2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、填空题：1-6 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(1) 设 $y=(1+\sin x)^x$，则 $dy\big|_{x=\pi}=$ ________.

(2) 曲线 $y=\dfrac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$ 的斜渐近线方程为________.

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{xdx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}=$ ________

(4) 微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=-\dfrac{1}{9}$ 的解为________.

(5) 当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)=kx^2$ 与 $\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小，则 $k=$________.

(6) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为 3 维列向量，记矩阵

$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$，

如果 $|A|=1$，那么 $|B|=$____.

二、选择题：7-14 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

(7) 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内 ( )

(A) 处处可导.　　(B) 恰有一个不可导点.

(C) 恰有两个不可导点.　　(D) 至少有三个不可导点.

(8) 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数，"$M\Leftrightarrow N$"表示“M 的充分必要条件是 N”，则必有 ( )

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是奇函数.　　(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是偶函数.

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$是周期函数.　　(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是单调函数.

(9) 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t^2+2t, \\ y=\ln(1+t) \end{cases}$ 确定，则曲线 $y=y(x)$ 在 $x=3$ 处的法线与 x 轴交点的横坐标是 ( )

(A) $\frac{1}{8}\ln 2+3$. (B) $-\frac{1}{8}\ln 2+3$.

(C) $-8\ln 2+3$. (D) $8\ln 2+3$.

(10) 设区域 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0\}$，$f(x)$ 为 D 上的正值连续函数，a,b 为常数，则 $\iint\limits_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}d\sigma=$ (　　)

(A) $ab\pi$. (B) $\frac{ab}{2}\pi$. (C) $(a+b)\pi$. (D) $\frac{a+b}{2}\pi$.

(11) 设函数 $u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)dt$，其中函数 φ 具有二阶导数，ψ 具有一阶导数，则必有 (　　)

(A) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. (B) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(C) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. (D) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

(12) 设函数 $f(x)=\frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}$，则 (　　)

(A) $x=0$，$x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点.

(B) $x=0$，$x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点.

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

(D) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点.

(13) 设 λ_1,λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值，对应的特征向量分别为 α_1,α_2，则 α_1，$A(\alpha_1+\alpha_2)$ 线性无关的充分必要条件是 (　　)

(A) $\lambda_1\ne 0$. (B) $\lambda_2\ne 0$. (C) $\lambda_1=0$. (D) $\lambda_2=0$.

(14) 设 A 为 n ($n\ge 2$)阶可逆矩阵，交换 A 的第 1 行与第 2 行得矩阵 B，A^*,B^* 分别为 A,B 的伴随矩阵，则 (　　)

(A) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 B^*.　　(B) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 B^*.

(C) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 $-B^*$.　　(D) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 $-B^*$.

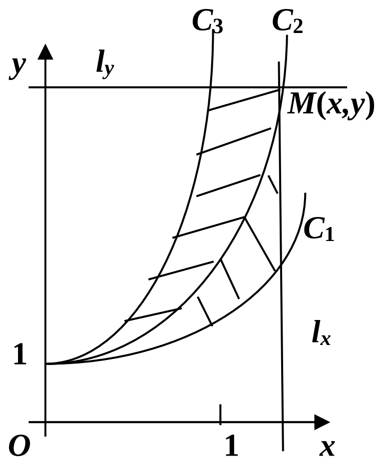
三、解答题：15－23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 11 分)

设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)\neq 0$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt}$.

(16)(本题满分 11 分)

如图，C_1 和 C_2 分别是 $y=\dfrac{1}{2}(1+e^x)$ 和 $y=e^x$ 的图象，过点(0,1)的曲线 C_3 是一单调增函数的图象. 过 C_2 上任一点 $M(x,y)$ 分别作垂直于 x 轴和 y 轴的直线 l_x 和 l_y. 记 C_1,C_2 与 l_x 所围图形的面积为 $S_1(x)$；C_2,C_3 与 l_y 所围图形的面积为 $S_2(y)$. 如果总有 $S_1(x)=S_2(y)$，求曲线 C_3 的方程 $x=\varphi(y)$.



(17)(本题满分 11 分)

如图，曲线 C 的方程为 $y=f(x)$，点 $(3,2)$ 是它的一个拐点，直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 C 在点 $(0,0)$)与 $(3,2)$ 处的切线，其交点为 $(2,4)$. 设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数，计算定积分 $\int_0^3 (x^2+x)f'''(x)dx.$

(18)(本题满分 12 分)

用变量代换 $x=\cos t(0<t<\pi)$ 化简微分方程 $(1-x^2)y''-xy'+y=0$，并求其满足 $y\Big|_{x=0}=1, y'\Big|_{x=0}=2$ 的特解.

(19)(本题满分 12 分)

已知函数 $f(x)$ 在[0，1]上连续，在(0,1)内可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$. 证明：

(I)存在$\xi \in (0,1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$；

(II)存在两个不同的点$\eta,\zeta \in (0,1)$，使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

(20)(本题满分 10 分)

已知函数$z=f(x,y)$的全微分$dz=2xdx-2ydy$，并且$f(1,1)=2$. 求$f(x,y)$在椭圆域$D=\{(x,y)\left|x^2+\dfrac{y^2}{4}\le 1\right.\}$上的最大值和最小值.

(21)(本题满分 9 分)

计算二重积分$\iint\limits_D \left|x^2+y^2-1\right| d\sigma$，其中$D=\{(x,y)\left|0\le x\le 1,0\le y\le 1\right.\}$

(22)(本题满分 9 分)

确定常数a，使向量组$\alpha_1=(1,1,a)^T$，$\alpha_2=(1,a,1)^T$，$\alpha_3=(a,1,1)^T$可由向量组$\beta_1=(1,1,a)^T$，$\beta_2=(-2,a,4)^T$，$\beta_3=(-2,a,a)^T$线性表示，但向量组β_1,β_2,β_3不能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示.

