

2012 年全国硕士研究生入学统一考试

数学二试题解析

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 曲线 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 渐近线的条数为 ()

- (A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3

【答案】: C

【解析】: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = \infty$, 所以 $x = 1$ 为垂直的

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = 1$, 所以 $y = 1$ 为水平的, 没有斜渐近线 故两条选 C

(2) 设函数 $f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$, 其中 n 为正整数, 则 $f'(0) =$

- (A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$
(B) $(-1)^n(n-1)!$
(C) $(-1)^{n-1}n!$
(D) $(-1)^nn!$

【答案】: C

【解析】: $f'(x) = e^x(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n) + (e^x - 1)(2e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n) + \cdots (e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (ne^{nx} - n)$

所以 $f'(0) = (-1)^{n-1}n!$

(3) 设 $a_n > 0 (n=1, 2, \cdots)$, $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 则数列 (s_n) 有界是数列 (a_n) 收敛的

- (A) 充分必要条件. (B) 充分非必要条件.
(C) 必要非充分条件. (D) 即非充分地非必要条件.

【答案】: (B)

(4) 设 $I_k = \int_e^k e^{x^2} \sin x dx (k=1,2,3)$, 则有 D

(A) $I_1 < I_2 < I_3$. (B) $I_2 < I_2 < I_3$.

(C) $I_1 < I_3 < I_1$, (D) $I_1 < I_2 < I_3$.

【答案】: (D)

【解析】: $I_k = \int_e^k e^{x^2} \sin x dx$ 看为以 k 为自变量的函数, 则可知 $I_k' = e^{k^2} \sin k \geq 0, k \in (0, \pi)$, 即可知 $I_k = \int_e^k e^{x^2} \sin x dx$ 关于 k 在 $(0, \pi)$ 上为单调增函数, 又由于 $1, 2, 3 \in (0, \pi)$, 则 $I_1 < I_2 < I_3$, 故选 D

(5) 设函数 $f(x, y)$ 可微, 且对任意 x, y 都有 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} > 0, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} < 0, f(x_1, y_1) < f$

(x_2, y_2) 成立的一个充分条件是

(A) $x_1 > x_2, y_1 < y_2$. (B) $x_1 > x_2, y_1 > y_1$.

(C) $x_1 < x_2, y_1 < y_2$. (D) $x_1 < x_2, y_1 > y_2$.

【答案】: (D)

【解析】: $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} > 0, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} < 0$ 表示函数 $f(x, y)$ 关于变量 x 是单调递增的, 关于变

量 y 是单调递减的。因此, 当 $x_1 < x_2, y_1 > y_2$ 必有 $f(x_1, y_1) < f(x_2, y_2)$, 故选 D

(6) 设区域 D 由曲线 $y = \sin x, x = \pm \frac{\pi}{2}, y = 1$, 围成, 则 $\iint_D (x^5 y - 1) dx dy = ()$

(A) π (B) 2 (C) -2 (D) $-\pi$

【答案】: (D)

【解析】: 由二重积分的区域对称性,

$$\iint_D (x^5 y - 1) dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\sin x}^1 (x^5 y - 1) dy = -\pi$$

(7) 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ c_3 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{pmatrix}$ 其中 c_1, c_2, c_3, c_4 为任意常数, 则下列向量组线性相关

的是 ()

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ (C) $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ (D) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ **【答案】:** (C)

【解析】: 由于 $|(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4)| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ c_1 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} = c_1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, 可知 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关。故选 (C)

(8) 设 A 为 3 阶矩阵, P 为 3 阶可逆矩阵, 且 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$, $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$,

$Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$ 则 $Q^{-1}AQ =$ ()

(A) $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

【答案】: (B)

【解析】: $Q = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$,

$$\text{故 } Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}AP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

故选 (B)。

二、填空题: 9-14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上。

(9) 设 $y = y(x)$ 是由方程 $x^2 - y + 1 = e^y$ 所确定的隐函数, 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=0} =$ _____。

【答案】: 1

【解析】：将 $x=0$ 代入原方程可得 $y=0$

方程 $x^2 - y + 1 = e^y$ 两端对 x 求导，有 $2x - \frac{dy}{dx} = e^y \frac{dy}{dx}$ ， $x=0$ 、 $y=0$ 代入可得，所以

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 0$$

再次求导得 $2 - \frac{d^2y}{dx^2} = e^y \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + e^y \frac{d^2y}{dx^2}$ ，再将 $x=0$ 、 $y=0$ 、 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 0$ 代入可得

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=0} = 1.$$

(10) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{1+n^2} + \frac{1}{2^2+n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n^2} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】： $\frac{\pi}{4}$

【解析】：原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{i}{n} \right)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$

(11) 设 $z = f\left(\ln x + \frac{1}{y}\right)$ ，其中函数 $f(u)$ 可微，则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】： 0.

