

# 2014 年全国硕士研究生入学统一考试

## 数学二试题

一、选择题 1—8 小题. 每小题 4 分, 共 32 分.

1. 当  $x \rightarrow 0^+$  时, 若  $\ln^\alpha(1+2x)$ ,  $(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$  均是比  $x$  高阶的无穷小, 则  $\alpha$  的可能取值范围是 ( )

- (A)  $(2, +\infty)$       (B)  $(1, 2)$       (C)  $(\frac{1}{2}, 1)$       (D)  $(0, \frac{1}{2})$

【详解】 $\ln^\alpha(1+2x) \sim 2^\alpha x^\alpha$ , 是  $\alpha$  阶无穷小,  $(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}} \sim \frac{1}{2^{\frac{1}{\alpha}}} x^{\frac{2}{\alpha}}$  是  $\frac{2}{\alpha}$  阶无穷小, 由题意可知  $\begin{cases} \alpha > 1 \\ \frac{2}{\alpha} > 1 \end{cases}$

所以  $\alpha$  的可能取值范围是  $(1, 2)$ , 应该选 (B).

2. 下列曲线有渐近线的是

- (A)  $y = x + \sin x$       (B)  $y = x^2 + \sin x$       (C)  $y = x + \sin \frac{1}{x}$       (D)  $y = x^2 + \sin \frac{1}{x}$

【详解】对于  $y = x + \sin \frac{1}{x}$ , 可知  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1$  且  $\lim_{x \rightarrow \infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = 0$ , 所以有斜渐近线  $y = x$

应该选 (C)

3. 设函数  $f(x)$  具有二阶导数,  $g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$ , 则在  $[0, 1]$  上 ( )

(A) 当  $f'(x) \geq 0$  时,  $f(x) \geq g(x)$       (B) 当  $f'(x) \geq 0$  时,  $f(x) \leq g(x)$

(C) 当  $f''(x) \geq 0$  时,  $f(x) \geq g(x)$       (D) 当  $f''(x) \geq 0$  时,  $f(x) \leq g(x)$

【分析】此题考查的曲线的凹凸性的定义及判断方法.

【详解 1】如果对曲线在区间  $[a, b]$  上凹凸的定义比较熟悉的话, 可以直接做出判断. 显然

$g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$  就是联接  $(0, f(0)), (1, f(1))$  两点的直线方程. 故当  $f''(x) \geq 0$  时, 曲线是凹

的, 也就是  $f(x) \leq g(x)$ , 应该选 (D)

【详解 2】如果对曲线在区间  $[a, b]$  上凹凸的定义不熟悉的话, 可令

$F(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x$ , 则  $F(0) = F(1) = 0$ , 且  $F''(x) = f''(x)$ , 故当

$f''(x) \geq 0$  时, 曲线是凹的, 从而  $F(x) \leq F(0) = F(1) = 0$ , 即  $F(x) = f(x) - g(x) \leq 0$ , 也就是

$f(x) \leq g(x)$ , 应该选 (D)

4. 曲线  $\begin{cases} x = t^2 + 7, \\ y = t^2 + 4t + 1 \end{cases}$  上对应于  $t = 1$  的点处的曲率半径是 ( )

(A)  $\frac{\sqrt{10}}{50}$  (B)  $\frac{\sqrt{10}}{100}$  (C)  $10\sqrt{10}$  (D)  $5\sqrt{10}$

【详解】曲线在点  $(x, f(x))$  处的曲率公式  $K = \frac{|y''|}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}$ , 曲率半径  $R = \frac{1}{K}$ .

本题中  $\frac{dx}{dt} = 2t, \frac{dy}{dt} = 2t + 4$ , 所以  $\frac{dy}{dx} = \frac{2t+4}{2t} = 1 + \frac{2}{t}$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\frac{2}{t^2}}{2t} = -\frac{1}{t^3}$ ,

对应于  $t = 1$  的点处  $y' = 3, y'' = -1$ , 所以  $K = \frac{|y''|}{\sqrt{(1+y'^2)^3}} = \frac{1}{10\sqrt{10}}$ , 曲率半径  $R = \frac{1}{K} = 10\sqrt{10}$ .