(23)(本题满分 9 分)

已知 3 阶矩阵A的第一行是(a,b,c)，a,b,c不全为零，矩阵$B=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{bmatrix}$($k$为常数)，且$AB=0$，求线性方程组$AX=0$的通解.

2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

一、填空题

(1)【详解】先求出函数的导数,再求函数在某点的微分.

方法 1：利用恒等变形得 $y=(1+\sin x)^x=e^{x\ln(1+\sin x)}$，于是

$$y'=e^{x\ln(1+\sin x)}\cdot[\ln(1+\sin x)+x\cdot\frac{\cos x}{1+\sin x}],$$

从而 $$dy\Big|_{x=\pi}=y'(\pi)dx=-\pi dx.$$

方法 2：两边取对数，$\ln y=x\ln(1+\sin x)$，对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}\bullet y'=\ln(1+\sin x)+\frac{x\cos x}{1+\sin x},$$

于是 $$y'=(1+\sin x)^x\cdot[\ln(1+\sin x)+x\cdot\frac{\cos x}{1+\sin x}],$$

故 $$dy\Big|_{x=\pi}=y'(\pi)dx=-\pi dx.$$

(2)曲线 $y=\dfrac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$ 的斜渐近线方程为__________.

【详解】由求斜渐近线公式 $y=ax+b$ (其中 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$， $b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]$)，得：

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{x\sqrt{x}}=1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}=\frac{3}{2},$$

于是所求斜渐近线方程为 $y=x+\dfrac{3}{2}$.

(3)【详解】通过还原变换求定积分

方法 1：令 $x=\sin t\quad(0<t<\dfrac{\pi}{2})$,则

$$\int_0^1\frac{xdx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t\cos t}{(2-\sin^2 t)\cos t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{2-\sin^2 t}dt$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\cos t}{1+\cos^2 t}=-\arctan(\cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

方法 2：令 $\sqrt{1-x^2}=t$，有 $x^2=1-t^2$,所以有 $xdx=-tdt$，其中 $0<t<1$.

$$\int_0^1 \frac{xdx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \int_0^1 \frac{-dt}{1+t^2} = \arctan t\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

(4)【答案】 $y=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x.$

【详解】求方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ 的解，有公式

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right] \text{ (其中} C \text{ 是常数).}$$

将原方程等价化为 $y'+\frac{2}{x}y=\ln x$，于是利用公式得方程的通解

$$y=e^{-\int\frac{2}{x}dx}[\int \ln x\cdot e^{\int\frac{2}{x}dx}dx+C]$$

$$=\frac{1}{x^2}\cdot[\int x^2\ln xdx+C]=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x+\frac{C}{x^2}, \text{(其中} C \text{ 是常数)}$$

由 $y(1)=-\frac{1}{9}$ 得 $C=0$，故所求解为 $y=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x.$

(5)【详解】由题设，

$$\lim_{x\to0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}}{kx^2}=\lim_{x\to0}\frac{x\arcsin x+1-\cos x}{kx^2(\sqrt{1+x\arcsin x}+\sqrt{\cos x})}$$

$$=\frac{1}{2k}\lim_{x\to0}\frac{x\arcsin x+1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2k}\left[\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}+\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}\right],$$

又因为 $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$， $\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}\underline{\underline{\arcsin x=u}}\lim_{u\to0}\frac{u}{\sin u}=1$

所以 $\lim_{x\to0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\frac{1}{2k}(\frac{1}{2}+1)=\frac{3}{4k}$

由题设 $x\to0$ 时 $\alpha(x)\sim\beta(x)$，所以 $\frac{3}{4k}=1$， 得 $k=\frac{3}{4}.$

(6)【答案】2

【详解】

方法 1：因为 $(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$， $(\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}$，

$$(\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1\\3\\9\end{bmatrix},$$

故 $$B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{bmatrix},$$

记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，两边取行列式，于是有

$$|B|=|A|\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=1\times 2=2.$$

方法 2：利用行列式性质(在行列式中，把某行的各元素分别乘以非零常数加到另一行的对应元素上，行列式的值不变；从某一行或列中提取某一公因子行列式值不变)

$$|B|=|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3|$$

$$\overset{[2]-[1]}{\underset{[3]-[1]}{====}}|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2+3\alpha_3,2\alpha_2+8\alpha_3|\overset{[3]-2[2]}{====}|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2+3\alpha_3,2\alpha_3|$$

$$=2|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2+3\alpha_3,\alpha_3|\overset{[1]-[3]}{\underset{[2]-3[3]}{====}}2|\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3|\overset{[1]-[2]}{====}2|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|$$

又因为$|A|=|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=1$，故$|B|=2|A|=2$.

二、选择题

(7)【答案】C

【详解】分段讨论，并应用夹逼准则，

当$|x|<1$时，有$\sqrt[n]{1}\le\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}\le\sqrt[n]{2}$，命$n\to\infty$取极限，得$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$，

由夹逼准则得 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}=1$；

当$|x|=1$时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$；

当$|x|>1$时，$|x|^3=\sqrt[n]{|x|^{3n}}<\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}\le\sqrt[n]{2|x|^{3n}}=\sqrt[n]{2}\,|x|^3$，命$n\to\infty$取极限，得

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2|x|^{3n}}=|x|^3$，由夹逼准则得 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}|x|^3\left(\frac{1}{|x|^{3n}}+1\right)^{\frac{1}{n}}=|x|^3$.

所以 $$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ |x^3|, & |x|\ge 1\end{cases}$$

再讨论 $f(x)$ 的不可导点. 按导数定义，易知 $x=\pm1$ 处 $f(x)$ 不可导，故应选(C).

(8)【答案】A

【详解】

方法 1：应用函数奇偶性的定义判定，

函数 $f(x)$ 的任一原函数可表示为 $F(x)=\int_0^x f(t)dt+C$，且 $F'(x)=f(x)$.

