2018 考研数学一答案解析

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分。

（1）【答案】D

【解答】由定义得 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-\frac{1}{2}|x|}{x}=-\dfrac{1}{2}$；

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\frac{1}{2}|x|}{x}=\frac{1}{2}.$$

（2）【答案】B

【解答】已知平面过（1,0,0）（0,1,0）两点，可得切平面内一向量（1，-1，0），曲面 $z=x^2+y^2$ 的切平面法向量为（$2x,2y,-1$）

$\therefore 2x-2y=0$ 即 $x=y$.

（3）【答案】B

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{(2n+1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{(2n+1)!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+2)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{(2n+1)!}=2\sin 1+\cos 1.$$

（4）【答案】C

$$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x^2+2x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\pi\text{；}$$

$$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+x)e^{-x}\mathrm{d}x\text{；}$$

$$K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})\mathrm{d}x>\pi,\therefore K>M.$$

（5）【答案】A

A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$，而 $r(\lambda E-A)=r(E-A)=2$.

（6）【答案】C

由秩的定义，可知 C 正确

（7）【答案】A

已知 $f(1+x)=f(1-x)$ 可得 $f(x)$ 图像关于 $x=1$ 对称，$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0.6$ 从而

$P(x\le 0)=0.2$

(8)【答案】选 D.

【解答】若显著性水平 $\alpha=0.05$ 时接受 H_0，可知检验统计量 $|Z|\le U_{0.025}$，此时 $|Z|\le U_{0.005}$，选 D.

(9)【答案】$k=-2$

【解答】$\because \lim\limits_{x\to 0}(\frac{1-\tan x}{1+\tan x})^{\frac{1}{\sin kx}}=e,\therefore \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sin kx}(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}-1)=1,$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{kx}\cdot\frac{-2\tan x}{1+\tan x}=-\frac{2}{k}=1,\therefore k=-2.$

(10)【答案】$2\ln 2-2$

【解答】$\int_0^1 xf''(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{d}f'(x)=xf'(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x\ \ f'(1)-f(x)\Big|_0^1$

$=2\ln 2-f(1)+f(0)=2\ln 2-2$.

(11)【答案】$(1,0,-1)$

【解答】$rot\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ xy & -yz & xz\end{vmatrix}=(y,-z,-x)\Big|_{(1,1,0)}=(1,0,-1)$.

【解答】$\because \lim\limits_{x\to 0}(\frac{1-\tan x}{1+\tan x})^{\frac{1}{\sin kx}}=e,\therefore \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sin kx}(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}-1)=1,$

(12)【答案】$-\frac{\pi}{3}$

【解答】$L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ x+y+z=0\end{cases},\oint_L xy\mathrm{d}s=\oint_L[\frac{1}{2}-(x^2+y^2)]\mathrm{d}s$，

$\oint_L[\frac{1}{2}-\frac{2}{3}]\mathrm{d}s=-\frac{1}{6}\cdot 2\pi=-\frac{\pi}{3}$.

(13)【答案】

【解答】$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1,A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2,A(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2$

$A(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2)=\lambda_1^2\alpha_1+\lambda_2^2\alpha_2=\alpha_1+\alpha_2,\ \therefore\lambda_1^2=\lambda_2^2=1,\therefore\lambda_1=\pm1,\lambda_2=\pm1,\therefore|A|=-1$

(14)【答案】$\frac{1}{4}$

【解答】$p(AC|AB\cup C)=\dfrac{p[(AC)(AB\cup C)]}{p(AB\cup C)}=\dfrac{p(ABC\cup AC)}{p(AB)+p(C)-p(ABC)}$

$$=\frac{p(AC)}{\frac{1}{4}+p(C)}=\frac{\frac{1}{2}p(C)}{\frac{1}{4}+p(C)}=\frac{1}{4},\therefore p(C)=\frac{1}{4}.$$

三、解答证明题

（15）$\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx=\dfrac{1}{2}\int\arctan\sqrt{e^x-1}de^{2x}$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{2}\int e^{2x}\cdot\frac{\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}}{1+(e^x-1)}dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{e^x-1+1}{\sqrt{e^x-1}}de^x$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\int\sqrt{e^x-1}+\frac{1}{\sqrt{e^x-1}}d(e^x-1)$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}(e^x-1)^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{e^x-1}\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{6}(e^x-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{e^x-1}+C.$$

（16）解：设圆的周长为x，正三角周长为y，正方形的周长z，由题设$x+y+z=2$.

