2007年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、选择题：1～10小题，每小题4分，共40分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

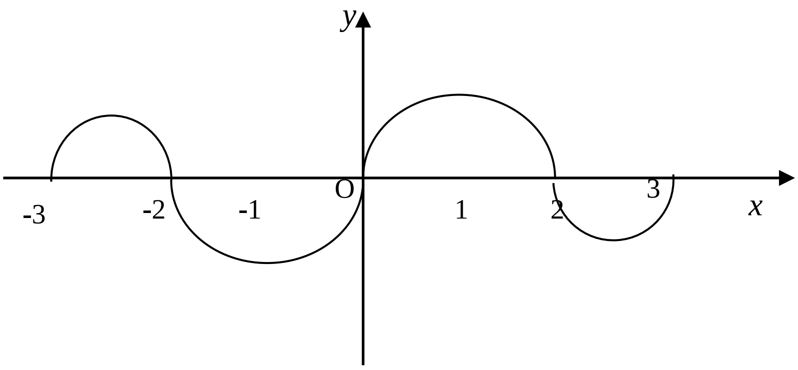
(1) 当 $x \to 0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是(　　)

$A.1-e^{\sqrt{x}}$　　$B.\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$　　$C.\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　$D.1-\cos\sqrt{x}$

(2) 函数 $f(x)=\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的第一类间断点是 $x=$(　　)

$A.$ 0　　$B.$ 1　　$C.$ $-\dfrac{\pi}{2}$　　$D.$ $\dfrac{\pi}{2}$

(3) 如图，连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-3,-2],[2,3]$ 上的图形分别是直径为1的上、下半圆周,在区间 $[-2,0],[0,2]$ 上的图形分别是直径为2的上、下半圆周.设 $F(x)=\int_0^x f(t)dt,$ 则下列结论正确的是(　　)



$A.\ F(3)=-\dfrac{3}{4}F(-2)$　　$B.\ F(3)=\dfrac{5}{4}F(2)$

$C.\ F(-3)=\dfrac{3}{4}F(2)$　　$D.\ F(-3)=-\dfrac{5}{4}F(-2)$

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，则下列命题错误的是(　)

$A.$ 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$　　$B.$ 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$

$C.$ 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在　　$D.$ 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在

(5) 曲线 $y=\frac{1}{x}+\ln(1+e^{x})$ 渐近线的条数为(　)

$A.$ 0　　　$B.$1　　　$C.$2　　　$D.$3

(6) 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上具有二阶导数，且 $f''(x)>0$，令 $u_n=f(n)(n=1,2,\cdots)$，则下列结论正确的是(　)

$A.$ 若 $u_1>u_2$，则 $\{u_n\}$ 必收敛　　　$B.$ 若 $u_1>u_2$，则 $\{u_n\}$ 必发散

$C.$ 若 $u_1<u_2$，则 $\{u_n\}$ 必收敛　　　$D.$ 若 $u_1<u_2$，则 $\{u_n\}$ 必发散

(7) 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的一个充分条件是(　)

$A.$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left[f(x,y)-f(0,0)\right]=0$

$B.$ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\left[f(x,0)-f(0,0)\right]}{x}=0$ 且 $\lim\limits_{y\to0}\frac{\left[f(0,y)-f(0,0)\right]}{y}=0$

$C.$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\left[f(x,y)-f(0,0)\right]}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

$D.$ $\lim\limits_{x\to0}\left[f_x'(x,0)-f_x'(0,0)\right]=0$ 且 $\lim\limits_{y\to0}\left[f_y'(0,y)-f_y'(0,0)\right]=0$

(8) 设函数 $f(x,y)$ 连续，则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dx\int_{\sin x}^{1}f(x,y)dy$ 等于(　)

$A.$ $\int_0^1dy\int_{\pi+\arcsin y}^{\pi}f(x,y)dx$　　　$B.$ $\int_0^1dy\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}f(x,y)dx$

$C.$ $\int_0^1dy\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arcsin y}f(x,y)dx$　　　$D.$ $\int_0^1dy\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)dx$

(9) 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则下列向量组线性相关的是 (　)

$A.$ $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$　　　$B.$ $\alpha_2+\alpha_1,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$

$C.$ $\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1$　　　$D.$ $\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1$

(10) 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，则 A 与 B(　)

$A.$ 合同，且相似　　　$B.$ 合同，但不相似

$C.$ 不合同，但相似 $D.$ 既不合同，也不相似

二、填空题：11-16 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-\sin x}{x^3}=$ __________

(12) 曲线 $\begin{cases} x=\cos t+\cos^2 t \\ y=1+\sin t \end{cases}$ 上对应于 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 的点处的法线斜率为 ______

(13) 设函数 $y=\dfrac{1}{2x+3}$，则 $y^{(n)}(0)=$ ____________

(14) 二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''-4y'+3y=2e^{2x}$ 的通解为 $y=$ ______

(15) 设 $f(u,v)$ 是二元可微函数，$z=f(\dfrac{y}{x},\dfrac{x}{y})$,则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ __________

(16) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A^3 的秩为__________.

三、解答题：17－24 小题，共 86 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17)(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 是区间 $[0,\dfrac{\pi}{4}]$ 上的单调、可导函数，且满足 $\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt=\int_0^x t\dfrac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}dt$

其中 f^{-1} 是 f 的反函数，求 $f(x)$.

(18)(本题满分 11 分)

设 D 是位于曲线 $y=\sqrt{x}a^{-\frac{x}{2a}}\,(a>1,0\le x<+\infty)$ 下方、x 轴上方的无界区域.

(I) 求区域 D 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积 $V\left(a\right)$;

(II) 当 a 为何值时，$V\left(a\right)$ 最小？并求出最小值.