当 $F(x)$ 为偶函数时，有 $F(-x)=F(x)$，于是 $F'(-x)\cdot(-1)=F'(x)$，即 $-f(-x)=f(x)$，亦即 $f(-x)=-f(x)$，可见 $f(x)$ 为奇函数；

反过来，若 $f(x)$ 为奇函数，则 $F(-x)=\int_0^{-x} f(t)dt+C$，令 $t=-k$，则有 $dt=-dk$，

所以 $F(-x)=\int_0^{-x} f(t)dt+C=-\int_0^x f(-k)dk+C=\int_0^x f(k)dk+C=F(x)$，

从而 $F(x)=\int_0^x f(t)dt+C$ 为偶函数，可见(A)为正确选项.

方法 2：排除法，

令 $f(x)=1$，则取 $F(x)=x+1$，排除(B)、(C);

令 $f(x)=x$， 则取 $F(x)=\frac{1}{2}x^2$，排除(D);

(9)【答案】A

【详解】当 $x=3$ 时，有 $t^2+2t=3$，得 $t_1=1,t_2=-3$ (舍去，此时 y 无意义)，

曲线 $y=y(x)$ 的导数为 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{1+t}}{2t+2}=\frac{1}{2(t+1)^2}$，

所以曲线 $y=y(x)$ 在 $x=3$ (即 $t=1$)处的切线斜率为 $\frac{1}{8}$

于是在该处的法线的斜率为 -8，所以过点 $(3,\ln 2)$ 的法线方程为

$$y-\ln 2=-8(x-3),$$

令 y =0，得其与 x 轴交点的横坐标为：$\frac{1}{8}\ln 2+3$，故应(A).

(10)【答案】D

【详解】由于积分区域 D 是关于 $y=x$ 对称的，所以 x 与 y 互换后积分值不变，所以有

$$\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}d\sigma=\iint_D \frac{a\sqrt{f(y)}+b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)}+\sqrt{f(x)}}d\sigma$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D\left[\frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}+\frac{a\sqrt{f(y)}+b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)}+\sqrt{f(x)}}\right]d\sigma$$

$$=\frac{a+b}{2}\iint_D d\sigma=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 2^2=\frac{a+b}{2}\pi.$$ 应选(D).

(11)【答案】B

【详解】因为 $\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(x+y)+\varphi'(x-y)+\psi(x+y)-\psi(x-y)$，

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(x+y)-\varphi'(x-y)+\psi(x+y)+\psi(x-y)，$$

于是 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y)$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\varphi''(x+y)-\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)+\psi'(x-y)，$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y)，$$

可见有 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，应选(B).

(12)【答案】D

【详解】由于函数 $f(x)$ 在 $x=0$， $x=1$ 点处无定义，因此是间断点.

且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\infty$，所以 $x=0$ 为第二类间断点；

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=0$， $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=-1$，所以 $x=1$ 为第一类间断点，故应选(D).

(13)【答案】B

【详解】

方法 1：利用线性无关的定义

α_1,α_2 分别是特征值 λ_1,λ_2 对应的特征向量，根据特征值、特征向量的定义，有

$$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1,A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2\Rightarrow A(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2.$$

设有数 k_1,k_2，使得 $k_1\alpha_1+k_2A(\alpha_1+\alpha_2)=0$，则

$$k_1\alpha_1+k_2\lambda_1\alpha_1+k_2\lambda_2\alpha_2=0\Rightarrow(k_1+k_2\lambda_1)\alpha_1+k_2\lambda_2\alpha_2=0.$$

因$\lambda_1 \neq \lambda_2$，因不同特征值对应的特征向量必线性无关，故α_1, α_2线性无关，则

$$\begin{cases} k_1 + k_2\lambda_1 = 0, \\ \quad k_2\lambda_2 = 0. \end{cases}$$

当$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 \neq 0$时，方程只有零解，则$k_1 = 0, k_2 = 0$，此时$\alpha_1$，$A(\alpha_1 + \alpha_2)$线性无关；反过来，若$\alpha_1$，$A(\alpha_1 + \alpha_2)$线性无关，则必然有$\lambda_2 \neq 0$(否则，$\alpha_1$与$A(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda_1\alpha_1$线性相关)，故应选(B).

方法 2：将向量组的表出关系表示成矩阵形式

α_1, α_2分别是特征值λ_1, λ_2对应的特征向量，根据特征值、特征向量的定义，有

$A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1, A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2 \Rightarrow A(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2$.

由于 $\left(\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)\right) = \left(\alpha_1, \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2\right) = \left(\alpha_1, \alpha_2\right)\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$,

因$\lambda_1 \neq \lambda_2$，因不同特征值对应的特征向量必线性无关，知α_1, α_2线性无关. 若α_1，$A(\alpha_1 + \alpha_2)$线性无关，则$r\left(\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)\right) = 2$，则

$$2 = r\left(\left(\alpha_1, \alpha_2\right)\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\right) \leq \min\left\{r\left(\alpha_1, \alpha_2\right), r\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\right\} \leq r\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \leq 2,$$

故$2 \leq r\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \leq 2$ 从而$r\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = 2$，从而$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 \neq 0$

若$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 \neq 0$，则$r\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = 2$，又$\alpha_1, \alpha_2$线性无关，则

$$r\left(\left(\alpha_1, \alpha_2\right)\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\right) = r\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = 2,$$

则

$$r\left(\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)\right) = r\left(\left(\alpha_1, \alpha_2\right)\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\right) = 2$$

从而α_1，$A(\alpha_1 + \alpha_2)$线性无关的充要条件是$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 \neq 0.$ 故应选(B).