则目标函数：$S=\pi\left(\dfrac{x}{2\pi}\right)^2+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{y}{3}\right)^2+\left(\dfrac{z}{4}\right)^2=\dfrac{x^2}{4\pi}+\dfrac{\sqrt{3}}{36}y^2+\dfrac{z}{16}^2$，

故拉格朗日函数为

$$L(x,y,z;\lambda)=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{\sqrt{3}}{36}y^2+\frac{z}{16}^2+\lambda(x+y+z-2).$$

则 $$L_x'=\frac{x}{2\pi}+\lambda=0,$$

$$L'_y=\frac{2\sqrt{3}y}{36}+\lambda=0,$$

$$L'_z=\frac{2z}{16}+\lambda=0,$$

$$L'_\lambda=x+y+z-2=0.$$

解得 $x=\dfrac{2\pi}{\pi+3\sqrt{3}+4}$，$y=\dfrac{6\sqrt{3}\pi}{\pi+3\sqrt{3}+4}$，$z=\dfrac{8}{\pi+3\sqrt{3}+4}$，$\lambda=\dfrac{-1}{\pi+3\sqrt{3}+4}$.

此时面积和有最小值 $S=\dfrac{1}{\pi+3\sqrt{3}+4}$.

（17）解:构造平面 $\Sigma':\begin{cases}3y^2+3z^2\leqslant 1,\\ x=0,\end{cases}$ 取后侧;设 Σ' 与 Σ 所围区域为 Ω;

记 $P=x, Q=y^3+z, R=z^3$;借助高斯公式, 有:

$$\iint\limits_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma'}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma'}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(P'_x+Q'_y+R'_z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-0=\iiint\limits_{\Omega}(1+3y^2+3z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iint\limits_{3y^2+3z^2\leqslant 1}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\int_0^{\sqrt{1-3y^2-3z^2}}(1+3y^2+3z^2)\mathrm{d}x$$

$$=\iint\limits_{3y^2+3z^2\leqslant 1}\sqrt{1-3y^2-3z^2}(1+3y^2+3z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\sqrt{1-3r^2}(1+3r^2)\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=2\pi(-\frac{1}{6})\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\sqrt{1-3r^2}(1+3r^2)\mathrm{d}(1-3r^2)$$

$$=\frac{\pi}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\sqrt{1-3r^2}(1-3r^2-2)\mathrm{d}(1-3r^2)$$

$$=\frac{\pi}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}[(1-3r^2)^{\frac{3}{2}}-2(1-3r^2)^{\frac{1}{2}}]\mathrm{d}(1-3r^2)$$

$$=\frac{\pi}{3}[\frac{2}{5}(1-3r^2)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}(1-3r^2)^{\frac{1}{2}}]\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{14\pi}{45}.$$

(18)(I)解：通解 $y(x)=\mathrm{e}^{-\int 1\mathrm{d}x}(\int x\mathrm{e}^{\int 1\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C)$

$$=\mathrm{e}^{-x}(\int x\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x+C)$$

$$=\mathrm{e}^{-x}[(x-1)\mathrm{e}^{x}+C]$$

$$=(x-1)+C\mathrm{e}^{-x}.$$

(II)证明：设 $f(x+T)=f(x)$，即 T 是 $f(x)$ 的周期.