应该选 (C)

5. 设函数  $f(x) = \arctan x$ , 若  $f(x) = xf'(\xi)$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi^2}{x^2} =$  ( )

(A) 1 (B)  $\frac{2}{3}$  (C)  $\frac{1}{2}$  (D)  $\frac{1}{3}$

【详解】注意 (1)  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ , (2)  $x \rightarrow 0$  时,  $\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$ .

由于  $f(x) = xf'(\xi)$ , 所以可知  $f'(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2} = \frac{f(x)}{x} = \frac{\arctan x}{x}$ ,  $\xi^2 = \frac{x - \arctan x}{(\arctan x)^2}$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x(\arctan x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (x - \frac{1}{3}x^3) + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

6. 设  $u(x, y)$  在平面有界闭区域  $D$  上连续, 在  $D$  的内部具有二阶连续偏导数, 且满足  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \neq 0$  及

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \text{ 则 ( ).}$$

(A)  $u(x, y)$  的最大值点和最小值点必定都在区域  $D$  的边界上;

(B)  $u(x, y)$  的最大值点和最小值点必定都在区域  $D$  的内部;

(C)  $u(x, y)$  的最大值点在区域  $D$  的内部, 最小值点在区域  $D$  的边界上;

(D)  $u(x, y)$  的最小值点在区域  $D$  的内部, 最大值点在区域  $D$  的边界上.

【详解】 $u(x, y)$  在平面有界闭区域  $D$  上连续, 所以  $u(x, y)$  在  $D$  内必然有最大值和最小值. 并且如果在

内部存在驻点  $(x_0, y_0)$ , 也就是  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ , 在这个点处  $A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, C = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, B = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ , 由

条件, 显然  $AC - B^2 < 0$ , 显然  $u(x, y)$  不是极值点, 当然也不是最值点, 所以  $u(x, y)$  的最大值点和最小值点必定都在区域  $D$  的边界上.

所以应该选 (A).

7. 行列式  $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$  等于

(A)  $(ad - bc)^2$       (B)  $-(ad - bc)^2$       (C)  $a^2d^2 - b^2c^2$       (D)  $-a^2d^2 + b^2c^2$

【详解】

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = -a \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & d & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix} = -ad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + bc \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -(ad - bc)^2$$

应该选 (B).

8. 设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是三维向量, 则对任意的常数  $k, l$ , 向量  $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$  线性无关是向量  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关的

- (A) 必要而非充分条件      (B) 充分而非必要条件  
(C) 充分必要条件      (D) 非充分非必要条件

【详解】若向量  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 则

$$(\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k & l \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) K, \text{ 对任意的常数 } k, l, \text{ 矩阵 } K \text{ 的秩都等}$$

于 2, 所以向量  $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$  一定线性无关.

而当  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  时, 对任意的常数  $k, l$ , 向量  $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$  线性无关, 但

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关; 故选择 (A).

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分. 把答案填在题中横线上）

9.  $\int_{-\infty}^1 \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

【详解】  $\int_{-\infty}^1 \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx = \int_{-\infty}^1 \frac{dx}{(x+1)^2 + 4} = \frac{1}{2} \arctan \frac{x+1}{2} \Big|_{-\infty}^1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) = \frac{3\pi}{8}.$

10. 设  $f(x)$  为周期为 4 的可导奇函数，且  $f'(x) = 2(x-1), x \in [0, 2]$ ，则  $f(7) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【详解】 当  $x \in [0, 2]$  时，  $f(x) = \int 2(x-1)dx = x^2 - 2x + C$ ，由  $f(0) = 0$  可知  $C = 0$ ，即  $f(x) = x^2 - 2x$ ； $f(x)$  为周期为 4 奇函数，故  $f(7) = f(-1) = f(1) = 1.$