方法 3：利用矩阵的秩

α_1,α_2 分别是特征值 λ_1,λ_2 对应的特征向量，根据特征值、特征向量的定义，有

$$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1, A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2 \Rightarrow A(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2.$$

因 $\lambda_1\neq\lambda_2$，因不同特征值对应的特征向量必线性无关，故 α_1,α_2 线性无关，又 $A(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2$，故 α_1， $A(\alpha_1+\alpha_2)$ 线性无关 $\Leftrightarrow r(\alpha_1,A(\alpha_1+\alpha_2))=2$

又因为 $\left(\alpha_1,\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2\right) \overset{\text{将}\alpha_1\text{的}-\lambda_1\text{倍加到第2列}}{=} \left(\alpha_1,\lambda_2\alpha_2\right)$

则 $r(\alpha_1,\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2)=r(\alpha_1,\lambda_2\alpha_2)=2\Leftrightarrow\lambda_2\neq0$ (若 $\lambda_2=0$，与 $r(\alpha_1,\lambda_2\alpha_2)=2$ 矛盾)

方法 4：利用线性齐次方程组

α_1,α_2 分别是特征值 λ_1,λ_2 对应的特征向量，根据特征值、特征向量的定义，有

$$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1, A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2 \Rightarrow A(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2.$$

由 $\lambda_1\neq\lambda_2$，因不同特征值对应的特征向量必线性无关，故 α_1,α_2 线性无关，

$\alpha_1,A(\alpha_1+\alpha_2)$ 线性无关

$\Leftrightarrow \alpha_1,\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2$ 线性无关

$\Leftrightarrow \left|\alpha_1,\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2\right|\neq0$，

$\Leftrightarrow \left(\alpha_1,\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2\right)X=0$ 只有零解，又 $\left(\alpha_1,\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2\right)=\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\begin{pmatrix}1&\lambda_1\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \left(\alpha_1,\alpha_2\right)\begin{pmatrix}1&\lambda_1\\0&\lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=0$ 只有零解

$\Leftrightarrow \alpha_1,\alpha_2$ 线性无关时 $\left(\alpha_1,\alpha_2\right)Y=0$ 只有零解，故 $Y=\begin{pmatrix}1&\lambda_1\\0&\lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=0$，只有零解，

$\Leftrightarrow Y=\begin{pmatrix}1&\lambda_1\\0&\lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=0$ 的系数矩阵是个可逆矩阵，

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix}1&\lambda_1\\0&\lambda_2\end{vmatrix}=\lambda_2\neq0$，故应选(B)

方法 5：由 $\lambda_1\neq\lambda_2$， α_1,α_2 线性无关

α_1,α_2 分别是特征值 λ_1,λ_2 对应的特征向量，根据特征值、特征向量的定义，有

$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1, A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2 \Rightarrow A(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2$.

向量组$(\mathrm{I}):\alpha_1,\alpha_2$和向量组$(\mathrm{II}):\alpha_1,A(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2$. 显然向量组$(\mathrm{II})$可以由向量组$(\mathrm{I})$线性表出；当$\lambda_2\neq 0$时，不论$\lambda_1$的取值如何，向量组$(\mathrm{I})$可以由向量组$(\mathrm{II})$线性表出

$$\alpha_1=\alpha_1，\alpha_2=(-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\alpha_1)+\frac{1}{\lambda_2}(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2)=-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\cdot\alpha_1+\frac{1}{\lambda_2}A(\alpha_1+\alpha_2),$$

从而(I)，(II)是等价向量组$\Rightarrow$当$\lambda_2\neq 0$时，$r\left(\alpha_1,\alpha_2\right)=r\left(\alpha_1,\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2\right)=2$

(14)【答案】(C)

【详解】

方法 1：由题设，存在初等矩阵E_{12}(交换n阶单位矩阵的第 1 行与第 2 行所得)，使得

$E_{12}A=B$，(A进行行变换，故A左乘初等矩阵)，于是 $B^*=(E_{12}A)^*=A^*E^*_{12}$，

又初等矩阵都是可逆的，故 $E_{12}{}^{-1}=\dfrac{E_{12}{}^*}{|E_{12}|}$，

又$|E_{12}|=-|E|=-1$(行列式的两行互换，行列式反号)，$E_{12}{}^{-1}=E_{12}$，故

$$B^*=A^*E^*_{12}=A^*|E_{12}|\cdot E_{12}{}^{-1}=-A^*E_{12}{}^{-1}=-A^*E_{12},$$

即$A^*E_{12}=-B^*$,可见应选(C).

方法 2：交换A的第一行与第二行得B，即$B=E_{12}A$.

又因为A是可逆阵，$|E_{12}|=-|E|=-1$，故$|B|=|E_{12}A|=|E_{12}||A|=-|A|\neq 0$，

所以B可逆，且$B^{-1}=(E_{12}A)^{-1}=A^{-1}E_{12}$.

又$A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|},B^{-1}=\dfrac{B^*}{|B|}$，故$\dfrac{B^*}{|B|}=\dfrac{A^*}{|A|}E_{12}$，又因$|B|=-|A|$，故$A^*E_{12}=-B^*$.

三、解答题

(15)【详解】 作积分变量代换，命$x-t=u$，则

$$\int_0^x f(x-t)dt=\int_x^0 f(u)(-du)=\int_0^x f(u)du,$$

于是

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt}=\lim_{x\to0}\frac{x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt}{x\int_0^x f(u)du}\overset{洛必达法则}{=}\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)}{\int_0^x f(u)du+xf(x)}$$

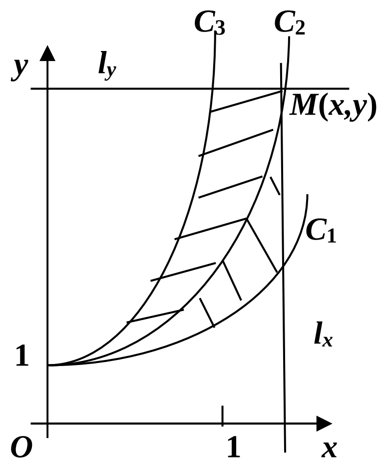
$$\overset{整理}{=}\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x f(u)du+xf(x)}\overset{上下同除x}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt}{f(x)+\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt}$$

而 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\lim\limits_{x\to0}\frac{(\int_0^x f(t)dt)'}{x'}=\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$

