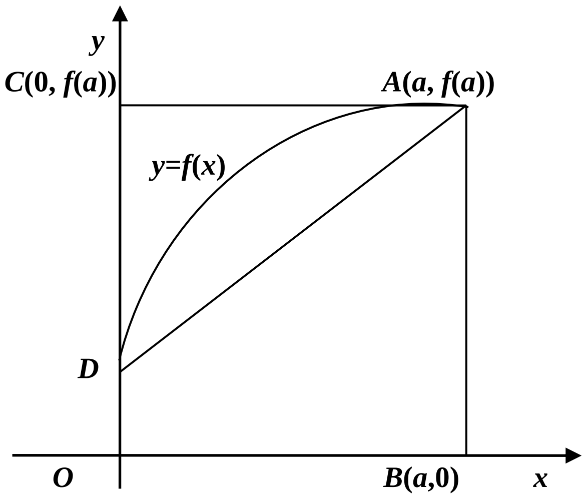
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

(1) 设 $f(x)=x^2(x-1)(x-2)$，求 $f'(x)$ 的零点个数(　)

$(A)\,0$　　　$(B)\,1$　　　$(C)\,2$　　　$(D)\,3$

(2) 如图，曲线段方程为 $y=f(x)$，函数在区间 $[0,a]$ 上有连续导数，则定积分 $\int_0^a xf'(x)dx$ 等于(　　)



(A) 曲边梯形 $ABOD$ 面积.

(B) 梯形 $ABOD$ 面积.

(C) 曲边三角形 ACD 面积.

(D) 三角形 ACD 面积.

(3) 在下列微分方程中，以 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$ (C_1,C_2,C_3 为任意常数)为通解的是(　　)

(A) $y'''+y''-4y'-4y=0$.　　　(B) $y'''+y''+4y'+4y=0$.

(C) $y'''-y''-4y'+4y=0$.　　　(D) $y'''-y''+4y'-4y=0$.

(4) 判断函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{|x-1|}\sin x\,(x>0)$ 间断点的情况(　)

(A) 有 1 个可去间断点，1 个跳跃间断点

(B) 有 1 个跳跃间断点，1 个无穷间断点

(C) 有两个无穷间断点

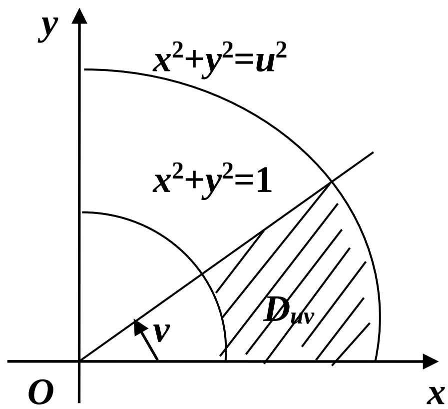
(D) 有两个跳跃间断点

(5) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，$\{x_n\}$ 为数列，下列命题正确的是(　　)

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.　　(B) 若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.

(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛.　　(D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛.

(6) 设函数 f 连续. 若 $F(u,v)=\iint\limits_{D_{uv}}\dfrac{f\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$，其中区域 D_{uv} 为图中阴影部分，则 $\dfrac{\partial F}{\partial u}=$(　　)



(A) $vf\left(u^2\right)$

(B) $\dfrac{v}{u}f\left(u^2\right)$

(C) $vf(u)$

(D) $\dfrac{v}{u}f(u)$

(7) 设 A 为 n 阶非零矩阵，E 为 n 阶单位矩阵. 若 $A^3=O$，则(　　)

(A) $E-A$ 不可逆，$E+A$ 不可逆.　　(B) $E-A$ 不可逆，$E+A$ 可逆.

(C) $E-A$ 可逆，$E+A$ 可逆.　　(D) $E-A$ 可逆，$E+A$ 不可逆.

(8) 设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$，则在实数域上与 A 合同的矩阵为(　　)

$(A)\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}$.　　$(B)\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$.

$(C)\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$.　　$(D)\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$.

二、填空题：9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $f(x)$ 连续，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(\sin x)}{(e^{x^2}-1)f(x)}=1$，则 $f(0)=$ ________

(10) 微分方程 $(y+x^2e^{-x})dx-xdy=0$ 的通解是 $y=$ ________

(11) 曲线$\sin(xy)+\ln(y-x)=x$在点$(0,1)$处的切线方程为__________.