(19)(本题满分 11 分)

求微分方程 $y''(x+y'^2)=y'$ 满足初始条件 $y(1)=y'(1)=1$ 的特解.

(20)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(u)$ 具有二阶导数，且 $f'(0)=1$，函数 $y=y(x)$ 由方程 $y-xe^{y-1}=1$ 所确定.

设 $z=f(\ln y-\sin x)$，求 $\frac{dz}{dx}\Big|_{x=0}, \frac{d^2z}{dx^2}\Big|_{x=0}$.

(21)(本题满分 11 分)

设函数 $f(x)$， $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导且存在相等的最大值，又

$f(a)=g(a)$， $f(b)=g(b)$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

(22)(本题满分 11 分)

设二元函数 $f(x,y)=\begin{cases} x^2, & |x|+|y|\le 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 1<|x|+|y|\le 2 \end{cases}$

计算二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\,\big|\,|x|+|y|\le 2\}$

(23)(本题满分 11 分)

设线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$ (1)

与方程 $x_1+2x_2+x_3=a-1$ (2)

有公共解，求 a 得值及所有公共解.

(24)(本题满分 11 分)

设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2,\alpha_1=(1,-1,1)^T$ 是 A 的属于 λ_1 的一个特征向量.记 $B=A^5-4A^3+E$，其中 E 为 3 阶单位矩阵.

(I)验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量，并求 B 的全部特征值与特征向量;

(II) 求矩阵 B.

2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

一、选择题

(1)【答案】B

【详解】

方法 1：排除法：由几个常见的等价无穷小，当 $x\to 0$ 时，

$e^x-1\sim x;\sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x;\ 1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}\sim 2(\frac{x}{2})^2=\frac{x^2}{2}$，当 $x\to 0^+$ 时，此时

$\sqrt{x}\to 0$，所以 $1-e^{\sqrt{x}}\sim(-\sqrt{x});\sqrt{1\ +\sqrt{x}}-1\sim\frac{1}{2}\sqrt{x};\ 1-\cos\sqrt{x}\sim\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2$，可以排除 A、C、D，所以选(B).

方法 2： $\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}=\ln\frac{1-\sqrt{x}+\sqrt{x}+x}{1-\sqrt{x}}=\ln[1+\frac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}]$

当 $x\to 0^+$ 时，$1-\sqrt{x}\to 1$，$\frac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\to 0$，又因为 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)\sim x$，

所以 $\ln[1+\frac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}]\sim\frac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\sim x+\sqrt{x}=\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)\sim\sqrt{x}$，选(B).

方法 3： $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\frac{1+x}{1-\sqrt{x}})}{\sqrt{x}}\overset{\text{洛}}{=\!=\!=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\left[\ln(\frac{1+x}{1-\sqrt{x}})\right]'}{\left(\sqrt{x}\right)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1-\sqrt{x}}{1+x}(\frac{1+x}{1-\sqrt{x}})'}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1-\sqrt{x}}{1+x}\cdot\frac{1-\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+x)}{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}+1-x\right)}{(1+x)\left(1-\sqrt{x}\right)}$$

设 $\frac{2\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}+1-x\right)}{(1+x)\left(1-\sqrt{x}\right)}=\frac{A}{1+x}+\frac{B}{1-\sqrt{x}}$，则 $A\left(1-\sqrt{x}\right)+B(1+x)=4x+2\sqrt{x}-2x\sqrt{x}$

对应系数相等得：$A=2\sqrt{x},B=1$，所以

$$原式=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}+1-x\right)}{(1+x)\left(1-\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{2\sqrt{x}}{1+x}+\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right]$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{2\sqrt{x}}{1+x}+\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1-\sqrt{x}}=0+1=1$$，选(B).

(2)【答案】(A)

【详解】首先找出 $f(x)$ 的所有不连续点，然后考虑 $f(x)$ 在间断点处的极限.

$f(x)$ 的不连续点为 0、1、$\pm\frac{\pi}{2}$，第一类间断点包括可去间断点及跳跃间断点.逐个考虑各个选项即可.

对 A： $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}+e}{e^{\frac{1}{x}}-e}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e(1+e^{1-\frac{1}{x}})}{e(1-e^{1-\frac{1}{x}})}=1,$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}=\lim_{x\to0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}+e}{e^{\frac{1}{x}}-e}=\frac{\lim\limits_{x\to0^-}\left(e^{\frac{1}{x}}+e\right)}{\lim\limits_{x\to0^-}\left(e^{\frac{1}{x}}-e\right)}=\frac{e}{-e}=-1.$$

$f(x)$ 在 $x=0$ 存在左右极限，但 $\lim\limits_{x\to0^+}f\left(x\right)\neq\lim\limits_{x\to0^-}f\left(x\right)$，所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，选(A)；

同样，可验证其余选项是第二类间断点，$\lim\limits_{x\to1}f\left(x\right)=\infty$，$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}f\left(x\right)=\infty$，$\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}f\left(x\right)=\infty$.

(3)【答案】C

【详解】由题给条件知，$f(x)$ 为 x 的奇函数，则 $f(-x)=-f(x)$，由 $F(x)=\int_0^x f(t)dt,$ 知

$$F(-x)=\int_0^{-x}f(t)dt\underline{\underline{令t=-u}}\int_0^x f(-u)d(-u)\underline{\underline{因为f(-u)=-f(u)}}\int_0^x f(u)du=F(x),$$

故 $F(x)$ 为 x 的偶函数，所以 $F(-3)=F(3)$.