所以由极限的四则运算法则得，

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt}{f(x)+\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt}=\frac{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt}{\lim\limits_{x\to0}f(x)+\lim\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt}=\frac{f(0)}{f(0)+f(0)}\overset{f(0)\neq0}{=}\frac{1}{2}.$$

(16) 【详解】由题设图形知，C_3在C_1的左侧，根据平面图形的面积公式得，



$$S_1(x)=\int_0^x[e^t-\frac{1}{2}(1+e^t)]dt=\frac{1}{2}(e^x-x-1),$$

$$S_2(y)=\int_1^y(\ln t-\varphi(t))dt,$$

由$S_1(x)=S_2(y)$，得

$$\frac{1}{2}(e^x-x-1)=\int_1^y(\ln t-\varphi(t))dt,$$

注意到$M(x,y)$是$y=e^x$的点，

于是 $\frac{1}{2}(y-\ln y-1)=\int_1^y(\ln t-\varphi(t))dt$

两边对y求导得 $\frac{1}{2}(1-\frac{1}{y})=\ln y-\varphi(y)$，

整理上面关系式得函数关系为：$x=\varphi(y)=\ln y-\frac{y-1}{2y}.$

(17)【详解】由直线l_1过$(0,0)$和$(2,4)$两点知直线l_1的斜率为 2. 由直线l_1是曲线C在点(0,0)的切线，由导数的几何意义知$f'(0)=2$. 同理可得$f'(3)=-2$. 另外由点(3,2)是曲线C的

一个拐点知 $f''(3)=0$.

由分部积分公式，

$$\int_0^3 (x^2+x)f'''(x)dx=\int_0^3 (x^2+x)df''(x)=(x^2+x)f''(x)\Big|_0^3-\int_0^3 f''(x)(2x+1)dx$$

$$=(3^2+3)f''(3)-(0^2+0)f''(0)-\int_0^3 f''(x)(2x+1)dx$$

$$=-\int_0^3 (2x+1)df'(x)=-(2x+1)f'(x)\Big|_0^3+2\int_0^3 f'(x)dx$$

$$=-(2\times3+1)f'(3)+(2\times0+1)f'(0)+2\int_0^3 f'(x)dx$$

$$=16+2[f(3)-f(0)]=20.$$

(18)【详解】 由题设 $x=\cos t(0<t<\pi)$，有 $\frac{dx}{dt}=-\sin t$，由复合函数求导的链式法则得

$$y'=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{\sin t}\frac{dy}{dt},\quad y''=\frac{dy'}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=[\frac{\cos t}{\sin^2 t}\frac{dy}{dt}-\frac{1}{\sin t}\frac{d^2y}{dt^2}]\cdot(-\frac{1}{\sin t}),$$

代入原方程，$(1-\cos^2 t)[\frac{\cos t}{\sin^2 t}\frac{dy}{dt}-\frac{1}{\sin t}\frac{d^2y}{dt^2}]\cdot(-\frac{1}{\sin t})-\cos t(-\frac{1}{\sin t}\frac{dy}{dt})+y=0$，

化简得 $\frac{d^2y}{dt^2}+y=0$，其特征方程为 $r^2+1=0$，特征根 $r_{1,2}=\pm i$，通解为 $y=C_1\cos t+C_2\sin t$

所以 $y=C_1\cos t+C_2\sin t=C_1x+C_2\sqrt{1-x^2}$，

将初始条件 $y\Big|_{x=0}=1$, 代入得，$1=C_1\times0+C_2\sqrt{1-0^2}=C_2$，即 $C_2=1$.

而 $y'=C_1x'+C_2(\sqrt{1-x^2})'=C_1+\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}$，

将 $y'\Big|_{x=0}=2$ 代入得 $2=C_1+\frac{2\times0}{2\sqrt{1-0^2}}=C_1$，即 $C_1=2$.

将 $C_1=2, C_2=1$ 代入通解公式得满足条件的特解为 $y=2x+\sqrt{1-x^2}$，$-1<x<1$.

(19)【详解】

(I) 令 $F(x)=f(x)-1+x$，则 $F(x)$ 在[0，1]上连续，且 $F(0)=-1<0$，$F(1)=1>0$，于是由闭区间连续函数的介值定理知，存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=1-\xi$.

(II) 在 $[0,\xi]$ 和 $[\xi,1]$ 上对 $f(x)$ 分别应用拉格朗日中值定理，知存在两个不同的点

$\eta \in (0,\xi), \zeta \in (\xi,1)$，使得 $f'(\eta) = \dfrac{f(\xi)-f(0)}{\xi - 0}$， $f'(\zeta) = \dfrac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}$

于是　$f'(\eta)f'(\zeta) = \dfrac{f(\xi)}{\xi} \cdot \dfrac{1-f(\xi)}{1-\xi} = \dfrac{1-\xi}{\xi} \cdot \dfrac{\xi}{1-\xi} = 1.$

(20)【详解】由 $dz = 2xdx - 2ydy$ 知 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x, \dfrac{\partial z}{\partial y} = -2y$. 对 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x$ 两边积分得 $z = f(x,y) = x^2 + c(y)$. 将 $z(x,y) = x^2 + c(y)$ 代入 $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -2y$ 得 $c'(y) = 2y$. 所以 $c(y) = y^2 + c$. 所以 $z = x^2 - y^2 + c$.再由 $x=1, y=1$ 时 $z=2$ 知， $c=2$. 于是所讨论的函数为 $z = x^2 - y^2 + 2$.

求 z 在 $x^2 + \dfrac{y^2}{4} < 1$ 中的驻点. 由 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x, \dfrac{\partial z}{\partial y} = -2y$ 得驻点 $(0,0)$ ，对应的 $z = f(0,0) = 2$.

讨论 $z = x^2 - y^2 + 2$ 在 D 的边界 $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$ 上的最值，有两个方法.