(12) 求函数 $f(x)=(x-5)x^{\frac{2}{3}}$ 的拐点______________.

(13) 已知$z=\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}$，则$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=$_________.

(14) 矩阵A的特征值是$\lambda,2,3$，其中λ未知，且$|2A|=-48$，则$\lambda=$________.

三、解答题：15－23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 9 分)

求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[\sin x-\sin(\sin x)\right]\sin x}{x^4}$.

(16) (本题满分 10 分)

设函数$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=x(t)\\ y=\int_0^{t^2}\ln(1+u)du\end{cases}$确定，其中$x(t)$是初值问题

$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}-2te^{-x}=0\\ x|_{t=0}=0\end{cases}$的解. 求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

(17)(本题满分 9 分)

计算 $\displaystyle\int_0^1\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(18)(本题满分 11 分)

计算$\displaystyle\iint_D\max\{xy,1\}dxdy$, 其中$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 2,0\le y\le 2\}$

(19)(本题满分 11 分)

设 $f(x)$ 是区间$[0,+\infty)$上具有连续导数的单调增加函数，且 $f(0)=1$. 对于任意的$t\in[0,+\infty)$，直线$x=0,x=t$，曲线$y=f(x)$以及x轴所围成曲边梯形绕x轴旋转一周生成一旋转体. 若该旋转体的侧面面积在数值上等于其体积的 2 倍，求函数$f(x)$的表达式.

(20)(本题满分 11 分)

(I) 证明积分中值定理：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则至少存在一点 $\eta\in[a,b]$，使得 $\int_a^b f(x)dx = f(\eta)(b-a)$；

(II) 若函数 $\varphi(x)$ 具有二阶导数，且满足，$\varphi(2)>\varphi(1),\varphi(2)>\int_2^3\varphi(x)dx$，则至少存在一点 $\xi\in(1,3)$，使得 $\varphi''(\xi)<0$.

(21)(本题满分 11 分)

求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在约束条件 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y+z=4$ 下的最大和最小值.

(22)(本题满分 12 分)

设 n 元线性方程组 $Ax=b$，其中

$$A=\begin{pmatrix} 2a & 1 & & \\ a^2 & 2a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & a^2 & 2a \end{pmatrix}_{n\times n}，\quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}，\quad b=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(I) 证明行列式 $|A|=(n+1)a^n$

(II) 当 a 为何值时，该方程组有唯一解，并求 x_1

(III) 当 a 为何值时，该方程组有无穷多解，并求通解

(23)(本题满分 10 分)

设 A 为 3 阶矩阵，α_1,α_2 为 A 的分别属于特征值 $-1,1$ 的特征向量，向量 α_3 满足 $A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$，

(I) 证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关；

(II) 令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，求 $P^{-1}AP$

2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

一、选择题

(1)【答案】D

【详解】因为 $f(0)=f(1)=f(2)=0$，由罗尔定理知至少有 $\xi_1\in(0,1)$，$\xi_2\in(1,2)$ 使 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$，所以 $f'(x)$ 至少有两个零点．由于 $f'(x)$ 是三次多项式，三次方程 $f'(x)=0$ 的实根不是三个就是一个，故 D 正确.

(2)【答案】C

【详解】$\int_0^a xf'(x)dx=\int_0^a xdf(x)=xf(x)\Big|_0^a-\int_0^a f(x)dx=af(a)-\int_0^a f(x)dx$

其中 $af(a)$ 是矩形 $ABOC$ 面积，$\int_0^a f(x)dx$ 为曲边梯形 $ABOD$ 的面积，所以 $\int_0^a xf'(x)dx$ 为曲边三角形的面积.

(3)【答案】D

【详解】由微分方程的通解中含有 e^x、$\cos 2x$、$\sin 2x$ 知齐次线性方程所对应的特征方程有根 $r=1,r=\pm 2i$，所以特征方程为 $(r-1)(r-2i)(r+2i)=0$，即 $r^3-r^2+4r-4=0$．故以已知函数为通解的微分方程是 $y'''-y''+4y'-4=0$

(4) 【答案】A

【详解】$x=0,x=1$ 时 $f(x)$ 无定义，故 $x=0,x=1$ 是函数的间断点

因为 $$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\csc x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{|x-1|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-\csc x\cot x}$$

$$=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x\cos x}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\cos x}=0$$

同理 $$\lim_{x\to 0^-}f(x)=0$$

又 $$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{x-1}\cdot\lim_{x\to 1^+}\sin x=\left(\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x}\right)\sin 1=\sin 1$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln x}{1-x}\cdot\lim_{x\to 1^+}\sin x=-\sin 1$$

所以 $x=0$ 是可去间断点，$x=1$ 是跳跃间断点.

