos\theta-6\rho^2\sin\theta+7\rho]dz$$
$$=-2\pi\int_0^1(3\rho^3+7\rho)(1-\rho^2)d\rho=-4\pi$$

（19）【答案】

（1）证$\{a_n\}$单调

由$0<a_n<\dfrac{\pi}{2}$，根据单调有界必有极限定理，得$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在，

设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，得$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$，

故由$\cos a_n-a_n=\cos b_n$，两边取极限（令$n\to\infty$），得$\cos a-a=\cos 0=1$。

解得$a=0$，故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。

（20）【答案】①$(-1,2,3,1)^T$　②$B=\begin{pmatrix}-k_1+2 & -k_2+6 & -k_3-1\\ 2k_1-1 & 2k_2-3 & 2k_3+1\\ 3k_1-1 & 3k_2-4 & 3k_3+1\\ k_1 & k_2 & k_3\end{pmatrix}$ $(k_1,k_2,k_3\in R)$

（21）【答案】利用相似对角化的充要条件证明。

（22）【答案】（1）$F_Y(y)=\begin{cases}0,y<0,\\ \dfrac{3}{4}y,0\le y<1,\\ \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}y\right),1\le y<2,\\ 1,y\ge 2.\end{cases}$

（2）$\dfrac{3}{4}$

（23）【答案】（1）$EX=\frac{1}{2}\sqrt{\pi\theta},EX^2=\theta$

（2）$\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$

（3）存在