一、选择

（1）考察反常积分的定义（即反常积分的简单计算）

选 C。只有当a,b均已知时，才有计算的可能，直接计算行不通。因此应先赋值，再计算。

综上本题采用“特例排除法”：取$a=0$，须$b>1$，此时反常积分存在，即收敛，排除B,D；

取$a=-3$，原式变成$\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{(1+x)^b}dx$，易知，$b=2$ 时，分子幂次高于分母，$\frac{x^3}{(1+x)^2}$可分解出一个x，则积分结果为∞，反常积分不存在，排除A。相比往年类似考点，较难。

（2）考察原函数的定义。

选D。直接计算即可。$x<1,\int 2(x-1)dx=(x-1)^2+C_1$；$x\ge 1,\int \ln x dx=x\ln x-x+C_2$；

观察选项，排除B,C。一元函数可导必连续，排除A。较易。

（3）考察非齐次方程解的性质

选A。非齐次方程的两个解作减法是对应齐次方程的解，即$2\sqrt{1+x^2}$是齐次解，去系数 2 依旧是齐次解，代入齐次方程，记作方程①；非齐次方程的两个解取平均值，仍是非齐次方程的解，即$(1+x^2)^2$是非齐次解，代入非齐次方程，记作方程②；方程①②联立可得$q(x)$。

（4）考察极限的定义，函数的连续与间断**（和网上答案不一样，网上答案选 D）**

选B。考察一个函数在某点的极限或连续性或可导性，首先至少须保证函数在该点的去心领域有定义。观察题干条件，$x=0$的“右领域”有“问题”，函数在$\left(0,\frac{1}{n+1}\right)$上无定义，右极限不存在，因此可直接排除$A,C,D$。较难。

（5）考察相似的充要条件：$A\sim B\Leftrightarrow P^{-1}AP=B,P^{-1}\exists$

选C。可先将题目等效为：已知$P^{-1}AP=B$，记作式①，验证选项“$ABCD$”的正确性。

基本思路：由已知通向未知是联系过去与未来的重要途径。

考察A：式①两边同时转置得

$P^T A^T (P^{-1})^T=P^T A^T (P^T)^{-1}=((P^T)^{-1})^{-1} A^T (P^T)^{-1}=B^T$，符合；

同理，式①两边同时取逆得$P^{-1}A^{-1}P=B^{-1}$，记作式②，符合；

式①+②，即得$P^{-1}(A+A^{-1})P=B+B^{-1}$，$D$亦符合。难度持平。

（6）考察二次型之惯性定理与二次曲面的方程

选B。

思路：根据二次曲面的方程可知：单页双曲面：$p=2,q=1$；双页双曲面：$p=1,q=2$；椭球面：$p=3,q=0$；柱面：$p+q<3$，p,q 视具体情况而定。采用配方法或特征值法均可很快确定本题二次型 $p=1,q=2$，所以选 B。较新颖。

（7）考察一般正态分布的概率计算

选 B。$p=P\left\{\dfrac{X-\mu}{\sigma}\le\sigma\right\}=\Phi(\sigma)$，其中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布的分布函数，分布函数单调不减。较易

（8）考察相关系数 ρ 的计算

选 A。$\rho_{XY}=\dfrac{COV(X,Y)}{\sqrt{DXDY}}=\dfrac{EXY-EXEY}{\sqrt{DXDY}}$。易知 $X\sim B(2,\frac{1}{3}),Y\sim B(2,\frac{1}{3})$，所以 $EX=EY=\dfrac{2}{3},DX=DY=\dfrac{4}{9}$；求 XY 的分布列：

$\begin{array}{c|cccc} XY & 0 & 1 & 2 & 4 \\ \hline P & & \frac{2}{9} & 0 & 0 \end{array}$，$\therefore EXY=\dfrac{2}{9}$；代入得 $\rho_{XY}=-\dfrac{1}{2}$。持平。

二、填空

（9）考察 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式极限。

$\dfrac{1}{2}$。原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln(1+x\sin x)}{2x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin x}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$ 。较易

（10）考察旋度公式

$\vec{j}+(y-1)\vec{k}$。较易

（11）考察多元函数之隐函数求导

$-dx+2dy$。$(0,1)$ 代入原方程，得 $z=1$。方程两边同时对 x 或 y 求导，可得 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)},\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)}$。

（12）考察泰勒公式与幂级数展开。

$\dfrac{1}{2}$。$\arctan x=x-\dfrac{1}{3}x^3+\cdots$，$\dfrac{1}{1+ax^2}=1-ax^2+\cdots$，所以

$$\begin{aligned}\arctan x+\frac{x}{1+ax^2}&=\left(x-\frac{1}{3}x^3+\cdots\right)-x\left(1-ax^2+\cdots\right)\\&=(-\frac{1}{3}+a)x^3+\cdots\end{aligned}$$

，$\therefore\dfrac{f'''(0)}{3\downarrow}=(-\dfrac{1}{3}+a)\Rightarrow a=\dfrac{1}{2}$。