而 $F(2)=\int_0^2 f(t)dt$ 表示半径 $R=1$ 的半圆的面积，所以 $F(2)=\int_0^2 f(t)dt=\frac{\pi R^2}{2}=\frac{\pi}{2}$，

$F(3)=\int_0^3 f(t)dt=\int_0^2 f(t)dt+\int_2^3 f(t)dt$，其中 $\int_2^3 f(t)dt$ 表示半径 $r=\frac{1}{2}$ 的半圆的面积的负值，所以 $\int_2^3 f(t)dt=-\frac{\pi r^2}{2}=-\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{\pi}{8}$

所以 $$F(3)=\int_0^2 f(t)dt+\int_2^3 f(t)dt=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}=\frac{3\pi}{8}=\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{4}F(2)$$

所以 $F(-3)=F(3)=\frac{3}{4}F(2)$，选择 C

(4)【答案】(D)

【详解】

方法 1：论证法，证明 $A.B.C$ 都正确，从而只有 $D.$ 不正确.

由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在及 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}(\frac{f(x)}{x}x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}x=0\cdot\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$$，所以(A)正确；

由选项(A)知， $f(0)=0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，根据导数定义，

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ 存在，所以(C)也正确；

由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以 $f(-x)$ 在 $x=0$ 处连续，从而

$$\lim_{x\to 0}\left[f(x)+f(-x)\right]=\lim_{x\to 0}f(x)+\lim_{x\to 0}f(-x)=f(0)+f(0)=2f(0)$$

所以 $2f(0)=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}\cdot x\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}x=0\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}=0$

即有 $f(0)=0$.所以(B)正确，故此题选择(D).

方法 2：举例法，举例说明(D)不正确. 例如取 $f(x)=|x|$，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|-|-x|}{x}=0\text{存在}$$

而 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x-0}{x-0}=-1$， $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x-0}{x-0}=1$，

左右极限存在但不相等，所以 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 的导数 $f'(0)$ 不存在. (D)不正确，选(D).

(5)【答案】D

【详解】因为 $\lim\limits_{x\to 0}y=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+e^x)=\infty$，

所以 $x=0$ 是一条铅直渐近线；

因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(1+e^x)=0+0=0$，

所以 $y=0$ 是沿 $x\to-\infty$ 方向的一条水平渐近线；

令 $$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(1+e^x)}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}\ \underline{\underline{\text{洛必达法则}}}\ 0+\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{1+e^x}}{1}=1$$

令 $$b=\lim_{x\to+\infty}\left(y-a\cdot x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)-x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(1+e^x)-x\right)\ \underline{\underline{x=\ln e^x}}\ 0+\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(1+e^x)-\ln e^x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln(\frac{1+e^x}{e^x})=\lim_{x\to+\infty}\ln(e^{-x}+1)=\ln1=0$$

所以 $y=x$ 是曲线的斜渐近线，所以共有 3 条，选择(D)

(6)【答案】(D)

【详解】$u_n=f(n)$，由拉格朗日中值定理，有

$$u_{n+1}-u_n=f(n+1)-f(n)=f'(\xi_{\rm n})(n+1-n)=f'(\xi_{\rm n}),(n=1,2,\cdots),$$

其中 $n<\xi_{\rm n}<n+1$，$\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_{\rm n}<\cdots$. 由 $f''(x)>0,$ 知 $f'(x)$ 严格单调增，故

$$f'(\xi_1)<f'(\xi_2)<\cdots<f'(\xi_{\rm n})<\cdots.$$

若 $u_1<u_2$，则 $f'(\xi_1)=u_2-u_1>0,$ 所以 $0<f'(\xi_1)<f'(\xi_2)<\cdots<f'(\xi_{\rm n})<\cdots.$

$$u_{n+1}=u_1+\sum_{k=1}^{n}(u_{k+1}-u_k)=u_1+\sum_{k=1}^{n}f'(\xi_{\rm k})>u_1+nf'(\xi_1).$$

而 $f'(\xi_1)$ 是一个确定的正数. 于是推知 $\lim\limits_{n\to\infty}u_{n+1}=+\infty,$ 故 $\{u_n\}$ 发散. 选(D)

(7)【答案】(C)

【详解】一般提到的全微分存在的一个充分条件是：设函数 $f(x,y)$ 在点 $\left(x_0,y_0\right)$ 处存在全微分，但题设的 $A.B.C.D.$ 中没有一个能推出上述充分条件，所以改用全微分的定义检查之. 全微分的定义是：设 $f(x,y)$ 在点 $\left(x_0,y_0\right)$ 的某领域内有定义，且 $f(x,y)$ 在点 $\left(x_0,y_0\right)$ 处的全增量可以写成 $f\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0,y_0\right)=A\Delta x+B\Delta y+o\left(\rho\right)$，其中 A,B 为与 $\Delta x,\Delta y$ 无关的常数，$\rho=\sqrt{\left(\Delta x\right)^2+\left(\Delta y\right)^2}$，$\lim\limits_{\rho\to0}\frac{o\left(\rho\right)}{\rho}=0$，则称 $f(x,y)$ 在点 $\left(x_0,y_0\right)$ 处

可微，$A\Delta x+B\Delta y$ 称为 $f(x,y)$ 在点 $\left(x_0,y_0\right)$ 处的全微分，对照此定义，就可解决本题.