通解 $y(x)=\mathrm{e}^{-\int 1\mathrm{d}x}[\int f(x)\mathrm{e}^{\int 1\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]$

$$=\mathrm{e}^{-x}[\int f(x)\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x+C]$$

$$=\mathrm{e}^{-x}\int f(x)\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x+C\mathrm{e}^{-x}.$$

不妨设 $y(x)=\mathrm{e}^{-x}\int_{T}^{x} f(x)\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x+C\mathrm{e}^{-x}$, 则有

$$y(x+T)=\mathrm{e}^{-(x+T)}\int_{T}^{x+T} f(t)\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t+C\mathrm{e}^{-(x+T)}$$

$$=\mathrm{e}^{-(x+T)}\int_{0}^{x} f(u+T)\mathrm{e}^{u+T}\mathrm{d}(u+T)+(C\mathrm{e}^{-T})\cdot\mathrm{e}^{-x}$$

$$=\mathrm{e}^{-(x+T)}\int_{0}^{x} f(u)\mathrm{e}^{u}\cdot\mathrm{e}^{T}\mathrm{d}u+(C\mathrm{e}^{-T})\cdot\mathrm{e}^{-x}$$

$$=\mathrm{e}^{-x}\int_{0}^{x} f(u)\mathrm{e}^{u}\mathrm{d}u+(C\mathrm{e}^{-T})\cdot\mathrm{e}^{-x},$$

即 $y(x+T)$ 依旧是方程的通解, 结论得证.

(19)证明:设 $f(x)=\mathrm{e}^{x}-1-x,\ x>0$, 则有

$f'(x)=\mathrm{e}^{x}-1>0$, 因此 $f(x)>0,\ \frac{\mathrm{e}^{x}-1}{x}>1,$

从而 $\mathrm{e}^{x_2}=\frac{\mathrm{e}^{x_1}-1}{x_1}>1,\ \ x_2>0$;

猜想 $x_n>0$,现用数学归纳法证明:

$n=1$时, $x_1>0$,成立;

假设$n=k(k=1,2,\cdots)$时, 有$x_k>0$, 则$n=k+1$时有

$\mathrm{e}^{x_{k+1}}=\dfrac{\mathrm{e}^{x_k}-1}{x_k}>1$,所以$x_{k+1}>0$;

因此$x_n>0$,有下界.

又$x_{n+1}-x_n=\ln\dfrac{\mathrm{e}^{x_n}-1}{x_n}-\ln\mathrm{e}^{x_n}=\ln\dfrac{\mathrm{e}^{x_n}-1}{x_n\mathrm{e}^{x_n}}$;

设$g(x)=\mathrm{e}^x-1-x\mathrm{e}^x$,

$x>0$时, $g'(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x=-x\mathrm{e}^x<0$,

所以$g(x)$单调递减, $g(x)<g(0)=0$,即有$\mathrm{e}^x-1<x\mathrm{e}^x$,

因此$x_{n+1}-x_n=\ln\dfrac{\mathrm{e}^{x_n}-1}{x_n\mathrm{e}^{x_n}}<\ln 1=0$, x_n单调递减.

由单调有界准则可知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,则有$A\mathrm{e}^A=\mathrm{e}^A-1$;

因为$g(x)=\mathrm{e}^x-1-x\mathrm{e}^x$只有唯一的零点$x=0$,所以$A=0$.

(20)解:(I)由$f(x_1,x_2,x_3)=0$得

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0,\\ \quad\ \ x_2+x_3=0,\\ x_1\quad\ \ +ax_3=0,\end{cases}$$

系数矩阵$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&0&1\\1&0&a\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&a-2\end{pmatrix}$,

$a\neq 2$时, $r(A)=3$，方程组有唯一解：$x_1=x_2=x_3=0$；

$a=2$时，$r(A)=2$，方程组有无穷解：$x=k\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix},k\in R$.

(II) $a\neq 2$时,令$\begin{cases}y_1=x_1-x_2+x_3,\\y_2=x_2+x_3,\\y_3=x_1+ax_3,\end{cases}$ 这是一个可逆变换,

因此其规范形为$y_1^2+y_2^2+y_3^2$;

$$a=2\text{时}, f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+2x_3)^2$$

$$=2x_1^2+2x_2^2+6x_3^2-2x_2x_3+6x_1x_3$$

$$=2(x_1-\frac{x_2-3x_3}{2})^2+\frac{3(x_2+x_3)^2}{2},$$

此时规范形为$y_1^2+y_2^2$.