【解析】：因为 $\frac{\partial z}{\partial x} = f' \cdot \frac{1}{x}$ ， $\frac{\partial z}{\partial y} = f' \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right)$ ，所以 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$

(12) 微分方程 $ydx + (x - 3y^2)dy = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=1}=1$ 的解为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】： $x = y^2$

【解析】： $ydx + (x - 3y^2)dy = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dy} = 3y - \frac{1}{y}x \Rightarrow \frac{dx}{dy} + \frac{1}{y}x = 3y$ 为一阶线性微分方程，

所以

$$x = e^{-\int \frac{1}{y} dy} \left[\int 3y \cdot e^{\int \frac{1}{y} dy} dy + C \right] = \frac{1}{y} \left[\int 3y^2 dy + C \right] = (y^3 + C) \frac{1}{y}$$

又因为 $y=1$ 时 $x=1$ ，解得 $C=0$ ，故 $x = y^2$ 。

(13) 曲线 $y = x^2 + x (x < 0)$ 上曲率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的点的坐标是_____。

【答案】: $(-1, 0)$

【解析】: 将 $y' = 2x + 1, y'' = 2$ 代入曲率计算公式, 有

$$K = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \frac{2}{[1 + (2x + 1)^2]^{3/2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

整理有 $(2x + 1)^2 = 1$, 解得 $x = 0$ 或 -1 , 又 $x < 0$, 所以 $x = -1$, 这时 $y = 0$,

故该点坐标为 $(-1, 0)$

(14) 设 A 为 3 阶矩阵, $|A| = 3, A^*$ 为 A 的伴随矩阵, 若交换 A 的第一行与第二行得到矩阵 B , 则

$|BA^*| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】: -27

【解析】: 由于 $B = E_{12}A$, 故 $BA^* = E_{12}A \cdot A^* = |A| E_{12} = 3E_{12}$,

所以, $|BA^*| = |3E_{12}| = 3^3 |E_{12}| = 27 * (-1) = -27$ 。

三、解答题: 15—23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = \frac{1+x}{\sin x} - \frac{1}{x}$, 记 $a = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

(1) 求 a 的值

(2) 若当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) - a$ 是 x^k 的同阶无穷小, 求 k

【解析】: (1) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2} + 1 = 1$, 即 $a = 1$

(2), 当 $x \rightarrow 0$ 时, 由 $f(x) - a = f(x) - 1 = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x}$

又因为, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x - \sin x$ 与 $\frac{1}{6}x^3$ 等价, 故 $f(x) - a \sim \frac{1}{6}x$, 即 $k = 1$

(16) (本题满分 10 分)

求 $f(x, y) = xe - \frac{x^2 + y^2}{2}$ 的极值。

【解析】: $f(x, y) = xe - \frac{x^2 + y^2}{2},$

先求函数的驻点. $f'_x(x, y) = e - x = 0, f'_y(x, y) = -y = 0$, 解得函数为驻点为 $(e, 0)$.

又 $A = f''_{xx}(e, 0) = -1, B = f''_{xy}(e, 0) = 0, C = f''_{yy}(e, 0) = -1,$

所以 $B^2 - AC < 0, A < 0$, 故 $f(x, y)$ 在点 $(e, 0)$ 处取得极大值 $f(e, 0) = \frac{1}{2}e^2$.

(17) (本题满分 10 分)

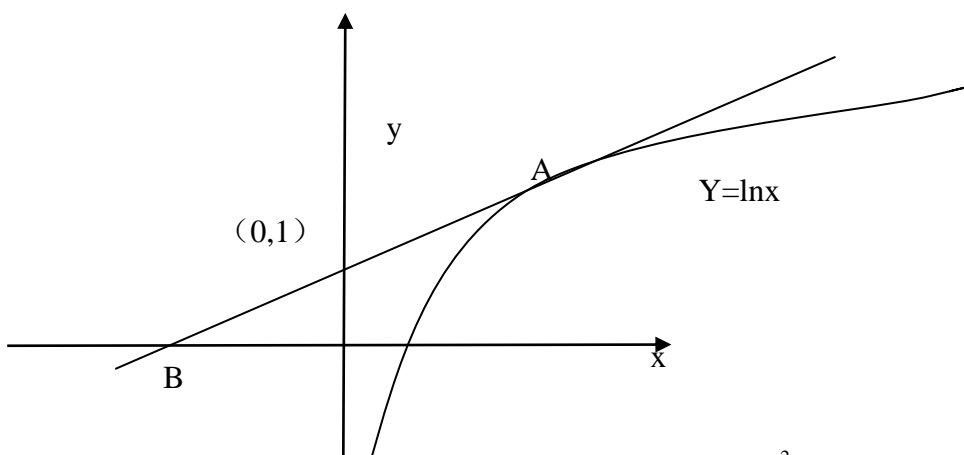
过点 $(0, 1)$ 点作曲线 $L: y = \ln x$ 的切线, 切点为 A , 又 L 与 x 轴交于 B 点, 区域 D 由 L 与直线 AB 及 x 轴围成, 求区域 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