选项 $A.$ 相当于已知 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续；选项 $B.$ 相当于已知两个一阶偏导数 $f_x'\left(0,0\right)$，$f_y'\left(0,0\right)$ 存在，因此 $A.$ $B.$ 均不能保证 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微. 选项 $D.$ 相当于已知两个一阶偏导数 $f_x'\left(0,0\right)$，$f_y'\left(0,0\right)$ 存在，但不能推导出两个一阶偏导函数 $f_x'\left(x,y\right)$，$f_y'\left(x,y\right)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，因此也不能保证 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

由 $C.$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\left[f(x,y)-f(0,0)\right]}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，推知

$$f(x,y)-f(0,0)=\alpha\sqrt{x^2+y^2}=0\cdot x+0\cdot y+o(\rho),$$

其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，$\lim\limits_{\rho\to0}\dfrac{o(\rho)}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to0}\alpha=0$.对照全微分定义，相当于

$$x_0=0,y_0=0,\Delta x=x,\Delta y=y,A=0,B=0.$$

可见 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微，故选择(C).

(8)【答案】(B)

【详解】画出该二次积分所对应的积分区域 $D:\dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi,\sin x\le y\le1$

交换为先 x 后 y，则积分区域可化为：$0\le y\le1,\pi-\arcsin y\le x\le\pi$

所以 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dx\int_{\sin x}^{1}f(x,y)dy=\int_0^1dy\int_{\pi-arc\sin y}^{\pi}f(x,y)dx$， 所以选择(B).

(9) 【答案】A

【详解】

方法 1：根据线性相关的定义，若存在不全为零的数 k_1,k_2,k_3，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$ 成立，则称 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关.

因 $(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_3)+(\alpha_3-\alpha_1)=0$，故 $\alpha_1-\alpha_2$，$\alpha_2-\alpha_3$，$\alpha_3-\alpha_1$ 线性相关，所以选择(A).

方法 2：排除法

因为 $\left(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1\right)$

$$=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)C_2,\text{其中}C_2=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$

且 $$|C_2|=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}\overset{1行\times(-1)+2行}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&1&1\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}$$

$$=1\times1-1\times(-1)=2\neq0.$$

故 C_2 是可逆矩阵，由可逆矩阵可以表示为若干个初等矩阵的乘积，C_2 右乘 $\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$时，等于作若干次初等变换，初等变换不改变矩阵的秩，故有

$$r(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$$

所以，$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$线性无关，排除(B).

因为$\left(\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1\right)$

$$=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\begin{pmatrix}1&0&-2\\-2&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)C_3,\text{ 其中}C_3=\begin{pmatrix}1&0&-2\\-2&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix},$$

$$|C_3|=\begin{vmatrix}1&0&-2\\-2&1&0\\0&-2&1\end{vmatrix}\overset{1行\times2+2行}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}1&0&-2\\0&1&-4\\0&-2&1\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&-4\\-2&1\end{vmatrix}$$

$$=1\times1-(-2)\times(-4)=-7\neq0.$$

故 C_3 是可逆矩阵，由可逆矩阵可以表示为若干个初等矩阵的乘积，C_3 右乘 $\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$时，等于作若干次初等变换，初等变换不改变矩阵的秩，故有

$$r(\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$$

所以，$\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1$线性无关，排除(C).

因为$\left(\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1\right)$

$$=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)C_4,\text{ 其中}C_4=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&0\\0&2&1\end{pmatrix},$$

$$|C_4|=\begin{vmatrix}1&0&2\\2&1&0\\0&2&1\end{vmatrix}\underline{\underline{1行\times(-2)+2行}}\begin{vmatrix}1&0&2\\0&1&-4\\0&2&1\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&-4\\2&1\end{vmatrix}$$

$=1\times1-2\times(-4)=9\neq0.$

故 C_4 是可逆矩阵，由可逆矩阵可以表示为若干个初等矩阵的乘积，C_4 右乘 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$时，等于作若干次初等变换，初等变换不改变矩阵的秩，故有

$$r(\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$$

所以，$\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1$ 线性无关，排除(D).

综上知应选(A).

(10)【答案】B

【详解】

方法 1： $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&1\\1&\lambda-2&1\\1&1&\lambda-2\end{vmatrix}\underline{\underline{2、3列分别加到1列}}\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\\lambda&\lambda-2&1\\\lambda&1&\lambda-2\end{vmatrix}$

$$\underline{\underline{提出\lambda}}\ \lambda\begin{vmatrix}1&1&1\\1&\lambda-2&1\\1&1&\lambda-2\end{vmatrix}\underline{\underline{1行\times(-1)\ +2行}}\lambda\begin{vmatrix}1&1&1\\0&\lambda-3&0\\1&1&\lambda-2\end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{1行\times(-1)\ +3行}}\lambda\begin{vmatrix}1&1&1\\0&\lambda-3&0\\0&0&\lambda-3\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\lambda\begin{vmatrix}\lambda-3&0\\0&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-3)^2\lambda=0$$

则 A 的特征值为 3，3，0; B 是对角阵，对应元素即是的特征值，则 B 的特征值为 1，1，0. A,B 的特征值不相同，由相似矩阵的特征值相同知，A与B 不相似.

由 A,B 的特征值可知，A,B 的正惯性指数都是 2，又秩都等于 2 可知负惯性指数也相同,则由实对称矩阵合同的充要条件是有相同的正惯性指数和相同的负惯性指数，知 A 与 B 合同，应选(B).

方法 2: 因为迹(A)=2+2+2=6，迹(B)=1+1=2$\neq$6，所以 A 与 B 不相似(不满足相似的必要条件). 又$|\lambda E-A|=\lambda(\lambda-3)^2$，$|\lambda E-B|=\lambda(\lambda-1)^2$，$A$ 与 B 是同阶实对称矩阵，其秩相等，且有相同的正惯性指数，故 A 与 B 合同.