方法 1：把 $y^2 = 4(1-x^2)$ 代入 z 的表达式，有

$$z = x^2 - y^2 + 2 = 5x^2 - 2, \quad -1 \le x \le 1$$

$$z'_x = 10x$$

命 $z'_x = 0$ 解得 $x = 0$ ，对应的 $y = \pm 2$ ， $z\big|_{x=0, y=\pm 2} = -2$

还要考虑 $-1 \le x \le 1$ 的端点 $x = \pm 1$ ，对应的 $y = 0$ ， $z\big|_{x=\pm 1, y=0} = 3$

由 $z = 2, z = -2, z = 3$ 比较大小，故

$\min z = -2$ (对应于 $x = 0$ ， $y = \pm 2$)， $\max z = 3$ (对应于 $x = 0$ ， $y = \pm 2$)

方法 2：用拉格朗日乘数法，作函数 $F(x,y,\lambda) = x^2 - y^2 + 2 + \lambda(x^2 + \dfrac{y^2}{4} - 1)$

解方程组 $\begin{cases} F'_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} + 2\lambda x = 2(1+\lambda)x = 0, \\ F'_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\lambda y}{2} = -2y + \dfrac{1}{2}\lambda y = 0 \\ F'_\lambda = x^2 + \dfrac{y^2}{4} - 1 = 0 \end{cases}$

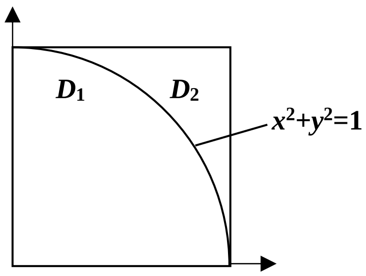
由上面的第一个方程解得 $x=0$ 或 $\lambda=-1$：当 $x=0$ 时由最后一个方程解得 $y=\pm 2$；当 $\lambda=-1$ 是由第二个方程解得 $y=0$，这时由最后一个方程解得 $x=\pm 1$．故解得 4 个可能的极值点 $(0,2),(0,-2),(1,0),(-1,0)$.计算对应 z 的值：

$$z\big|_{(0,2)} = -2,\quad z\big|_{(0,-2)} = -2,\quad z\big|_{(1,0)} = 3,\quad z\big|_{(-1,0)} = 3$$

再与 $z\big|_{(0,0)} = 2$ 比较大小，结论同方法 1.

(21)【详解】D：$x^2+y^2-1=0$ 为以 O 为中心半径为 1 的圆周，划分 D 如下图为 D_1 与 D_2 .

这时可以去掉绝对值符号 $\left|x^2+y^2-1\right| = \begin{cases} x^2+y^2-1, & (x,y)\in D_2 \\ 1-x^2-y^2, & (x,y)\in D_1 \end{cases}$



方法 1：$\iint\limits_D \left|x^2+y^2-1\right| d\sigma = -\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-1)dxdy + \iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-1)dxdy$

后一个积分用直角坐标做，

$$\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-1)dxdy = \int_0^1 dx\int_{\sqrt{1-x^2}}^1 (x^2+y^2-1)dy$$

$$=\int_0^1 [(x^2-1)-(x^2-1)\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}]dx$$

$$=\int_0^1 [(x^2-\frac{2}{3})+\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}]dx = \int_0^1 x^2dx - \int_0^1\frac{2}{3}dx + \frac{2}{3}\int_0^1(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t dt = -\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1+\cos 2t}{2})^2 dt$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos 2t+\cos^2 2t)\ dt$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos 2t+\frac{1+\cos 4t}{2})dt$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\frac{1}{2}+2\cos 2t+\frac{\cos 4t}{2})dt$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{2}\times\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos 2t+\frac{\cos 4t}{2})dt$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{\pi}{8}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times 0=-\frac{1}{3}+\frac{\pi}{8}.$$

前一个积分用极坐标做，

$$\iint\limits_{D_1}(1-x^2-y^2)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1(1-r^2)rdr=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})d\theta=\frac{\pi}{8}.$$

所以 $\displaystyle\iint\limits_D\left|x^2+y^2-1\right|d\sigma=\frac{\pi}{8}+-\frac{1}{3}+\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}.$

方法 2：由于区域 D_2 的边界复杂，计算该积分较麻烦，可以将 D_2 内的函数“扩充”到整个区域 $D=D_1\bigcup D_2$，再减去“扩充”的部分，就简化了运算. 即

$$\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D}(x^2+y^2-1)d\sigma-\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-1)d\sigma$$

因此

$$\iint\limits_D\left|x^2+y^2-1\right|d\sigma=\iint\limits_{D_1}(1-x^2-y^2)d\sigma+\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-1)d\sigma$$

$$=\iint\limits_{D_1}(1-x^2-y^2)d\sigma+\iint\limits_{D}(x^2+y^2-1)d\sigma-\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-1)d\sigma$$

$$=2\iint\limits_{D_1}(1-x^2-y^2)d\sigma+\iint\limits_{D}(x^2+y^2-1)d\sigma$$

由极坐标 $\displaystyle\iint\limits_{D_1}(1-x^2-y^2)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1(1-r^2)rdr=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})d\theta=\frac{\pi}{8}.$

而 $\displaystyle\iint\limits_{D}(x^2+y^2-1)d\sigma=\int_0^1dy\int_0^1(x^2+y^2-1)dx=\int_0^1[\frac{x^3}{3}+(y^2-1)x]\begin{matrix}1\\0\end{matrix}dy$

$$=\int_0^1[\frac{1}{3}+y^2-1]dy=\int_0^1(y^2-\frac{2}{3})dy=[\frac{y^3}{3}-\frac{2}{3}y]\begin{matrix}1\\0\end{matrix}=-\frac{1}{3}$$

所以 $\displaystyle\iint\limits_D\left|x^2+y^2-1\right|d\sigma=2\times\frac{\pi}{8}-\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}.$

(22)【详解】

方法 1：记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3), B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$. 由于 β_1,β_2,β_3 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，故