(21)解:(I) A与B等价,则$r(A)=r(B)$.

又$|A|=\begin{vmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{vmatrix}\xlongequal{r_3-r_1}\begin{vmatrix}1&2&a\\1&3&0\\3&9&0\end{vmatrix}=0$,

所以$|B|=\begin{vmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{vmatrix}\xlongequal{r_3+r_1}\begin{vmatrix}1&a&2\\0&1&1\\0&a+1&3\end{vmatrix}=2-a=0$,

$a=2$.

(II) $AP=B$,即解矩阵方程$AX=B$:

$$(A,B)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&2&2\\1&3&0&0&1&1\\2&7&-2&-1&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&6&3&4&4\\0&1&-2&-1&-1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

得$P=\begin{pmatrix}-6k_1+3&-6k_2+4&-6k_3+4\\2k_1-1&2k_2-1&2k_3-1\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix}$;

又P可逆,所以$|P|\neq 0$,即$k_2\neq k_3$.

最终 $P=\begin{pmatrix} -6k_1+3 & -6k_2+4 & -6k_3+4 \\ 2k_1-1 & 2k_2-1 & 2k_3-1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}$,其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数,且 $k_2 \neq k_3$.

22. 解：（1）由已知 $P\{X=1\}=\frac{1}{2}$，$P\{X=-1\}=\frac{1}{2}$，Y 服从 λ 的泊松分布，

所以 $\operatorname{cov}(X,Z)=\operatorname{cov}(X,XY)=E(X^2Y)-E(X)E(XY)$

$E(X^2)E(Y)-E^2(X)E(Y)=D(X)E(Y)=\lambda$.

（2）由条件可知 Z 的取值为 $0,\pm1,\pm2\cdots$，

$P\{Z=0\}=P\{X=-1,Y=0\}+P\{X=1,Y=0\}=\mathrm{e}^{-\lambda}$，

$P\{Z=1\}=P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{2}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}$，$P\{Z=-1\}=P\{X=-1,Y=1\}=\frac{1}{2}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}$，

同理，$P\{Z=k\}=\frac{1}{2}\frac{\lambda^{|k|}\mathrm{e}^{-\lambda}}{|k|!},k=\pm1,\pm2\cdots$，

$P\{Z=0\}=\mathrm{e}^{-\lambda}$.

23. 解：（1）由条件可知，似然函数为

$$L(\sigma)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x_i|}{\sigma}},x_i\in R,i=1,2,\cdots n,$$

取对数：$\ln L(\sigma)=\sum_{i=1}^{n}\left[-\ln 2\sigma-\frac{|x_i|}{\sigma}\right]=\sum_{i=1}^{n}\left[-\ln 2-\ln\sigma-\frac{|x_i|}{\sigma}\right]$,

求导：$\frac{\mathrm{d}\ln L(\sigma)}{d\sigma}=\sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{1}{\sigma}+\frac{|x_i|}{\sigma^2}\right]=-\frac{n}{\sigma}+\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_1|}{\sigma^2}=0$，

解得 σ 得极大似然估计 $\sigma=\frac{\sum_{i=1}^{n}|X_1|}{n}$.

(2) 由第一问可知 $\sigma=\frac{\sum_{i=1}^{n}|X_1|}{n}$，所以 $E(\hat{\sigma})=E(|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}\mathrm{d}x=\sigma$.

$$D(\hat{\sigma})=D\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}|X_1|}{n}\right)=\frac{1}{n}D(|X|)=\frac{1}{n}\{E(X^2)-E^2(|X|)\}$$

$$=\frac{1}{n}\{\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}\mathrm{d}x-\sigma^2\}=\frac{1}{n}\{\int_{0}^{+\infty}x^2\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}\mathrm{d}x-\sigma^2\}=\frac{\sigma^2}{n}.$$