二、填空题

(11)【答案】$-\frac{1}{6}$

【详解】由洛必达法则，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x-\sin x}{x^3}\ \underline{\underline{\frac{0}{0}}}\ \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1+x^2\right)\cos x}{3x^2\left(1+x^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3\left(1+x^2\right)}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}-\cos x\right)=\frac{1}{3}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2/2}{x^2}-1\right)=-\frac{1}{6}$$

(12)【答案】$1+\sqrt{2}$

【详解】 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\left(1+\sin t\right)'}{\left(\cos t+\cos^2 t\right)'}=\frac{\cos t}{-\sin t-2\sin t\cos t}$

把 $t=\frac{\pi}{4}$ 代入，$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-\frac{1}{1+\sqrt{2}}$，所以法线斜率为$1+\sqrt{2}$.

(13)【答案】$\frac{(-1)^n 2^n n!}{3^{n+1}}$

【详解】$y=\frac{1}{2x+3}=\left(2x+3\right)^{-1}$，

$y'=(-1)\cdot\left(2x+3\right)^{-1-1}\cdot\left(2x\right)'=(-1)^1\cdot 1!\cdot 2^1\cdot\left(2x+3\right)^{-1-1}$，

$y''=(-1)\cdot(-2)\cdot 2^2\cdot\left(2x+3\right)^{-3}=(-1)^2 2!\cdot 2^2\cdot\left(2x+3\right)^{-2-1},\cdots$,

由数学归纳法可知 $y^{(n)}=(-1)^n 2^n n!\left(2x+3\right)^{-n-1}$,

把 $x=0$ 代入得 $y^{(n)}(0)=\frac{(-1)^n 2^n n!}{3^{n+1}}$

(14)【答案】$C_1e^x+C_2e^{3x}-2e^{2x}$

【详解】这是二阶常系数非齐次线性微分方程，且函数 $f\left(x\right)$ 是 $P_m\left(x\right)e^{\lambda x}$ 型(其中 $P_m\left(x\right)=2,\lambda=2$).

所给方程对应的齐次方程为 $y''-4y'+3y=0$，它的特征方程为 $r^2-4r+3=0$, 得特

征根 $r_1=1, r_2=3,$ 对应齐次方程的通解 $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}=C_1e^x+C_2e^{3x}$

由于这里 $\lambda=2$ 不是特征方程的根，所以应设该非齐次方程的一个特解为 $y^*=Ae^{2x}$,

所以 $\left(y^*\right)'=2Ae^{2x}$，$\left(y^*\right)''=4Ae^{2x}$，代入原方程：$4Ae^{2x}-4\cdot 2Ae^{2x}+3Ae^{2x}=2e^{2x}$，

则 $A=-2$，所以 $y^*=-2e^{2x}$. 故得原方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{3x}-2e^{2x}$.

(15)【答案】$2(-\frac{y}{x}f_1'+\frac{x}{y}f_2')$

【详解】$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot\frac{\partial\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial x}+f_2'\cdot\frac{\partial\left(\frac{x}{y}\right)}{\partial x}=f_1'\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)+f_2'\cdot\frac{1}{y}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\cdot\frac{\partial\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial y}+f_2'\cdot\frac{\partial\left(\frac{x}{y}\right)}{\partial y}=f_1'\cdot\frac{1}{x}+f_2'\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

所以 $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=x\cdot\left[f_1'\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)+f_2'\cdot\frac{1}{y}\right]-y\left[f_1'\cdot\frac{1}{x}+f_2'\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right]$

$$=\left(-\frac{y}{x}\right)\cdot f_1'+f_2'\cdot\frac{x}{y}-f_1'\cdot\frac{y}{x}+f_2'\cdot\frac{x}{y}=2(-\frac{y}{x}f_1'+\frac{x}{y}f_2')$$

(16) 【答案】1

【详解】

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

由阶梯矩阵的行秩等于列秩，其值等于阶梯形矩阵的非零行的行数，知 $r\left(A^3\right)=1.$

三、解答题.

(17)【分析】本题要求函数详解式，已知条件当中关于函数有关的式子只有

$$\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt=\int_0^x t\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}dt,$$

这是一个带有积分符号的式子，如果想求出函数的详解式，首先要去掉积分符号，即求导.

【详解】方程$\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt=\int_0^x t\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}dt$两边对$x$求导， 得

$$f^{-1}[f(x)]\bullet f'(x)=x\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}，即 xf'(x)=x\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}$$

当$x\neq 0$时，对上式两边同时除以x，得$f'(x)=\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}$，所以

$$f(x)=\int\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{d(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}=\ln\left|\sin x+\cos x\right|+C$$

在已知等式中令$x=0$，得$\int_0^{f(0)} f^{-1}(t)dt=0$. 因$f(x)$是$[0,\frac{\pi}{4}]$上的单调可导函数，$f^{-1}(t)$的值域为$[0,\frac{\pi}{4}]$，它是单调非负的，故必有$f(0)=0$，从而两边对上式取$x\to 0^+$极限

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=C=0$$

于是$f(x)=\ln\left|\sin x+\cos x\right|$，因为$x\in[0,\frac{\pi}{4}]$，故$f(x)=\ln(\sin x+\cos x),x\in[0,\frac{\pi}{4}]$.