【解析】:

设切点坐标为 $A(x_0, \ln x_0)$, 斜率为 $\frac{1}{x_0}$, 所以设切线方程为 $y - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0)$, 又因为该切线过

$B(0, 1)$, 所以 $x_0 = e^2$, 故切线方程为: $y = \frac{1}{e^2}x + 1$

切线与 x 轴交点为 $B(-e^2, 0)$



$$(1) A = \int_0^2 [e^y - e^2(y-1)] dy = \left[e^y - e^2\left(\frac{1}{2}y^2 - y\right) \right]_0^2 = e^2 - 1$$

(2)

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot [e^2 - (-e^2)] - \pi \int_1^{e^2} \ln^2 x dx \\ &= \frac{8}{3}\pi e^2 - \pi \left[(x \ln^2 x)_1^{e^2} - \int_1^{e^2} 2 \ln x dx \right] \\ &= \frac{8}{3}\pi e^2 - \pi \left[4e^2 - (2x \ln x)_1^{e^2} + \int_1^{e^2} 2 dx \right] \\ &= \frac{8}{3}\pi e^2 - 2\pi(e^2 - 1) = \frac{2}{3}\pi(e^2 + 3) \end{aligned}$$

(18) (本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint_D xy d\sigma$, 其中区域 D 为曲线 $r=1+\cos\theta$ ($0\leq\theta\leq\pi$) 与极轴围成。

【解析】:
$$\begin{aligned}\iint_D xy d\sigma &= \int_0^\pi d\theta \int_0^{1+\cos\theta} r \cos\theta \cdot r \sin\theta \cdot r dr \\&= \frac{1}{4} \int_0^\pi \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot (1+\cos\theta)^4 d\theta \\&= 16 \int_0^\pi \sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2} (2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1) \cos^8\frac{\theta}{2} d\frac{\theta}{2} \\&= 32 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos^{11} t dt - 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos^9 t dt \\&= \frac{8}{3} - \frac{8}{5} \\&= \frac{16}{15}\end{aligned}$$

(19) (本题满分 11 分) 已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 及 $f'(x) + f(x) = 2e^x$

1) 求表达式 $f(x)$

2) 求曲线的拐点 $y = f(x^2) \int_0^x f(-t^2) dt$

【解析】:

1) 特征方程为 $r^2 + r - 2 = 0$, 特征根为 $r_1 = 1, r_2 = -2$, 齐次微分方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 的通解

为 $f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$. 再由 $f'(x) + f(x) = 2e^x$ 得 $2C_1 e^x - C_2 e^{-2x} = 2e^x$, 可知 $C_1 = 1, C_2 = 0$ 。

故 $f(x) = e^x$

2) 曲线方程为 $y = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$, 则 $y' = 1 + 2xe^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$, $y'' = 2x + 2(1 + 2x^2)e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$

令 $y'' = 0$ 得 $x = 0$ 。为了说明 $x = 0$ 是 $y'' = 0$ 唯一的解, 我们来讨论 y'' 在 $x > 0$ 和 $x < 0$ 时的符号。

当 $x > 0$ 时, $2x > 0, 2(1 + 2x^2)e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt > 0$, 可知 $y'' > 0$; 当 $x < 0$ 时,

$2x < 0, 2(1 + 2x^2)e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt < 0$, 可知 $y'' < 0$ 。可知 $x = 0$ 是 $y'' = 0$ 唯一的解。

同时, 由上述讨论可知曲线 $y = f(x^2) \int_0^x f(-t^2) dt$ 在 $x = 0$ 左右两边的凹凸性相反, 可知 $(0, 0)$ 点是曲线

$y = f(x^2) \int_0^x f(-t^2) dt$ 唯一的拐点。

(20) (本题满分 10 分)

证明: $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2}, -1 < x < 1$

【解析】: 令 $f(x) = x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x - 1 - \frac{x^2}{2}$, 可得

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln \frac{1+x}{1-x} + x \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} - \sin x - x \\ &= \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{2x}{1-x^2} - \sin x - x \\ &= \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1+x^2}{1-x^2} \cdot x - \sin x \end{aligned}$$

当 $0 < x < 1$ 时, 有 $\ln \frac{1+x}{1-x} \geq 0$, $\frac{1+x^2}{1-x^2} > 1$, 所以 $\frac{1+x^2}{1-x^2} \cdot x - \sin x \geq 0$,

