2013 年全国硕士研究生入学统一考试

数学二试题

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）设 $\cos x-1=x\sin\alpha(x)$，其中 $\left|\alpha(x)\right|<\dfrac{\pi}{2}$，则当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)$ 是（　　）

（A）比 x 高阶的无穷小　　（B）比 x 低阶的无穷小

（C）与 x 同阶但不等价的无穷小　　（D）与 x 等价的无穷小

（2）设函数 $y=f(x)$ 由方程 $\cos(xy)-\ln y+x=1$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f(\dfrac{2}{n})-1\right]=$（　　）

（A）2　　（B）1　　（C）-1　　（D）-2

（3）设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\le x<\pi \\ 2, & \pi\le x\le 2\pi\end{cases}$，$F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则（　　）

（A）$x=\pi$　是函数 $F(x)$ 的跳跃间断点　　（B）$x=\pi$　是函数 $F(x)$ 的可去间断点

（C）$F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续但不可导　　（D）$F(x)$ 在 $x=\pi$ 处可导

（4）设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1<x<e \\ \dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}, & x\ge e\end{cases}$，若反常积分 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，则（　　）

（A）$\alpha<-2$　　（B）$\alpha>2$　　（C）$-2<\alpha<0$　　（D）$0<\alpha<2$

（5）设 $z=\dfrac{y}{x}f(xy)$，其中函数 f 可微，则 $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$（　　）

（A）$2yf'(xy)$　　（B）$-2yf'(xy)$　　（C）$\dfrac{2}{x}f(xy)$　　（D）$-\dfrac{2}{x}f(xy)$

（6）设 D_k 是圆域 $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\right\}$ 在第 k 象限的部分，记 $I_k=\iint\limits_{D_k}(y-x)dxdy(k=1,2,3,4)$，则（　　）

（A）$I_1>0$　　（B）$I_2>0$　　（C）$I_3>0$　　（D）$I_4>0$

（7）设矩阵 A,B,C 均为 n 阶矩阵，若 $AB=C$,则B可逆，则

（A）矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价

（B）矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价

（C）矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价

（D）矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的列向量组等价

（8）矩阵$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$相似的充分必要条件为

（A）$\mathrm{a}=0,\mathrm{b}=2$

（B）$a=0,b$为任意常数

（C）$a=2,b=0$

（D）$a=2,b$为任意常数

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}(2-\frac{\ln(1+x)}{x})^{\frac{1}{x}}=$________________.

(10) 设函数 $f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-e^t}\,dt$，则 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $y=0$ 处的导数 $\frac{dx}{dy}\Big|_{y=0}=$________________.

(11) 设封闭曲线 L 的极坐标方程为 $r=\cos 3\theta\,(-\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{6})$，则 L 所围成的平面图形的面积为________________.

(12) 曲线$\begin{cases} x=\arctan t \\ y=\ln\sqrt{1+t^2} \end{cases}$上对应于$t=1$的点处的法线方程为________________.

(13) 已知$y_1=e^{3x}-xe^{2x}$，$y_2=e^{x}-xe^{2x}$，$y_3=-xe^{2x}$是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解，该方程满足条件$y\big|_{x=0}=0\ \ y'\big|_{x=0}=1$的解为$y=$________________.

（14）设 $\mathrm{A}=(\mathrm{a}_{\mathrm{ij}})$ 是三阶非零矩阵，$|\mathrm{A}|$ 为 A 的行列式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，若 $\mathrm{a}_{\mathrm{ij}}+\mathrm{A}_{\mathrm{ij}}=0(\mathrm{i},\mathrm{j}=1,2,3),$则$|A|=$____

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

当$x\to 0$时，$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$与$ax^n$为等价无穷小，求$n$与$a$的值。

（16）（本题满分 10 分）

设 D 是由曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$，直线 $x=a(a>0)$ 及 x 轴所围成的平面图形，V_x,V_y 分别是 D 绕 x 轴，y 轴旋转一周所得旋转体的体积，若 $V_y=10V_x$，求 a 的值。

（17）（本题满分 10 分）

设平面内区域 D 由直线 $x=3y,y=3x$ 及 $x+y=8$ 围成.计算 $\iint\limits_D x^2dxdy$ 。

（18）（本题满分 10 分）

设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(1)=1$.证明：

（I）存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$；（II）存在 $\eta\in(0,1)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$。

（19）（本题满分 11 分）

求曲线 $x^3-xy+y^3=1(x\ge 0,y\ge 0)$ 上的点到坐标原点的最长距离与最短距离。

（20）（本题满分 11 分）

设函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$，

（I）求 $f(x)$ 的最小值

（II）设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_n}<1$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限.