(5)【答案】B

【详解】因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，且 $\{x_n\}$ 单调．所以 $\{f(x_n)\}$ 单调且有界．故

$\{f(x_n)\}$ 一定存在极限.

(6)【答案】A

【详解】用极坐标得 $F(u,v)=\iint_D \frac{f\left(u^2+v^2\right)}{\sqrt{u^2+v^2}}dudv=\int_0^v dv\int_1^u \frac{f(r^2)}{r}rdr=v\int_1^u f(r^2)dr$

所以 $\frac{\partial F}{\partial u}=vf\left(u^2\right)$

(7) 【答案】C

【详解】$(E-A)(E+A+A^2)=E-A^3=E$，$(E+A)(E-A+A^2)=E+A^3=E$

故 $E-A,E+A$ 均可逆.

(8) 【答案】D

【详解】记 $D=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$，

则 $|\lambda E-D|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2\\ 2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-4$，又 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\ -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-4$

所以 A 和 D 有相同的特征多项式，所以 A 和 D 有相同的特征值.
又 A 和 D 为同阶实对称矩阵，所以 A 和 D 相似. 由于实对称矩阵相似必合同，故 D 正确.

二、填空题

(9)【答案】2

【详解】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos[xf(x)]}{(e^{x^2}-1)f(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2[xf(x)/2]}{x^2 f(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2[xf(x)/2]\cdot f(x)}{[xf(x)/2]^2\cdot 4}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}f(x)=\frac{1}{2}f(0)=1$$

所以 $f(0)=2$

(10)【答案】$x(-e^{-x}+C)$

【详解】微分方程 $\left(y+x^2e^{-x}\right)dx-xdy=0$ 可变形为 $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=xe^{-x}$

所以 $y=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left[\int xe^{-x}e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right]=x\left(\int xe^{-x}\cdot\frac{1}{x}dx+C\right)=x(-e^{-x}+C)$

(11)【答案】 $y=x+1$

【详解】设 $F(x,y)=\sin(xy)+\ln(y-x)-x$，则 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F'_x}{F'_y}=-\dfrac{y\cos(xy)-\dfrac{1}{y-x}-1}{x\cos(xy)+\dfrac{1}{y-x}}$，

将 $y(0)=1$ 代入得 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=1$，所以切线方程为 $y-1=x-0$，即 $y=x+1$

(12)【答案】 $(-1,-6)$

【详解】 $y=x^{5/3}-5x^{2/3}\Rightarrow y'=\dfrac{5}{3}x^{2/3}-\dfrac{10}{3}x^{-1/3}=\dfrac{10(x+2)}{3x^{1/3}}$

$$\Rightarrow y''=\frac{10}{9}x^{-1/3}+\frac{10}{9}x^{-4/3}=\frac{10(x+1)}{9x^{4/3}}$$

$x=-1$ 时， $y''=0$； $x=0$ 时， y'' 不存在

在 $x=-1$ 左右近旁 y'' 异号，在 $x=0$ 左右近旁 $y''>0$，且 $y(-1)=-6$

故曲线的拐点为 $(-1,-6)$

(13)【答案】 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\ln 2-1)$

【详解】设 $u=\dfrac{y}{x},v=\dfrac{x}{y}$，则 $z=u^v$

所以 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=vu^{v-1}(-\frac{y}{x^2})+u^v\ln u\cdot\frac{1}{y}$$

$$=u^v\left(-\frac{vy}{ux^2}+\frac{\ln u}{y}\right)=\left(\frac{y}{x}\right)^{x/y}\cdot\frac{1}{y}\left(-1+\ln\frac{y}{x}\right)$$