故 $f'(x) \geq 0$, 而 $f(0) = 0$, 即得 $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x - 1 - \frac{x^2}{2} \geq 0$

所以 $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq \frac{x^2}{2} + 1$ 。

当 $-1 < x < 0$, 有 $\ln \frac{1+x}{1-x} \leq 0$, $\frac{1+x^2}{1-x^2} > 1$, 所以 $\frac{1+x^2}{1-x^2} \cdot x - \sin x \leq 0$,

故 $f'(x) \geq 0$, 即得 $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x - 1 - \frac{x^2}{2} \geq 0$

可知, $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2}, -1 < x < 1$

(21) (本题满分 11 分)

(1) 证明方程 $x^n + x^{n-1} + \dots + x = 1$ ($n > 1$ 的整数), 在区间 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 内有且仅有一个实根;

(2) 记 (1) 中的实根为 x_n , 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求此极限。

【解析】: (1) 由题意得: 令 $f(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x - 1$, 则 $f(1) > 0$, 再由

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}(1 - (\frac{1}{2})^n)}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = -(\frac{1}{2})^n < 0, \text{由零点定理得在 } \left(\frac{1}{2}, 1\right) \text{ 肯定有解 } x_0, \text{假设在此区间还有另外一根 } x_1,$$

所以 $x_0^n + x_0^{n-1} + \cdots + x_0 - 1 = x_n^n + x_n^{n-1} + \cdots + x_n - 1$, 由归纳法得到 $x_1 = x_0$, 即唯一性得证

(2) 假设根为 x_n , 即 $f(x_n) = x_n^n + x_n^{n-1} + \cdots + x_n - 1 = 0$, 所以 $f(x_n) = \frac{x_n(1-x_n^n)}{1-x_n} - 1 = 0, (\frac{1}{2} < x_n < 1)$,

由于 $x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1}^n + \cdots + x_{n+1} - 1 = 0$, 可知 $x_{n+1}^n + x_{n+1}^{n-1} + \cdots + x_{n+1} - 1 < 0$, 由于 $x_n^n + x_n^{n-1} + \cdots + x_n - 1 = 0$, 可知 $x_{n+1} < x_n$. 又由于 $\frac{1}{2} < x_n < 1$, 也即 $\{x_n\}$ 是单调的。则由单调有界收敛定理可知 $\{x_n\}$ 收敛, 假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 可知 $a < x_2 < x_1 = 1$ 。

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n(1-x_n^n)}{1-x_n} - 1 = \frac{a}{1-a} - 1 = 0$, 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}$

(22) (本题满分 11 分)

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(I) 求 $|A|$

(II) 已知线性方程组 $Ax = b$ 有无穷多解, 求 a , 并求 $Ax = b$ 的通解。

$$\text{【解析】: (I) } \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + a \times (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = 1 - a^4$$

$$\begin{aligned} \text{(II) } & \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 & 1 & -a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a^3 & 1 & -a - a^2 \end{pmatrix} \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - a^4 & -a - a^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

可知当要使得原线性方程组有无穷多解, 则有 $1 - a^4 = 0$ 及 $-a - a^2 = 0$, 可知 $a = -1$ 。

此时, 原线性方程组增广矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 进一步化为行最简形得 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

可知导出组的基础解系为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 非齐次方程的特解为 $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 故其通解为 $k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

线性方程组 $Ax=b$ 存在 2 个不同的解, 有 $|A|=0$.

即: $|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0$, 得 $\lambda=1$ 或 -1 .

当 $\lambda=1$ 时, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 显然不符, 故 $\lambda=-1$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$$

(23) (本题满分 11 分) 三阶矩阵 A , A^T 为矩阵 A 的转置, 已知 $r(A^T A) = 2$, 且二次型 $f = x^T A^T A x$.

1) 求 a

2) 求二次型对应的二次型矩阵, 并将二次型化为标准型, 写出正交变换过程。

【解析】: 1) 由 $r(A^T A) = r(A) = 2$ 可得,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \end{vmatrix} = a+1=0 \Rightarrow a=-1$$

$$\begin{aligned} 2) \quad f &= x^T A^T A x = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3 \end{aligned}$$

$$\text{则矩阵 } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2)(\lambda - 6) = 0$$

解得 B 矩阵的特征值为: $\lambda_1 = 0; \lambda_2 = 2; \lambda_3 = 6$

对于 $\lambda_1 = 0$, 解 $(\lambda_1 E - B)X = 0$ 得对应的特征向量为: $\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

对于 $\lambda_2 = 2$, 解 $(\lambda_2 E - B)X = 0$ 得对应的特征向量为: $\eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

对于 $\lambda_3 = 6$, 解 $(\lambda_3 E - B)X = 0$ 得对应的特征向量为: $\eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

将 η_1, η_2, η_3 单位化可得:

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$Q = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$