（21）（本题满分 11 分）

设曲线 L 的方程为 $y=\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}\ln x \quad (1\le x\le e)$，

（1）求 L 的弧长；

（2）设 D 是由曲线 L，直线 $x=1,x=e$ 及 x 轴所围平面图形，求 D 的形心的横坐标。

（22）（本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$，当 a,b 为何值时，存在矩阵 C 使得 $AC-CA=B$，并求所有矩阵 C 。

（23）（本题满分 11 分）

设二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2\left(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3\right)^2+\left(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3\right)^2$，记 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$。

（I）证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha^T\alpha+\beta^T\beta$；

（II）若 α,β 正交且均为单位向量，证明二次型 f 在正交变化下的标准形为二次型 $2y_1^2+y_2^2$ 。

2013 年全国硕士研究生入学统一考试

数学二试题答案

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）设 $\cos x-1=x\sin\alpha(x)$，其中 $\left|\alpha(x)\right|<\dfrac{\pi}{2}$，则当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)$ 是（　　）

（A）比 x 高阶的无穷小　　（B）比 x 低阶的无穷小

（C）与 x 同阶但不等价的无穷小　　（D）与 x 等价的无穷小

【答案】（C）

【解析】因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\alpha(x)=0$，

因此当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)\to 0$，所以 $\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{x}=-\dfrac{1}{2}$，

所以 $\alpha(x)$ 是与 x 同阶但不等价的无穷小。

（2）设函数 $y=f(x)$ 由方程 $\cos(xy)+\ln y-x=1$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f(\dfrac{2}{n})-1\right]=$（　　）

（A）2　　（B）1　　（C）-1　　（D）-2

【答案】（A）

【解析】由于 $f(0)=1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f(\dfrac{2}{n})-1\right]=\lim\limits_{n\to\infty}2\left[\dfrac{f(\frac{2}{n})-f(0)}{\frac{2}{n}}\right]=2f'(0)$，

对此隐函数两边求导得 $-(y+xy')\sin(xy)+\dfrac{y'}{y}-1=0$，所以 $f'(0)=1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f(\dfrac{2}{n})-1\right]=2$。

（3）设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\le x<\pi\\ 2, & \pi\le x\le 2\pi\end{cases}$，$F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则（　　）

（A）$x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的跳跃间断点　　（B）$x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的可去间断点

（C）$F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续但不可导　　（D）$F(x)$ 在 $x=\pi$ 处可导

【答案】（C）

【解析】$F(x)=\int_0^x f(t)dt=\begin{cases}\int_0^x\sin tdt=1-\cos x, & 0\le x<\pi\\ \int_0^\pi\sin tdt+\int_\pi^x 2dt=2(x-\pi+1), & \pi\le x\le 2\pi\end{cases}$，

由于 $\lim\limits_{x\to\pi-}F(x)=\lim\limits_{x\to\pi+}F(x)=2$，所以 $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续；

$\lim\limits_{x\to\pi-}\dfrac{F(x)-F(\pi)}{x-\pi}=\lim\limits_{x\to\pi+}\dfrac{-1-\cos x}{x-\pi}=0$，$\lim\limits_{x\to\pi+}\dfrac{F(x)-F(\pi)}{x-\pi}=\lim\limits_{x\to\pi+}\dfrac{2(x-\pi)}{x-\pi}=2$，

所以$F(x)$在$x=\pi$处不可导。

（4）设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1<x<e\\ \dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}, & x\ge e\end{cases}$，若反常积分$\int_1^{+\infty}f(x)dx$收敛，则（　　）

（A）$\alpha<-2$　　（B）$\alpha>2$　　（C）$-2<\alpha<0$　　（D）$0<\alpha<2$

【答案】（D）

【解析】 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1<x<e\\ \dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}, & x\ge e\end{cases}$

因为$\int_1^{+\infty}f(x)dx=\int_1^{e}f(x)dx+\int_e^{+\infty}f(x)dx$，

当$1<x<e$时，$\int_1^{e}f(x)dx=\int_1^{e}\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}dx=\lim\limits_{\varepsilon\to1+}\int_\varepsilon^{e}\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}dx=\lim\limits_{\varepsilon\to1+}[\dfrac{1}{2-\alpha}\dfrac{1}{(\varepsilon-1)^{\alpha-2}}]-\dfrac{1}{2-\alpha}\dfrac{1}{(e-1)^{\alpha-2}}$，