(18)【详解】(I) $V\left(a\right)=\pi\int_0^{\infty} xa^{-\frac{x}{a}}dx=-\frac{a}{\ln a}\pi\int_0^{\infty} xd\left(a^{-\frac{x}{a}}\right)$

$$=-\frac{a}{\ln a}\pi[xa^{-\frac{x}{a}}]\Big|_0^{+\infty}+\frac{a}{\ln a}\pi\int_0^{\infty} a^{-\frac{x}{a}}dx=\pi\left(\frac{a}{\ln a}\right)^2$$

(Ⅱ) $V'\left(a\right)=[\pi\left(\frac{a}{\ln a}\right)^2]'=\pi\bullet\frac{2a\ln^2 a-a^2\bullet 2\ln a\bullet\frac{1}{a}}{\ln^4 a}=\pi\bullet\frac{2a\ln a-2a}{\ln^3 a}=2\pi\left(\frac{a\left(\ln a-1\right)}{\ln^3 a}\right)$

令$V'\left(a\right)=0$，得$\ln a=1$，从而$a=e$. 当$1<a<e$时，$V'\left(a\right)<0$，$V\left(a\right)$单调减少；当$a>e$时，$V'\left(a\right)>0$，$V\left(a\right)$单调增加. 所以$a=e$时V最小，最小体积为$V_{\min}\left(a\right)=\pi e^2$

(19)【详解】令$y'=p$，则$y''=p'$，原方程化为$p'(x+p^2)=p$.

两边同时除以$p'p$，得$\frac{x}{p}+p=\frac{1}{p'}$

将$p'=\frac{dp}{dx}$带入上式，得$\frac{dx}{dp}-\frac{x}{p}=p$

按一阶线性方程求导公式，得

$$x=e^{\int\frac{1}{p}dp}(\int pe^{\int-\frac{1}{p}dp}dp+C)=e^{\ln p+C}(\int pe^{\int-\frac{1}{p}dp}dp)=p[\int dp+C]=p(p+C)$$

带入初始条件得$C=0$，于是 $p^2=x$．由$y'(1)=1$知$p=\sqrt{x}$，即$\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{x}$

解得$y=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C_1$，带入初始条件得$C_1=\dfrac{1}{3}$，所以特解为$y=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{3}$.

(20)【详解】在$y-xe^{y-1}=1$中，令$x=0$，得$y=1$，即$y(0)=1$

$y-xe^{y-1}=1$两边对x求导，得$y'-(xe^{y-1})'=1'=0\Rightarrow y'-x'e^{y-1}-x(e^{y-1})'=0$

$\Rightarrow y'-e^{y-1}-xe^{y-1}y'=0$($y=y(x)$是$x$的函数，故$e^{y-1}$是关于$x$的复合函数，在求导时要用复合函数求导的法则)

$\Rightarrow\left(2-y\right)y'-e^{y-1}=0$ (*) (由$y-xe^{y-1}=1$知，$xe^{y-1}=y-1$，把它代入)

在(*)中令$x=0$，由$x=0,y=1$，得$y'\big|_{x=0}=1$

在(*)两边求导，得$\left(2-y\right)y''-y'^2-e^{y-1}y'=0$．令$x=0$，由$x=0,y=1,y'=1$得，$y''\big|_{x=0}=2$

因为$z=f(\ln y-\sin x)$，令$u=\ln y-\sin x$，根据复合函数的求导法则，

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\qquad(**)$$

在$u=\ln y-\sin x$中把x,y看成独立的变量，两边关于x求导，得$u'_x=-\cos x$

在$u=\ln y-\sin x$中把x,y看成独立的变量，两边关于y求导，得$u'_y=\dfrac{1}{y}$

把以上两式代入(**)中，$\dfrac{dz}{dx}=f'(u)\cdot(-\cos x)+f'(u)\cdot\dfrac{1}{y}\cdot y'$

即 $\dfrac{dz}{dx}=f'(\ln y-\sin x)(\dfrac{y'}{y}-\cos x)$ (***)

把$x=0,y=1,y'=1$代入(***)，得$\dfrac{dz}{dx}\bigg|_{x=0}=f'(\ln 1-\sin 0)(\dfrac{1}{1}-\cos 0)=0$

在(***)左右两端关于x求导，

$$\frac{d^2z}{dx^2}=[f'(\ln y-\sin x)]'(\frac{y'}{y}-\cos x)+f'(\ln y-\sin x)(\frac{y'}{y}-\cos x)'$$

根据复合函数的求导法则 $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{dz}{du}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{dz}{du}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dx}$，有

$$[f'(\ln y-\sin x)]'=f''(\ln y-\sin x)(-\cos x)+f''(\ln y-\sin x)\cdot\frac{y'}{y}=f''(\ln y-\sin x)(\frac{y'}{y}-\cos x)$$

$$(\frac{y'}{y}-\cos x)'=(\frac{y'}{y})'-(\cos x)'=-\frac{y'^2}{y^2}+\frac{y''}{y}+\sin x$$

故 $$\frac{d^2z}{dx^2}=f''(\ln y-\sin x)(\frac{y'}{y}-\cos x)^2+f'(\ln y-\sin x)\left[-\frac{y'^2}{y^2}+\frac{y''}{y}+\sin x\right]$$

把 $x=0,y=1,y'=1,y''=2$ 代入上式，得

$$\frac{d^2z}{dx^2}=f''(\ln 1-\sin 0)(\frac{1}{1}-\cos 0)^2+f'(\ln 1-\sin 0)\left[-\frac{1^2}{1^2}+\frac{2}{1}+\sin 0\right]=f'(0)(2-1)=1$$

(21)【详解】欲证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$，可构造函数 $\varphi(f(x),g(x))=0$，从而使用介值定理、微分中值定理等证明之.

令 $\varphi(x)=f(x)-g(x)$，由题设 $f(x),g(x)$ 存在相等的最大值，设 $x_1\in(a,b)$， $x_2\in(a,b)$ 使得 $f(x_1)=\max\limits_{[a.b]}f(x)=g(x_2)=\max\limits_{[a.b]}g(x)$. 于是 $\varphi(x_1)=f(x_1)-g(x_1)\geq 0$，$\varphi(x_2)=f(x_2)-g(x_2)\leq 0$

若 $\varphi(x_1)=0$，则取 $\eta=x_1\in(a,b)$ 有 $\varphi(\eta)=0$.