所以 $$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\ln 2-1)$$

(14)【答案】-1

【详解】 $\because |A|=2\times3\times\lambda=6\lambda \qquad |2A|=2^3|A|$

$$\therefore\ 2^3\times6\lambda=-48 \qquad \Rightarrow\lambda=-1$$

三、解答题

(15)【详解】

方法一： $\lim\limits_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos(\sin x)\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sin x)}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin^2 x}{3x^2}=\frac{1}{6}$$

方法二： $\because\ \sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\qquad \sin(\sin x)=\sin x-\frac{1}{6}\sin^3 x+o(\sin^3 x)$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin^4 x}{6x^4}+\frac{o(\sin^4 x)}{x^4}\right]=\frac{1}{6}$$

(16)【详解】

方法一: 由 $\frac{dx}{dt}-2te^{-x}=0$ 得 $e^x dx=2tdt$，积分并由条件 $x\big|_{t=0}$ 得 $e^x=1+t^2$，即 $x=\ln(1+t^2)$

所以 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\ln(1+t^2)\cdot 2t}{\frac{2t}{1+t^2}}=(1+t^2)\ln(1+t^2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d}{dt}[(1+t^2)\ln(1+t^2)]}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t\ln(1+t^2)+2t}{\frac{2t}{1+t^2}}$$

$$=(1+t^2)[\ln(1+t^2)+1]$$

方法二: 由 $\frac{dx}{dt}-2te^{-x}=0$ 得 $e^x dx=2tdt$，积分并由条件 $x\big|_{t=0}$ 得 $e^x=1+t^2$，即 $x=\ln(1+t^2)$

所以 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\ln(1+t^2)\cdot 2t}{\frac{2t}{1+t^2}}=(1+t^2)\ln(1+t^2)=e^x x$$

所以 $$\frac{d^2y}{dx^2}=e^x(x+1)$$

(17)【详解】

方法一： 由于 $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=+\infty$，故 $\int_0^1\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 是反常积分.

令 $\arcsin x=t$，有 $x=\sin t$，$t\in[0,\pi/2)$

$$\int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t\sin^2 t}{\cos t}\cos tdt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin^2 tdt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{t}{2} - \frac{t\cos 2t}{2})dt$$

$$= \frac{t^2}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} td\sin 2t = \frac{\pi^2}{16} - \frac{t\sin 2t}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2tdt$$

$$= \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{8}\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}$$

方法二： $\int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 d(\arcsin x)^2$

$$= \frac{1}{2}x^2(\arcsin x)^2\Big|_0^1 - \int_0^1 x(\arcsin x)^2 dx = \frac{\pi^2}{8} - \int_0^1 x(\arcsin x)^2 dx$$

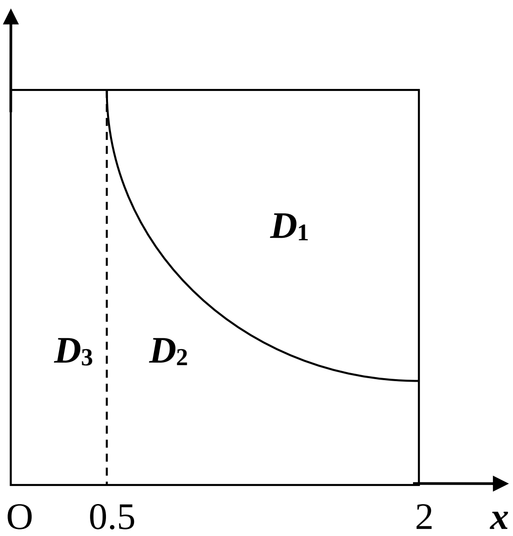
令 $\arcsin x = t$，有 $x = \sin t$，$t \in [0, \pi/2)$

$$\int_0^1 x(\arcsin x)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin 2tdt = -\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 d\cos 2t$$

$$= -\frac{1}{4}(t^2\cos 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos 2tdt = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}$$

故，原式 $= \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}$

(18)【详解】 曲线 $xy = 1$ 将区域分成两个区域 D_1 和 $D_2 + D_3$，为了便于计算继续对区域分割，最后为



$$\iint_D \max(xy,1)dxdy$$

$$= \iint_{D_1} xydxdy + \iint_{D_2} dxdy + \iint_{D_3} dxdy$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} dx\int_0^2 1dy + \int_{\frac{1}{2}}^2 dx\int_0^{\frac{1}{x}} 1dy + \int_{\frac{1}{2}}^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^2 xydy$$

$$= 1 + 2\ln 2 + \frac{15}{4} - \ln 2 = \frac{19}{4} + \ln 2$$

(19)【详解】旋转体的体积 $V = \pi\int_0^t f^2(x)dx$，侧面积 $S = 2\pi\int_0^t f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$，由题