要使$\lim\limits_{\varepsilon\to1+}[\dfrac{1}{2-\alpha}\dfrac{1}{(\varepsilon-1)^{\alpha-2}}]$存在，需满足$\alpha-2<0$；

当$x\ge e$时，$\int_e^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}dx=\int_e^{+\infty}\dfrac{d\ln x}{\ln^{\alpha+1}x}=\lim\limits_{\lambda\to\infty}(-\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{1}{\ln^{\alpha}\lambda})+\dfrac{1}{\alpha}$，

要使$\lim\limits_{\lambda\to\infty}(-\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{1}{\ln^{\alpha}\lambda})$存在，需满足$\alpha>0$；所以$0<\alpha<2$。

（5）设$z=\dfrac{y}{x}f(xy)$，其中函数f可微，则$\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$（　　）

（A）$2yf'(xy)$　　（B）$-2yf'(xy)$　　（C）$\dfrac{2}{x}f(xy)$　　（D）$-\dfrac{2}{x}f(xy)$

【答案】（A）

【解析】已知$z=\dfrac{y}{x}f(xy)$，所以$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2}f(xy)+\dfrac{y^2}{x}f'(xy)$，

所以$\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=[-\dfrac{1}{x}f(xy)+yf'(xy)]+(\dfrac{1}{x}f(xy)+yf'(xy))=2yf'(xy)$。

（6）设D_k是圆域$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le1\}$在第$k$象限的部分，记$I_k=\iint\limits_{D_k}(y-x)dxdy(k=1,2,3,4)$，则（　　）

（A）$I_1>0$　（B）$I_2>0$　（C）$I_3>0$　（D）$I_4>0$

【答案】（B）

【解析】令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则有

$$I_k=\iint_{D_k}(y-x)dxdy=\int_0^1 rdr\int_\alpha^\beta(r\sin\theta-r\cos\theta)d\theta=-\frac{1}{3}(\cos\theta+\sin\theta)\Big|_\alpha^\beta$$

故当 $k=2$ 时，$\alpha=\dfrac{\pi}{2},\beta=\pi$，此时有 $I_2=\dfrac{2}{3}\Big|>0.$ 故正确答案选 B。

（7）设矩阵 A,B,C 均为 n 阶矩阵，若 $AB=C$，且 C 可逆，则（　）
（A）矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价
（B）矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价
（C）矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价
（D）矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的列向量组等价
【答案】（B）

【解析】由 $C=AB$ 可知 C 的列向量组可以由 A 的列向量组线性表示，又 B 可逆，故有 $A=CB^{-1}$，从而 A 的列向量组也可以由 C 的列向量组线性表示，故根据向量组等价的定义可知正确选项为（B）。

（8）矩阵 $\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&\mathrm{b}&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为

（A）$a=0,b=2$

（B）$a=0,b$为任意常数

（C）$a=2,b=0$

（D）$a=2,b$为任意常数

【答案】(B)

【解析】由于 $\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$ 为实对称矩阵，故一定可以相似对角化，从而 $\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&\mathrm{b}&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为 $\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$ 的特征值为 $2,b,0$。

又$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -a & -1\\ -a & \lambda-b & -a\\ -1 & -a & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda[(\lambda-b)(\lambda-2)-2a^2]$，从而$a=0,b$为任意常数。

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}(2-\dfrac{\ln(1+x)}{x})^{\frac{1}{x}}=$________________.

【答案】$e^{\frac{1}{2}}$

【解析】原式=$e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+1-\frac{\ln(1+x)}{x})}{x}}$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+1-\frac{\ln(1+x)}{x})}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{\ln(1+x)}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-\frac{1}{2}x+o(x))}{x}=\frac{1}{2}$$

因此答案为$e^{\frac{1}{2}}$.

(10) 设函数 $f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-e^t}\,dt$，则 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $y=0$ 处的导数 $\dfrac{dx}{dy}\Big|_{y=0}=$________________.

【答案】$\dfrac{1}{\sqrt{1-e^{-1}}}$

【解析】$\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{1-e^x},\therefore\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\sqrt{1-e^x}},\dfrac{dx}{dy}\Big|_{y=0}=\dfrac{1}{\sqrt{1-e^x}}\Big|_{x=-1}=\dfrac{1}{\sqrt{1-e^{-1}}}$

(11) 设封闭曲线 L 的极坐标方程为 $r=\cos 3\theta\,(-\dfrac{\pi}{6}\le\theta\le\dfrac{\pi}{6})$，则 L 所围成的平面图形的面积为________________.