$r(A)<3$，(若 $r(A)=3$，则任何三维向量都可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出)，从而

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{vmatrix}\overset{\text{把第2、3行}}{\underset{\text{加到第1行}}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}2+a&2+a&2+a\\1&a&1\\a&1&1\end{vmatrix}\overset{\text{提取第1行的}}{\underset{\text{公因子}(2+a)}{=\!=\!=}}(2+a)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a&1\\a&1&1\end{vmatrix}$$

$$\overset{2\text{行}-1\text{行}}{\underset{3\text{行}-1\text{行}}{=\!=\!=}}(2+a)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&a-1&0\\a-1&0&0\end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{按第3列展开}}{=\!=\!=}(2+a)\cdot(-1)^{1+3}\times1\times\begin{vmatrix}0&a-1\\a-1&0\end{vmatrix}=-(2+a)(a-1)^2=0$$

(其中 $(-1)^{1+3}$ 指数中的 1 和 3 分别是1所在的行数和列数)

从而得 $a=1$ 或 $a=-2$.

当 $a=1$ 时，$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\beta_1=[1,1,1]^T$，则 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\beta_1+0\cdot\beta_2+0\cdot\beta_3$，

故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可由 β_1,β_2,β_3 线性表出，但 $\beta_2=[-2,1,4]^T$ 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出(因

为方程组 $\beta_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，即 $\begin{cases}k_1+k_2+k_3=-2\\k_1+k_2+k_3=1\\k_1+k_2+k_3=4\end{cases}$ 无解)，故 $a=1$ 符

合题意.

当 $a=-2$ 时,由于

$$[B\vdots A]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-2&-2&1&1&-2\\1&-2&-2&1&-2&1\\-2&4&-2&-2&1&1\end{array}\right]\xrightarrow[3\text{行}+1\text{行}\times2]{2\text{行}-1\text{行},}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-2&-2&1&1&-2\\0&0&0&0&-3&-3\\0&0&-6&0&0&0\end{array}\right]$$

因 $r(B)=2\neq r(B\vdots\alpha_2)=3$，系数矩阵的秩和增广矩阵的秩不相等，故方程组

$BX=\alpha_2$ 无解，故 α_2 不能由 β_1,β_2,β_3 线性表出，这和题设矛盾，故 $a=-2$ 不合题意.

因此 $a=1$.

方法 2：对矩阵 $\overline{A}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3\vdots\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 作初等行变换，有

$$\overline{A}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3\vdots\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}1 & -2 & -2 & \vdots & 1 & 1 & a\\ 1 & a & a & \vdots & 1 & a & 1\\ a & 4 & a & \vdots & a & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[3行-1行\times a]{2行-1行,}\begin{bmatrix}1 & -2 & -2 & \vdots & 1 & 1 & a\\ 0 & a+2 & a+2 & \vdots & 0 & a-1 & 0\\ 0 & 4+2a & 3a & \vdots & 0 & 1-a & 1-a\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{3行-2行\times 2}\begin{bmatrix}1 & -2 & -2 & \vdots & 1 & 1 & a\\ 0 & a+2 & a+2 & \vdots & 0 & a-1 & 0\\ 0 & 0 & a-4 & \vdots & 0 & 3(1-a) & 1-a\end{bmatrix},$$

当 $a=-2$ 时，$\overline{A}\to\begin{bmatrix}1 & -2 & -2 & \vdots & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -6 & \vdots & 0 & 3 & 3\end{bmatrix}$，不存在非零常数 k_1,k_2,k_3，

使得 $\begin{pmatrix}1\\-3\\3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}-2\\0\\-6\end{pmatrix}$，$\alpha_2$ 不能由 β_1,β_2,β_3 线性表示，因此 $a\neq -2$；

当 $a=4$ 时，

$$\overline{A}\to\begin{bmatrix}1 & -2 & -2 & \vdots & 1 & 1 & 4\\ 0 & 6 & 6 & \vdots & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -9 & -3\end{bmatrix},$$

α_3 不能由 β_1,β_2,β_3 线性表示，不存在非零常数 k_1,k_2,k_3，使得 $\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-2\\6\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}-2\\6\\0\end{pmatrix}$. 因此 $a\neq 4$.

而当 $a\neq -2$ 且 $a\neq 4$ 时，秩 $r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=3$，此时向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可由向量组 β_1,β_2,β_3 线性表示. 又

$$\overline{B}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\vdots\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{bmatrix}1 & 1 & a & \vdots & 1 & -2 & -2\\ 1 & a & 1 & \vdots & 1 & a & a\\ a & 1 & 1 & \vdots & a & 4 & a\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[3行-1行\times a]{2行-1行,}\begin{bmatrix}1 & 1 & a & \vdots & 1 & -2 & -2\\ 0 & a-1 & 1-a & \vdots & 0 & a+2 & a+2\\ 0 & 1-a & 1-a^2 & \vdots & 0 & 4+2a & 3a\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{3行+2行}\begin{bmatrix}1 & 1 & a & \vdots & 1 & -2 & -2\\ 0 & a-1 & 1-a & \vdots & 0 & a+2 & a+2\\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & \vdots & 0 & 6+3a & 4a+2\end{bmatrix},$$

由题设向量组 β_1,β_2,β_3 不能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，则方程组 $(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)x=\beta_1$ 或 $(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)x=\beta_2$ 或 $(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)x=\beta_3$ 无解，故系数矩阵的秩 $\neq$ 增广矩阵的秩，故 $r(\overline{B})\neq r(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)$.

又当 $a\neq -2$ 且 $a\neq 4$ 时，$r(\overline{B})=3$，则必有 $a-1=0$ 或 $2-a-a^2=0$，即 $a=1$ 或 $a=-2$.

综上所述，满足题设条件的 a 只能是：$a=1$.