持平

（13）考察行列式的计算

$\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4$。

$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & & \\ & \lambda & -1 & \\ & & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}$，只需要从第四列开始，后一列的 λ 倍加到前一列，最后得

$\begin{vmatrix} 0 & -1 & & \\ & 0 & -1 & \\ & & 0 & -1 \\ 4+\lambda\left(3+\lambda\left(2+\lambda\left(\lambda+1\right)\right)\right) & \cdots & \cdots & \lambda+1 \end{vmatrix}$，沿第一列展开即得。较难

（14）考察一个正态总体的置信区间

（8.2,10.8）。代入公式 $\left(\overline{X}-u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ 即可，其中

$\overline{X}+u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=10.8\Rightarrow u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1.3$。较易。

三、计算题

（15）考察极坐标系下的二重积分计算

$$\begin{aligned}\iint_D xdxdy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_2^{2(1+\cos\theta)}\rho\cos\theta\cdot\rho d\rho \\ &= 5\pi+\frac{32}{3}\end{aligned}$$

较易。

（16）考察反常积分的计算以及二阶常系数线性齐次微分方程的求解。

（Ⅰ）证明：(依据反常积分定义)

$$\begin{aligned}&y''+2y'+ky=0\Rightarrow y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x} \\ &\text{其中}\lambda_1=-1-\sqrt{1-k},\lambda_2=-1+\sqrt{1-k}\end{aligned}$$

，代入反常积分得

$$\int_0^{+\infty}y\left(x\right)dx=-\left(\frac{C_1}{\lambda_1}+\frac{C_2}{\lambda_2}\right)=-\frac{C_1\lambda_2+C_2\lambda_1}{\lambda_1\lambda_2}$$

反常积分存在，所以反常积分收敛。

（II）解：(常微分方程中的初值问题，两个初值条件求两个任意常数 C_1,C_2）

$$\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1+C_2=1 \\ \lambda_1 C_1+\lambda_2 C_2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=\dfrac{\lambda_2-1}{\lambda_2-\lambda_1} \\ C_2=\dfrac{1-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1} \end{cases}$$，又 $\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2=-2 \\ \lambda_1\lambda_2=k \end{cases}$，代入得

$\int_0^{+\infty} y(x)dx=\dfrac{3}{k}$。较易。

（17）考察偏导积分求二元函数，积分与路径无关。

解：由偏导积分法：

$f(x,y)=\int \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx = xe^{2x-y}+\varphi(y)$，又 $f(0,y)=\varphi(y)=y+1$

$\therefore f(x,y)=xe^{2x-y}+y+1$。

易判断此曲线积分的积分结果与路径无关。

$\therefore I(t)=f(x,y)\Big|_{(0,0)}^{(1,t)}=t+e^{2-t}$

进而易知 $I(t)_{\min}=I(2)=3$。

较难。

（18）考察高斯公式与三重积分。

解：由高斯公式得

$I=\iiint\limits_{\Omega}(2x+1)dv$ （先二后一法）

$=\dfrac{1}{2}$。 （较易）

（19）考察无穷级数收敛性证明，以及拉格朗日中值定理的运用。

（I）即证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_{n+1}-x_n|$ 的收敛性。（一般比较法）

$$|x_{n+1}-x_n|=|f(x_n)-f(x_{n-1})|=|f'(\xi)(x_n-x_{n-1})|=f'(\xi)|(x_n-x_{n-1})|$$

$<\dfrac{1}{2}|(x_n-x_{n-1})|<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}|(x_2-x_1)|$，显然右端构成的级数收敛，所以原命题成立。

（II）考察绝对收敛的性质，及微分中值定理的运用。

观察发现 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 展开后即可“加一项消一项”。

易知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 收敛，所以

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} - x_1 = A \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = A + x_1$，其中 $A = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，记为 C。

由 $x_{n+1} = f\left(x_n\right) = f\left(0\right) + f'\left(\eta\right) x_n$，$\eta$ 在 0 与 x_n 之间。

两边取极限得

$C = \dfrac{1}{1 - f'\left(\eta\right)}$，易判断原命题成立。　　较难。

（20）考察矩阵方程的求解

$$\left(A,B\right) \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & a+2 & 3 & -3 & a-4 \\ 0 & 0 & a-1 & -a+1 & 0 \end{pmatrix}$$

（i）$a=1$ 时

$$\left(A,B\right) \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

进而可得 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -k_1 - 1 & -k_2 - 1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}$，$k_1, k_2$ 为任意常数。无穷解。

（ii）$a=-2$ 时

$$\left(A,B\right) \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

易知无解。

（iii）$a \neq -2$ 且 $a \neq 1$ 时

$$\left(A,B\right) \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & a+2 & 3 & -3 & a-4 \\ 0 & 0 & a-1 & -a+1 & 0 \end{pmatrix}$$

唯一解。

$B = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{3a}{a+2} \\ 0 & \dfrac{a-4}{a+2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$。　　难度持平。