【答案】$\dfrac{\pi}{12}$

【解析】所围图形的面积是$S=\dfrac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\dfrac{1+\cos 6\theta}{2}d\theta=\dfrac{\pi}{12}$

(12) 曲线$\begin{cases}x=\arctan t\\ y=\ln\sqrt{1+t^2}\end{cases}$上对应于$t=1$的点处的法线方程为________________.

【答案】 $y+x-\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}=0$

【解析】 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{\frac{1}{1+t^2}}=t$， $\frac{dy}{dx}|_{t=1}=1,$

当 $t=1$ 时， $x=\frac{\pi}{4},y=\ln\sqrt{2}$，故法线方程为 $y+x-\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}=0$.

(13) 已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x}$， $y_2=e^x-xe^{2x}$， $y_3=-xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解，该方程满足条件 $y\big|_{x=0}=0\ \ y'\big|_{x=0}=1$ 的解为 $y=$________________.

【答案】 $y=e^{3x}-e^x-xe^{2x}$

【解析】由题意知： e^{3x},e^x 是对应齐次方程的解， $-xe^{2x}$ 是非齐次方程的解，

故非齐次的通解为 $y=C_1e^{3x}+C_2e^x-xe^{2x}$，将初始条件代入，得到 $C_1=1,C_2=-1,$

故满足条件的解为 $y=e^{3x}-e^x-xe^{2x}$。

（14）设 $\mathrm{A}=(\mathrm{a_{ij}})$ 是三阶非零矩阵， $|\mathrm{A}|$ 为 A 的行列式， $\mathrm{A_{ij}}$ 为 $\mathrm{a_{ij}}$ 的代数余子式，若 $\mathrm{a_{ij}}+\mathrm{A_{ij}}=0(\mathrm{i},\mathrm{j}=1,2,3)$,则 $|A|=$ _____

【答案】 -1

【解析】

由 $a_{ij}+A_{ij}=0$ 可知， $A^T=-A^*$

$$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j}$$

$$=-\sum_{j=1}^{3}a_{ij}^2=-\sum_{i=1}^{3}a_{ij}^2<0$$

从而有 $|A|=\left|A^T\right|=\left|-A^*\right|=-|A|^2$,故 $|A|$=-1.

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

当 $x\to 0$ 时， $1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小，求 n 与 a 的值。

【解析】因为当 $x\to 0$ 时， $1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{ax^n}=1$

又因为：

$$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$$
$$=1-\cos x+\cos x-\cos x\cdot\cos 2x+\cos x\cdot\cos 2x-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$$
$$=1-\cos x+\cos x(1-\cos 2x)+\cos x\cdot\cos 2x(1-\cos 3x)$$

即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{ax^n}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x+\cos x(1-\cos 2x)+\cos x\cdot\cos 2x(1-\cos 3x)}{ax^n}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{ax^n}+\frac{\cos x(1-\cos 2x)}{ax^n}+\frac{\cos x\cdot\cos 2x(1-\cos 3x)}{ax^n}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{ax^n}+\frac{\frac{1}{2}(2x)^2+o(x^2)}{ax^n}+\frac{\frac{1}{2}(3x)^2+o(x^2)}{ax^n}\right)$$

所以 $n=2$ 且 $\dfrac{1}{2a}+\dfrac{4}{2a}+\dfrac{9}{2a}=1\Rightarrow a=7$

（16）（本题满分 10 分）

设 D 是由曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$，直线 $x=a(a>0)$ 及 x 轴所围成的平面图形，V_x,V_y 分别是 D 绕 x 轴，y 轴旋转一周所得旋转体的体积，若 $V_y=10V_x$，求 a 的值。

【解析】由题意可得：

$$V_x=\pi\int_0^a(x^{\frac{1}{3}})^2dx=\frac{3}{5}\pi a^{\frac{5}{3}}$$

$$V_y=2\pi\int_0^a x\cdot x^{\frac{1}{3}}dx=\frac{6\pi}{7}a^{\frac{7}{3}}$$

因为：$V_y=10V_x$ 所以 $\dfrac{6\pi}{7}a^{\frac{7}{3}}=10\cdot\dfrac{3}{5}\pi a^{\frac{5}{3}}\Rightarrow a=7\sqrt{7}$