11. 设  $z = z(x, y)$  是由方程  $e^{2yz} + x + y^2 + z = \frac{7}{4}$  确定的函数，则  $dz \Big|_{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【详解】 设  $F(x, y, z) = e^{2yz} + x + y^2 + z - \frac{7}{4}$ ， $F_x = 1, F_y = 2ze^{2yz} + 2y, F_z = 2ye^{2yz} + 1$ ，当  $x = y = \frac{1}{2}$

时， $z = 0$ ， $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{1}{2}$ ， $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{1}{2}$ ，所以  $dz \Big|_{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}dy.$

12. 曲线  $L$  的极坐标方程为  $r = \theta$ ，则  $L$  在点  $(r, \theta) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  处的切线方程为  $\underline{\hspace{2cm}}.$

【详解】 先把曲线方程化为参数方程  $\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta = \theta\cos\theta \\ y = r(\theta)\sin\theta = \theta\sin\theta \end{cases}$ ，于是在  $\theta = \frac{\pi}{2}$  处， $x = 0, y = \frac{\pi}{2}$ ，

$\frac{dy}{dx} \Big|_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin\theta + \theta\cos\theta}{\cos\theta - \theta\sin\theta} \Big|_{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}$ ，则  $L$  在点  $(r, \theta) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  处的切线方程为  $y - \frac{\pi}{2} = -\frac{2}{\pi}(x - 0)$ ，即

$y = -\frac{2}{\pi}x + \frac{\pi}{2}.$

13. 一根长为 1 的细棒位于  $x$  轴的区间  $[0, 1]$  上，若其线密度  $\rho(x) = -x^2 + 2x + 1$ ，则该细棒的质心坐标  $\bar{x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【详解】 质心坐标  $\bar{x} = \frac{\int_0^1 x\rho(x)dx}{\int_0^1 \rho(x)dx} = \frac{\int_0^1 (-x^3 + 2x^2 + x)dx}{\int_0^1 (-x^2 + 2x + 1)dx} = \frac{\frac{11}{12}}{\frac{5}{3}} = \frac{11}{20}.$

14. 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$  的负惯性指数是 1，则  $a$  的取值范围

是\_\_\_\_\_.

【详解】由配方法可知

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3 \\ &= (x_1 + ax_3)^2 - (x_2 - 2x_3)^2 + (4 - a^2)x_3^2 \end{aligned}$$

由于负惯性指数为 1, 故必须要求  $4 - a^2 \geq 0$ , 所以  $a$  的取值范围是  $[-2, 2]$ .

### 三、解答题

15. (本题满分 10 分)

求极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x (t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t) dt}{x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})}$ .

【分析】先用等价无穷小代换简化分母, 然后利用洛必达法则求未定型极限.

【详解】

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x (t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t) dt}{x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x (t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t) dt}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1) - x) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x^2 \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) - x \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

16. (本题满分 10 分)

已知函数  $y = y(x)$  满足微分方程  $x^2 + y^2 y' = 1 - y'$ , 且  $y(2) = 0$ , 求  $y(x)$  的极大值和极小值.

【详解】

解: 把方程化为标准形式得到  $(1 + y^2) \frac{dy}{dx} = 1 - x^2$ , 这是一个可分离变量的一阶微分方程, 两边分别积分

可得方程通解为:  $\frac{1}{3} y^3 + y = x - \frac{1}{3} x^3 + C$ , 由  $y(2) = 0$  得  $C = \frac{2}{3}$ ,

即  $\frac{1}{3} y^3 + y = x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{3}$ .

令  $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - x^2}{1 + y^2} = 0$ , 得  $x = \pm 1$ , 且可知  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-2x(1 + y^2)^2 - 2y(1 - x^2)^2}{(1 + y^2)^3}$ ;

当  $x = 1$  时, 可解得  $y = 1$ ,  $y'' = -1 < 0$ , 函数取得极大值  $y = 1$ ;

当  $x = -1$  时, 可解得  $y = 0$ ,  $y'' = 2 > 0$ , 函数取得极小值  $y = 0$ .