若 $\varphi(x_2)=0$，则取 $\eta=x_2\in(a,b)$ 有 $\varphi(\eta)=0$.

若 $\varphi(x_1)>0,\varphi(x_2)<0$，则由连续函数介值定理知，存在 $\eta\in(x_1,x_2)$ 使 $\varphi(\eta)=0$.

不论以上哪种情况，总存在 $\eta\in(a,b)$, 使 $\varphi(\eta)=0$.

再 $\varphi(a)=f(a)-g(a)=0,\varphi(b)=f(b)-g(b)=0$, 将 $\varphi(x)$ 在区间 $[a,\eta],[\eta,b]$ 分别应用罗尔定理，得存在 $\xi_1\in(a,\eta),\xi_2\in(\eta,b)$, 使得 $\varphi'(\xi_1)=0$, $\varphi'(\xi_2)=0$；再由罗尔定理知，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$, 使 $\varphi''(\xi)=0$.即有 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

(22)【详解】记 $D_1=\left\{(x,y)\middle||x|+|y|\le 1\right\}$， $D_2=\left\{(x,y)\middle|1<|x|+|y|\le 2\right\}$ 则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma+\iint_{D_2} f(x,y)d\sigma=\iint_{D_1} x^2 d\sigma+\iint_{D_2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}d\sigma$$

再记 $\sigma_1=\left\{(x,y)\middle|0\le x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0\right\}$， $\sigma_2=\left\{(x,y)\middle|1\le x+y\le 2, x\ge 0, y\ge 0\right\}$

由于 D_1 与 D_2 都与 x 轴对称，也都与 y 轴对称，函数 x^2 与 $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 都是 x 的偶函数，也都是 y 的偶函数，所以由区域对称性和被积函数的奇偶性有

$$\iint_{D_1} x^2 d\sigma=4\iint_{\sigma_1} x^2 d\sigma=4\int_0^1 dx\int_0^{1-x} x^2 dy=4\int_0^1 x^2(1-x)dx=4\int_0^1 (x^2-x^3)dx=\frac{1}{3}$$

$$\iint_{D_2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}d\sigma=4\iint_{\sigma_2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}d\sigma.$$

对第二个积分采用极坐标，令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, 0<\theta<\frac{\pi}{2}$.则 $x+y=1$ 化为 $r=\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}$， $x+y=2$ 化为 $r=\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}$，于是，

$$\iint_{D_2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}d\sigma=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}}\frac{1}{\sqrt{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}}rdr$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}}dr=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}\cos(\theta-\frac{\pi}{4})}d\theta$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sec(\theta-\frac{\pi}{4})d\theta=2\sqrt{2}\ln\left[\sec(\theta-\frac{\pi}{4})+\tan(\theta-\frac{\pi}{4})\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=2\sqrt{2}\ln\left(\ln\left|\frac{2}{\sqrt{2}}+1\right|-\ln\left|\frac{2}{\sqrt{2}}-1\right|\right)=2\sqrt{2}\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=2\sqrt{2}\ln(3+2\sqrt{2})$$

所以 $$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma+\iint_{D_2} f(x,y)d\sigma=\frac{1}{3}+2\sqrt{2}\ln(3+2\sqrt{2})$$

(23)【详解】

方法 1：因为方程组(1)、(2)有公共解，将方程组联立得

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \\ x_1+2x_2+x_3=a-1 \end{cases} \qquad (3)$$

对联立方程组的增广矩阵作初等行变换

$$(A|b)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{1行\times(-1)+2行} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{1行\times(-1)+3行} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 3 & a^2-1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{1行\times(-1)+4行} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 3 & a^2-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{4行\times(-1)+2行} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 3 & a^2-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{4行\times(-3)+3行} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & a^2-1 & 3-3a \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{换行} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & a^2-1 & 3-3a \end{pmatrix} \xrightarrow{3行\times(-a-1)+4行} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & (a-1)(a-2) \end{pmatrix}$$

由此知，要使此线性方程组有解，a 必须满足 $(a-1)(a-2)=0$，即 $a=1$ 或 $a=2$.

当 $a=1$ 时，$r(A)=2$，联立方程组(3)的同解方程组为 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_2=0 \end{cases}$，由 $r(A)=2$，方程组有 $n-r=3-2=1$ 个自由未知量. 选 x_1 为自由未知量，取 $x_1=1$，解得两方程组的公共解为 $k\left(1,0,-1\right)^T$，其中 k 是任意常数.

当 $a=2$ 时，联立方程组(3)的同解方程组为 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_2=0 \\ x_3=-1 \end{cases}$，解得两方程的公共解为 $\left(0,1,-1\right)^T$.

方法 2： 将方程组(1)的系数矩阵 A 作初等行变换

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{bmatrix}\xrightarrow{1行\times(-1)+2行}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&a-1\\1&4&a^2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{1行\times(-1)+3行}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&a-1\\0&3&a^2-1\end{bmatrix}\xrightarrow{2行\times(-3)+3行}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&a-1\\0&0&(a-1)(a-2)\end{bmatrix}$$

当$a=1$时，$r(A)=2$，方程组(1)的同解方程组为$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_2=0\end{cases}$，由$r(A)=2$，方程组有$n-r=3-2=1$个自由未知量.选$x_1$为自由未知量，取$x_1=1$，解得(1)的通解为$k\left(1,0,-1\right)^T$，其中$k$是任意常数. 将通解$k\left(1,0,-1\right)^T$代入方程(2)得$k+0+(-k)=0$，对任意的$k$成立，故当$a=1$时，$k\left(1,0,-1\right)^T$是(1)、(2)的公共解.