（21）

（Ⅰ）分析：考察方阵的n次幂，在本题条件下，易联想到$P^{-1}AP=\Lambda \Rightarrow A^n=P\Lambda^n P^{-1}$

易得A的特征值及对应的特征向量为

$$\begin{cases}\lambda_1=0\leftrightarrow \gamma_1=\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\end{pmatrix}^T\\ \lambda_2=-1\leftrightarrow \gamma_2=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}^T\\ \lambda_3=-2\leftrightarrow \gamma_3=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\end{pmatrix}^T\end{cases}$$，记$P=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$，则$P^{-1}AP=\Lambda,\Lambda=\begin{pmatrix}0 & & \\ & -1 & \\ & & -2\end{pmatrix}$

$$A^{99}=P\Lambda^{99}P^{-1}=\begin{pmatrix}-2+2^{99} & 1-2^{99} & 2-2^{98}\\ -2+2^{100} & 1-2^{100} & 2-2^{99}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$，其中$P^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \frac{1}{2}\\ 2 & -1 & -2\\ -1 & 1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

（II）考察矩阵乘法。

由$B^2=BA\Rightarrow B^{100}=BA^{99}$

即 $$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-2+2^{99} & 1-2^{99} & 2-2^{98}\\ -2+2^{100} & 1-2^{100} & 2-2^{99}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-2+2^{99} & 1-2^{99} & 2-2^{98}\\ -2+2^{100} & 1-2^{100} & 2-2^{99}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\beta_1=\left(-2+2^{99}\right)\alpha_1+\left(-2+2^{100}\right)\alpha_2\\ \beta_2=\left(1-2^{99}\right)\alpha_1+\left(1-2^{100}\right)\alpha_2\\ \beta_3=\left(2-2^{98}\right)\alpha_1+\left(2-2^{99}\right)\alpha_2\end{cases}$$

难度持平

（22）考察多维随机变量的分布函数、概率密度以及相互独立的概念

（Ⅰ）二维均匀分布概率密度：即求区域D面积（二重积分），再代公式。

$$f(x,y)=\begin{cases}3, & 0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\\ 0, & 其他\end{cases}$$

（II）思路：先考察相互独立的必要条件是否成立。

如验证$P\left\{U=1,X\le\frac{1}{2}\right\}=P\{U=1\}\cdot P\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}$是否成立

$P\left\{U=1, X \le \frac{1}{2}\right\} = P\left\{X \le Y, X \le \frac{1}{2}\right\} = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_x^{\sqrt{x}} 3dy = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{8}$

$P\{U=1\} = \frac{1}{2}, P\left\{X \le \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{8}$，代入，等式不成立，必要条件不满足，所以不相互独立。

（III）考察“离散+连续型随机变量”的分布函数

易知$0 < Z < 2$

当$z \le 0, F(z) = 0$，

$z \ge 2, F(z) = 1$，

当$0 < z < 2$时

$F(z) = P\{Z \le z\} = P\{U + X \le z\} = P\{U=1, 1+X \le z\} + P\{U=0, X \le z\}$

$P\{X \le Y, X \le z-1\} + P\{X > Y, X \le z\}$

$$= \begin{cases} \frac{3}{2}z^2 - z^3, 0 < z < 1 \\ 2(z-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(z-1)^2 + \frac{1}{2}, 1 \le z < 2 \end{cases}$$

综上：$F(z) = \begin{cases} 0, z \le 0 \\ \frac{3}{2}z^2 - z^3, 0 < z < 1 \\ 2(z-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(z-1)^2 + \frac{1}{2}, 1 \le z < 2 \\ 1, z \ge 2 \end{cases}$。较难。

（23）考察一维随机变量函数的分布；无偏估计。

（I）

$F(t) = P\{T \le t\} = P\{\max(X_1, X_2, X_3) \le t\}$

$= P\{X_1 \le t, X_2 \le t, X_3 \le t\} = P\{X_1 \le t\} P\{X_2 \le t\} P\{X_3 \le t\}$

$= (P\{X \le t\})^3 = (F_X(t))^3$

$\therefore f(t) = 3(F_X(t))^2 \cdot f_X(t)$

$$= \begin{cases} \frac{9t^8}{\theta^9}, 0 < t < \theta \\ 0, \text{其他} \end{cases}$$

（II）即求使得$E(aT) = \theta$成立的a。

$E\left(aT\right)=aE\left(T\right)=a\int_0^{\theta}t\cdot\frac{9t^8}{\theta^9}dt=\frac{9a\theta}{10}=\theta\Rightarrow a=\frac{10}{9}$。较易

整体来看，数学一相比去年较难，主要体现在综合性题目较多，计算量明显增大。但如果一个学生的基础计算能力较扎实，这个“难”能不能再算数就需要再讨论了，因为除了极个别的大题（如 19 题、22 题），其他大题的逻辑思路比较明朗，题目不算难，只是计算量着实大，对学生的计算能力要求高，由此可看出研究生选拔考试对学生计算能力很是重视。

综上，2016 年考研数学一题目偏向综合性强的基础题型，但计算量大，对基础计算能力要求高。