（17）（本题满分 10 分）

设平面内区域 D 由直线 $x=3y,y=3x$ 及 $x+y=8$ 围成.计算 $\iint\limits_D x^2dxdy$ 。

【解析】 $\iint\limits_D x^2dxdy=\iint\limits_{D_1}x^2dxdy+\iint\limits_{D_2}x^2dxdy$

$$=\int_0^2 x^2dx\int_{\frac{x}{3}}^{3x}dy+\int_2^6 x^2dx\int_{\frac{x}{3}}^{8-x}dy$$

$$=\frac{416}{3}$$

（18）（本题满分 10 分）

设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(1)=1$.证明：

（I）存在$\xi \in (0,1)$，使得$f'(\xi)=1$；（II）存在$\eta \in (0,1)$，使得$f''(\eta)+f'(\eta)=1$。

【解析】（1）令$F(x)=f(x)-x, F(0)=f(0)=0, F(1)=f(1)-1=0,$

则$\exists \xi \in (0,1)$使得$F'(\xi)=0,$即$f'(\xi)=1$

（2）令$G(x)=e^x(f'(x)-1),$则$G(\xi)=0,$

又由于$f(x)$为奇函数，故$f'(x)$为偶函数，可知$G(-\xi)=0$,

则$\exists \eta \in (-\xi,\xi) \subset (-1,1)$使$G'(\xi)=0,$

即$e^\eta[f'(\eta)-1]+e^\eta f''(\eta)=0$，即$f''(\eta)+f'(\eta)=1$

（19）（本题满分 11 分）

求曲线$x^3-xy+y^3=1(x\ge 0, y\ge 0)$上的点到坐标原点的最长距离与最短距离。

【解析】本题本质上是在条件$x^3-xy+y^3=1(x\ge 0, y\ge 0)$下求函数$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$的最值。

故只需求出$\sqrt{x^2+y^2}$在条件$x^3-xy+y^3=1$下的条件极值点，再将其与曲线端点处（$(0,1),(1,0)$）的函数值比较，即可得出最大值与最小值。

由于函数$\sqrt{x^2+y^2}$与x^2+y^2的增减性一致，故可以转化为求x^2+y^2的条件极值点：

构造拉格朗日函数$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(x^3-xy+y^3-1)$，求其驻点得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}=2x+3\lambda x^2-\lambda y=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=2y+3\lambda y^2-\lambda x=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=x^3-xy+y^3-1=0 \end{cases}$$

为了求解该方程组，将前两个方程变形为$\begin{cases} 2x=\lambda y-3\lambda x^2 \\ 2y=\lambda x-3\lambda y^2 \end{cases}$

进一步有$\begin{cases} 2xy=\lambda y^2-3\lambda x^2 y \\ 2xy=\lambda x^2-3\lambda xy^2 \end{cases}$，故$\lambda x^2-3\lambda xy^2=\lambda y^2-3\lambda x^2 y$

即$\lambda(x-y)(x+y+3xy)=0$。则有$\lambda=0$或$x-y=0$或$x+y+3xy=0$。

当$\lambda=0$时，有$x=y=0$，不可能满足方程$x^3-xy+y^3-1=0$；

当 $x+y+3xy=0$，由于 $x\geq 0, y\geq 0$，也只能有 $x=y=0$，不可能满足第三个方程；

故必有 $x-y=0$，将其代入 $x^3-xy+y^3-1=0$ 得 $2x^3-x^2-1=0$，解得 $x=1, y=1$。

可知 $(1,1)$ 点是唯一的条件极值点。

由于 $f(1,1)=\sqrt{2}$， $f(0,1)=f(1,0)=\sqrt{2}$，故曲线 $x^3-xy+y^3=1(x\geq 0, y\geq 0)$ 上的点到坐标原点的最长距离为 $\sqrt{2}$ 与最短距离为 1。

（20）（本题满分 11 分）

设函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$，

（I）求 $f(x)$ 的最小值

（II）设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_n}<1$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求此极限.

【解析】（I） $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$，则当 $x\in(0,1)$ 时， $f'(x)<0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时， $f'(x)>0$。可知 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递减，在 $[1,+\infty)$ 上单调递增。故 $f(x)$ 的最小值为 $f(1)=1$。

（2）、由于 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_n}\geq 1$，则 $\dfrac{1}{x_{n+1}}<\dfrac{1}{x_n}$，即 $x_{n+1}>x_n$，故 x_n 单调递增。

又由于 $\ln x_n<\ln x_n+\dfrac{1}{x_n+1}<1$，则 $x_n<e$，故 x_n 有上界，则由单调有界收敛定理可知， $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在。