当$a=2$时，$r(A)=2$，方程组(1)的同解方程组为$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_2+x_3=0\end{cases}$，由$r(A)=2$，方程组有$n-r=3-2=1$个自由未知量.选$x_2$为自由未知量，取$x_2=1$，解得(1)的通解为$\mu\left(0,1,-1\right)^T$,其中$\mu$是任意常数. 将通解$\mu\left(0,1,-1\right)^T$代入方程(2)得$2\mu-\mu=1$，即$\mu=1$，故当$a=2$时，(1)和(2)的公共解为$\left(0,1,-1\right)^T$.

(24)【详解】(I) 由$A\alpha_1=\alpha_1$，可得 $A^k\alpha_1=A^{k-1}(A\alpha_1)=A^{k-1}\alpha_1=\cdots=\alpha_1$，$k$是正整数,故

$$B\alpha_1=(A^5-4A^3+E)\alpha_1=A^5\alpha_1-4A^3\alpha_1+E\alpha_1=\alpha_1-4\alpha_1+\alpha_1=-2\alpha_1$$

于是α_1是矩阵B的特征向量(对应的特征值为$\lambda_1'=-2$).

若 $Ax=\lambda x$，则 $(kA)x=(k\lambda)x, A^mx=\lambda^mx$ 因此对任意多项式 $f(x)$，$f(A)x=f(\lambda)x$，即 $f(\lambda)$ 是 $f(A)$ 的特征值.

故B的特征值可以由A的特征值以及B与A的关系得到，A的特征值$\lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=-2,$ 则B有特征值$\lambda_1'=f(\lambda_1)=-2,\lambda_2'=f(\lambda_2)=1,\lambda_3'=f(\lambda_3)=1,$ 所以B的全部特征值为－2，1，1.

由A是实对称矩阵及B与A的关系可以知道，B也是实对称矩阵，属于不同的特征值的特征向量正交. 由前面证明知α_1是矩阵B的属于特征值$\lambda_1'=-2$的特征向量，设B的属

于 1 的特征向量为$(x_1,x_2,x_3)^T$，α_1与$(x_1,x_2,x_3)^T$正交，所以有方程如下：

$$x_1-x_2+x_3=0$$

选x_2,x_3为自由未知量，取$x_2=0,x_3=1$和$x_2=1,x_3=0$，于是求得B的属于 1 的特征向量为

$$\alpha_2=k_2(-1,0,1)^T,\alpha_3=(1,1,0)^T$$

故B的所有的特征向量为：对应于$\lambda_1'=-2$的全体特征向量为$k_1\alpha_1$，其中k_1是非零任意常数，对应于$\lambda_2'=\lambda_3'=1$的全体特征向量为$k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$，其中k_2,k_3是不同时为零的任意常数.

(II) 方法 1：令矩阵$P=\left[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right]=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$，求逆矩阵$P^{-1}$.

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&1&1&0&0\\-1&0&1&0&1&0\\1&1&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{1行+2行}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&1&1&0&0\\0&-1&2&1&1&0\\1&1&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{1行+3行}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&1&1&0&0\\0&-1&2&1&1&0\\0&2&-1&-1&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{行\times2+3行}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&1&1&0&0\\0&-1&2&1&1&0\\0&0&3&1&2&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{3行\div3}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&1&1&0&0\\0&-1&2&1&1&0\\0&0&1&1/3&2/3&1/3\end{array}\right]\xrightarrow{3行\times(-2)+2行}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&1&1&0&0\\0&-1&0&1/3&-1/3&-2/3\\0&0&1&1/3&2/3&1/3\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{3行\times(-1)+1行}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&0&2/3&-2/3&-1/3\\0&-1&0&1/3&-1/3&-2/3\\0&0&1&1/3&2/3&1/3\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{2行\times(-1)+1行}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1/3&-1/3&1/3\\0&-1&0&1/3&-1/3&-2/3\\0&0&1&1/3&2/3&1/3\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{2行\times(-1)}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1/3&-1/3&1/3\\0&1&0&-1/3&1/3&2/3\\0&0&1&1/3&2/3&1/3\end{array}\right]$$

则 $$P^{-1}=\begin{bmatrix}1/3&-1/3&1/3\\-1/3&1/3&2/3\\1/3&2/3&1/3\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&2\\1&2&1\end{bmatrix}$$

由 $P^{-1}BP = diag(-2,1,1)$，所以

$$B = P\cdot diag(-2,1,1)\cdot P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

方法 2： 由 (I) 知 α_1 与 α_2,α_3 分别正交，但是 α_2 和 α_3 不正交，现将 α_2,α_3 正交化：

取 $\beta_2 = \alpha_2, \beta_3 = \alpha_3 + k_{12}\beta_2 = (1,1,0) + (-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})$.

其中，$k_{12} = -\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2 = -\frac{1\times(-1)}{(-1)\times(-1)+1\times 1}(-1,0,1)^T = (-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$

再对 $\alpha_1,\ \beta_2,\beta_3$ 单位化：

$$\xi_1 = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1), \xi_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1) =, \xi_3 = \frac{\beta_3}{\|\beta_3\|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})$$

其中，$\|\alpha_1\| = \sqrt{1^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{3}, \|\beta_2\| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}, \|\beta_3\| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2+1^2+(\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

合并成正交矩阵，

记 $$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

由 $Q^{-1}BQ = diag(-2,1,1)$，有 $B = Q\cdot diag(-2,1,1)\cdot Q^{-1}$. 又由正交矩阵的性质：

$Q^{-1} = Q^T$，得

$$B = Q \cdot diag(-2,1,1) \cdot Q^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$