设条件知

$$\int_0^t f^2(x)dx=\int_0^t f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$$

上式两端对t求导得 $f^2(t)=f(t)\sqrt{1+f'^2(t)}$， 即 $y'=\sqrt{y^2-1}$

由分离变量法解得 $\ln(y+\sqrt{y^2-1})=t+C_1$， 即 $y+\sqrt{y^2-1}=Ce^t$

将$y(0)=1$代入知$C=1$，故$y+\sqrt{y^2-1}=e^t$， $y=\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})$

于是所求函数为 $y=f(x)=\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})$

(20)【详解】(I) 设M 与m是连续函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上的最大值与最小值，即

$$m\le f(x)\le M \qquad x\in[a,b]$$

由定积分性质，有 $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$，即 $m\le\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}\le M$

由连续函数介值定理，至少存在一点$\eta\in[a,b]$，使得 $f(\eta)=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$

即 $$\int_a^b f(x)dx=f(\eta)(b-a)$$

(II) 由(I)的结论可知至少存在一点$\eta\in[2,3]$，使 $\int_2^3\varphi(x)dx=\varphi(\eta)(3-2)=\varphi(\eta)$

又由 $\varphi(2)>\int_2^3\varphi(x)dx=\varphi(\eta)$，知 $2<\eta\le 3$

对$\varphi(x)$ 在$[1,2][2,\eta]$上分别应用拉格朗日中值定理，并注意到$\varphi(1)<\varphi(2)$，$\varphi(\eta)<\varphi(2)$得

$$\varphi'(\xi_1)=\frac{\varphi(2)-\varphi(1)}{2-1}>0 \qquad 1<\xi_1<2$$

$$\varphi'(\xi_2)=\frac{\varphi(\eta)-\varphi(2)}{\eta-2}<0 \qquad 2<\xi_1<\eta\le 3$$

在$[\xi_1,\xi_2]$上对导函数$\varphi'(x)$应用拉格朗日中值定理，有

$$\varphi''(\xi)=\frac{\varphi'(\xi_2)-\varphi'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}<0 \qquad \xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(1,3)$$

(21)【详解】

方法一：作拉格朗日函数$F(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-4)$

令 $$\begin{cases} F_x' = 2x + 2\lambda x + \mu = 0 \\ F_y' = 2y + 2\lambda y + \mu = 0 \\ F_z' = 2z - \lambda + \mu = 0 \\ F_\lambda' = x^2 + y^2 - z = 0 \\ F_\mu' = x + y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

解方程组得 $(x_1, y_1, z_1) = (1,1,2), (x_2, y_2, z_2) = (-2,-2,8)$

故所求的最大值为 72，最小值为 6.

方法二：问题可转化为求 $u = x^2 + y^2 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4$ 在 $x + y + x^2 + y^2 = 4$ 条件下的最值

设 $F(x, y, \lambda) = u = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + x^2 + y^2 + \lambda(x + y + x^2 + y^2 - 4)$

令 $$\begin{cases} F_x' = 4x^3 + 4xy^2 + 2x + \lambda(1 + 2x) = 0 \\ F_y' = 4y^3 + 4x^2y + 2y + \lambda(1 + 2y) = 0 \\ F_\lambda' = x + y + x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

解得 $(x_1, y_1) = (1,1), (x_2, y_2) = (-2,-2)$，代入 $z = x^2 + y^2$，得 $z_1 = 2, z_2 = 8$

故所求的最大值为 72，最小值为 6.

(22)【详解】(I)**证法一**：

$$|A| = \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 - \frac{1}{2}ar_1} \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ 0 & \frac{3a}{2} & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix} = \cdots$$

$$\xlongequal{r_n - \frac{n-1}{n}ar_{n-1}} \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ 0 & \frac{3a}{2} & 1 & & & \\ & 0 & \frac{4a}{3} & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 0 & \frac{(n+1)a}{n} \end{vmatrix} = 2a \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{4a}{3} \cdots \cdot \frac{(n+1)a}{n} = (n+1)a^n$$

证法二：记 $D_n = |A|$，下面用数学归纳法证明 $D_n = (n+1)a^n$.