令 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，则 $\lim\left(n x_n+\dfrac{1}{x_n}\right)=\ln a+\dfrac{1}{a}$，由于 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_n+1}<1$，则

$\ln a+\dfrac{1}{a}\leq 1$，故 $a=1$。

（21）（本题满分 11 分）

设曲线 L 的方程为 $y=\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}\ln x \quad (1\leq x\leq e)$，

（1）求 L 的弧长；

（2）设 D 是由曲线 L，直线 $x=1, x=e$ 及 x 轴所围平面图形，求 D 的形心的横坐标。

【解析】（1）由弧长的计算公式得 L 的弧长为

$$\int_1^e\sqrt{1+\left[\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x\right)'\right]^2}dx=\int_1^e\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)^2}dx$$

$$=\int_1^e\sqrt{1+\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4x}-\frac{1}{2}}dx$$

$$=\int_1^e\sqrt{\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)^2}dx$$

$$=\frac{e^2+1}{4}$$

（2）由形心的计算公式可得，D 的形心的横坐标为

$$\frac{\int_1^e x\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x\right)dx}{\int_1^e\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x\right)dx}=\frac{3\left(e^4-2e^2-3\right)}{4\left(e^3-7\right)}$$

（22）（本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$，当 a,b 为何值时，存在矩阵 C 使得 $AC-CA=B$，并求所有矩阵 C 。

【解析】由题意可知矩阵 C 为 2 阶矩阵，故可设 $C=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$，则由 $AC-CA=B$ 可得线性方程组：

$$\begin{cases}-x_2+ax_3=0\\ -ax_1+x_2+ax_4=1\\ x_1-x_3-x_4=1\\ x_2-ax_3=b\end{cases}\qquad(1)$$

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & a & 0 & 0\\ -a & 1 & 0 & a & 1\\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ -a & 1 & 0 & a & 1\\ 0 & -1 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & -a & 0 & b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & 1+a\\ 0 & -1 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & -a & 0 & b\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & 1+a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1-a\end{pmatrix}$$

由于方程组（1）有解，故有 $1+a=0,b-1-a=0$，即 $a=-1,b=0,$ 从而有

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & a & 0 & 0\\ -a & 1 & 0 & a & 1\\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$，故有 $$\begin{cases}x_1=k_1+k_2+1\\ x_2=-k_1\\ x_3=k_1\\ x_4=k_2\end{cases}$$,其中 k_1、k_2 任意.

从而有$C=\begin{pmatrix} k_1+k_2+1 & -k_1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}$

（23）（本题满分 11 分）

设二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2\left(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3\right)^2+\left(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3\right)^2$，记$\alpha=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$。

（I）证明二次型 f 对应的矩阵为$2\alpha^T\alpha+\beta^T\beta$；

（II）若α,β 正交且均为单位向量，证明二次型 f 在正交变化下的标准形为二次型$2y_1^2+y_2^2$。

【解析】(1)

$$\begin{aligned} f &=(2a_1^2+b_1^2)x_1^2+(2a_2^2+b_2^2)x_2^2+(2a_3^2+b_3^2)x_3^2+(4a_1a_2+2b_1b_2)x_1x_2 \\ &+(4a_1a_3+b_1b_3)x_1x_3+(4a_2a_3+2b_2b_3)x_2x_3 \end{aligned}$$

$$\text{则}f\text{的矩阵为}\begin{pmatrix} 2a_1^2+b_1^2 & 2a_1a_2+b_1b_2 & 2a_1a_3+b_1b_3 \\ 2a_1a_2+b_1b_2 & 2a_2^2+b_2^2 & 2a_2a_3+b_2b_3 \\ 2a_1a_3+b_1b_3 & 2a_2a_3+b_2b_3 & 2a_3^2+b_3^2 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3 \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_1^2 & b_1b_2 & b_1b_3 \\ b_1b_2 & b_2^2 & b_2b_3 \\ b_1b_3 & b_2b_3 & b_3^2 \end{pmatrix}$$

$=2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$

（2）令$\text{A}=2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T,\text{则}A\alpha=2\alpha\alpha^T\alpha+\beta\beta^T\alpha=2\alpha,A\beta=2\alpha\alpha^T\beta+\beta\beta^T\beta=\beta$，则 1,2 均为 A 的特征值，又由于$r(A)=r(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\le r(\alpha\alpha^T)+r(\beta\beta^T)=2$，故 0 为 A 的特征值，则三阶矩阵 A 的特征值为 2,1,0，故 f 在正交变换下的标准形为$2y_1^2+y_2^2$