方法 3：记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，对矩阵 $(A\vdots B)$ 作初等行变换，得

$$(A\vdots B)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\vdots\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{bmatrix}1 & 1 & a & \vdots & 1 & -2 & -2\\ 1 & a & 1 & \vdots & 1 & a & a\\ a & 1 & 1 & \vdots & a & 4 & a\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[3行-1行\times a]{2行-1行,}\begin{bmatrix}1 & 1 & a & \vdots & 1 & -2 & -2\\ 0 & a-1 & 1-a & \vdots & 0 & a+2 & a+2\\ 0 & 1-a & 1-a^2 & \vdots & 0 & 4+2a & 3a\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{3行+2行}\begin{bmatrix}1 & 1 & a & \vdots & 1 & -2 & -2\\ 0 & a-1 & 1-a & \vdots & 0 & a+2 & a+2\\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & \vdots & 0 & 6+3a & 4a+2\end{bmatrix},$$

由于 β_1,β_2,β_3 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，故 $r(A)<3$，(若 $r(A)=3$，则任何三维向量都可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出)，从而

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & a & 1\\ a & 1 & 1\end{vmatrix}\underline{\underline{\text{把第2、3行加到第1行}}}\begin{vmatrix}2+a & 2+a & 2+a\\ 1 & a & 1\\ a & 1 & 1\end{vmatrix}\underline{\underline{\text{提取第1行的公因子}(2+a)}}(2+a)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ a & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{\substack{2行-1行\\3行-1行}}}(2+a)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & a-1 & 0\\ a-1 & 0 & 0\end{vmatrix}\underline{\underline{\text{按第3列展开}}}(2+a)\cdot(-1)^{1+3}\times 1\times\begin{vmatrix}0 & a-1\\ a-1 & 0\end{vmatrix}$$

$$=-(2+a)(a-1)^2=0$$

从而得 $a=1$ 或 $a=-2$.

当 $a=1$ 时，

$$\left(A \vdots B\right)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 \vdots 1 & -2 & 2\\0 & 0 & 0 \vdots 0 & 3 & 3\\0 & 0 & 0 \vdots 0 & 9 & 6\end{pmatrix},$$

则 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\beta_1+0\cdot\beta_2+0\cdot\beta_3$， $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可由 β_1,β_2,β_3 线性表出，但由于 $r\left(A\right)=1\neq r\left(A\vdots\beta_2\right)=2$，系数矩阵的秩和增广矩阵的秩不相等，方程组 $Ax=\beta_2$ 无解，$\beta_2=[-2,1,4]^T$ 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出. 或由于 $r\left(A\right)=1\neq r\left(A\vdots\beta_3\right)=2$，系数矩阵的秩和增广矩阵的秩不相等，方程组 $Ax=\beta_3$ 无解， β_3 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，即 β_1,β_2,β_3 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，故 $a=1$ 符合题意.

当 $a=-2$ 时，

$$\left(A \vdots B\right)=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 \vdots 1 & -2 & 2\\0 & -3 & 3 \vdots 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 \vdots 0 & 0 & -6\end{pmatrix},$$

因 $r\left(A\right)=2\neq r\left(A\vdots\beta_3\right)=3$,，系数矩阵的秩和增广矩阵的秩不相等， β_1,β_2,β_3 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，但 $r\left(B\right)=2\neq r\left(B\vdots\alpha_2\right)=3$(或 $r\left(B\vdots\alpha_3\right)=3$)，系数矩阵的秩和增广矩阵的秩不相等，即 $BX=\alpha_2$(或 $BX=\alpha_3$)无解，即 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 不能由 β_1,β_2,β_3 线性表出，与题设矛盾，故 $a=-2$ 不合题意.

故 $a=1$.

(23)【详解】 由 $AB=0$ 知，B 的每一列均为 $Ax=0$ 的解，且 $r(A)+r(B)\leq 3$.(3 是 A 的列数或 B 的行数)

(1) 若 $k\neq 9$，β_1,β_3 不成比例， β_1,β_2 成比例，则 $r(B)=2$，方程组 $Ax=0$ 的解向量中至少有两个线性无关的解向量，故它的基础解系中解向量的个数 ≥ 2，又基础解系中解向量的个数=未知数的个数 $-r(A)=3-r(A)$，于是 $r(A)\leq 1$.

又矩阵 A 的第一行元素 $\left(a,b,c\right)$ 不全为零，显然 $r(A)\geq 1$，故 $r(A)=1$. 可见此时 $Ax=0$ 的基础解系由 $3-r(A)=2$ 个线性无关解向量组成， β_1,β_3 是方程组的解且线性无关，可作为其基础解系，故 $Ax=0$ 的通解为：

$$x=k_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}3\\6\\k\end{pmatrix},k_1,k_2\text{为任意常数.}$$

(2) 若 $k=9$，则 β_1,β_2,β_3 均成比例，故 $r(B)$ =1，从而 $1\le r(A)\le 2$. 故 $r(A)=1$ 或 $r(A)=2$.

①若 $r(A)=2$，则方程组的基础解系由一个线性无关的解组成，β_1 是方程组 $Ax=0$ 的基础解系， 则 $Ax=0$ 的通解为：$x=k_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},k_1$ 为任意常数.

②若 $r(A)=1$，则 A 的三个行向量成比例，因第 1 行元素 (a,b,c) 不全为零，不妨设 $a\ne 0$，则 $Ax=0$ 的同解方程组为：$ax_1+bx_2+cx_3=0$，系数矩阵的秩为 1，故基础解系由 $3-1=2$ 个线性无关解向量组成，选 x_2,x_3 为自由未知量，分别取 $x_2=1,x_3=0$ 或 $x_2=0,x_3=1$，方程组的基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix}-\frac{b}{a}\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2\begin{pmatrix}-\frac{c}{a}\\0\\1\end{pmatrix}$，则其通解为 $x=k_1\begin{pmatrix}-\frac{b}{a}\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-\frac{c}{a}\\0\\1\end{pmatrix},k_1,k_2$ 为任意常数.