当 $n = 1$ 时，$D_1 = 2a$，结论成立.

当 $n=2$ 时，$D_2=\begin{vmatrix}2a & 1\\ a^2 & 2a\end{vmatrix}=3a^2$，结论成立.

假设结论对小于 n 的情况成立．将 D_n 按第 1 行展开得

$$D_n=2aD_{n-1}-\begin{vmatrix}a^2 & 1 & & & & \\ 0 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1\\ & & & & a^2 & 2a\end{vmatrix}$$

$$=2aD_{n-1}-a^2D_{n-2}=2ana^{n-1}-a^2(n-1)a^{n-2}=(n+1)a^n$$

故 $|A|=(n+1)a^n$

证法三：记 $D_n=|A|$，将其按第一列展开得 $D_n=2aD_{n-1}-a^2D_{n-2}$，

所以 $D_n-aD_{n-1}=aD_{n-1}-a^2D_{n-2}=a(D_{n-1}-aD_{n-2})$

$$=a^2(D_{n-2}-aD_{n-3})=\cdots=a^{n-2}(D_2-aD_1)=a^n$$

即 $D_n=a^n+aD_{n-1}=a^n+a(a^{n-1}+aD_{n-2})=2a^n++a^2D_{n-2}$

$$=\cdots=(n-2)a^n+a^{n-2}D_2=(n-1)a^n+a^{n-1}D_1$$

$$=(n-1)a^n+a^{n-1}\cdot 2a=(n+1)a^n$$

(II)因为方程组有唯一解，所以由 $Ax=B$ 知 $|A|\neq 0$，又 $|A|=(n+1)a^n$，故 $a\neq 0$.

由克莱姆法则，将 D_n 的第 1 列换成 b，得行列式为

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & & & & \\ 0 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1\\ & & & & a^2 & 2a\end{vmatrix}_{n\times n}=\begin{vmatrix}2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1\\ & & & & a^2 & 2a\end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}=D_{n-1}=na^{n-1}$$

所以 $x_1=\dfrac{D_{n-1}}{D_n}=\dfrac{n}{(n+1)a}$

(III)方程组有无穷多解，由$|A|=0$，有$a=0$，则方程组为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

此时方程组系数矩阵的秩和增广矩阵的秩均为$n-1$，所以方程组有无穷多解，其通解为$k\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}^T+\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}^T, k$为任意常数.

(23)【详解】(I)

证法一：假设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关．因为$\alpha_1,\alpha_2$分别属于不同特征值的特征向量，故$\alpha_1,\alpha_2$线性无关，则$\alpha_3$可由$\alpha_1,\alpha_2$线性表出，不妨设$\alpha_3=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2$，其中$l_1,l_2$不全为零(若$l_1,l_2$同时为0，则$\alpha_3$为0，由$A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$可知$\alpha_2=0$，而特征向量都是非0向量，矛盾)

$\because A\alpha_1=-\alpha_1, A\alpha_2=\alpha_2$

$\therefore A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3=\alpha_2+l_1\alpha_1+l_2\alpha_2$，又$A\alpha_3=A(l_1\alpha_1+l_2\alpha_2)=-l_1\alpha_1+l_2\alpha_2$

$\therefore -l_1\alpha_1+l_2\alpha_2=\alpha_2+l_1\alpha_1+l_2\alpha_2$，整理得：$2l_1\alpha_1+\alpha_2=0$

则α_1,α_2线性相关，矛盾．所以，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

证法二：设存在数k_1,k_2,k_3，使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$ (1)

用A左乘(1)的两边并由$A\alpha_1=-\alpha_1, A\alpha_2=\alpha_2$得

$$-k_1\alpha_1+(k_2+k_3)\alpha_2+k_3\alpha_3=0 \qquad (2)$$

(1)—(2)得 $2k_1\alpha_1-k_3\alpha_2=0$ (3)

因为α_1,α_2是A的属于不同特征值的特征向量，所以α_1,α_2线性无关，从而$k_1=k_3=0$，代入(1)得$k_2\alpha_2=0$，又由于$\alpha_2\neq 0$，所以$k_2=0$，故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

(II) 记$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则$P$可逆，

$$AP=A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=(-\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3)$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

所以 $$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$