17. (本题满分 10 分)

设平面区域  $D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$ . 计算  $\iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy$

【详解】由对称性可得

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy &= \iint_D \frac{y \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy = \frac{1}{2} \iint_D \frac{(x + y) \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_D \frac{\sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{1} dx dy = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 r \sin \pi r dr = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

18. (本题满分 10 分)

设函数  $f(u)$  具有二阶连续导数,  $z = f(e^x \cos y)$  满足  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x \cos y)e^{2x}$ . 若

$f(0) = 0, f'(0) = 0$ , 求  $f(u)$  的表达式.

【详解】

设  $u = e^x \cos y$ , 则  $z = f(u) = f(e^x \cos y)$ ,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u)e^{x \cos y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(u)e^{2x} \cos^2 y + f'(u)e^x \cos y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -f'(u)e^x \sin y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(u)e^{2x} \sin^2 y - f'(u)e^x \cos y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(u)e^{2x} = f''(e^x \cos y)e^{2x}$$

由条件  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x \cos y)e^{2x}$ ,

可知

$$f''(u) = 4f(u) + u$$

这是一个二阶常系数线性非齐次方程.

对应齐次方程的通解为:

$$f(u) = C_1 e^{2u} + C_2 e^{-2u} \text{ 其中 } C_1, C_2 \text{ 为任意常数.}$$

对应非齐次方程特解可求得为  $y^* = -\frac{1}{4}u$ .

故非齐次方程通解为  $f(u) = C_1 e^{2u} + C_2 e^{-2u} - \frac{1}{4}u$ .

将初始条件  $f(0)=0, f'(0)=0$  代入, 可得  $C_1 = \frac{1}{16}, C_2 = -\frac{1}{16}$ .

所以  $f(u)$  的表达式为  $f(u) = \frac{1}{16}e^{2u} - \frac{1}{16}e^{-2u} - \frac{1}{4}u$ .

19. (本题满分 10 分)

设函数  $f(x), g(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 且  $f(x)$  单调增加,  $0 \leq g(x) \leq 1$ , 证明:

$$(1) \quad 0 \leq \int_a^x g(t)dt \leq x-a, \quad x \in [a, b];$$

$$(2) \quad \int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

【详解】

$$(1) \text{ 证明: 因为 } 0 \leq g(x) \leq 1, \text{ 所以 } \int_a^x 0dx \leq \int_a^x g(t)dt \leq \int_a^x 1dt \quad x \in [a, b].$$

$$\text{即 } 0 \leq \int_a^x g(t)dt \leq x-a, \quad x \in [a, b].$$

$$(2) \text{ 令 } F(x) = \int_a^x f(u)g(u)du - \int_a^{a+\int_a^x g(t)dt} f(u)du,$$

$$\text{则可知 } F(a) = 0, \text{ 且 } F'(x) = f(x)g(x) - g(x)f\left(a + \int_a^x g(t)dt\right),$$

因为  $0 \leq \int_a^x g(t)dt \leq x-a$ , 且  $f(x)$  单调增加,

所以  $f\left(a + \int_a^x g(t)dt\right) \leq f(a+x-a) = f(x)$ . 从而

$$F'(x) = f(x)g(x) - g(x)f\left(a + \int_a^x g(t)dt\right) \geq f(x)g(x) - g(x)f(x) = 0, \quad x \in [a, b]$$

也是  $F(x)$  在  $[a, b]$  单调增加, 则  $F(b) \geq F(a) = 0$ , 即得到

$$\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

20. (本题满分 11 分)

设函数  $f(x) = \frac{x}{1+x}, x \in [0, 1]$ , 定义函数列

$$f_1(x) = f(x), \quad f_2(x) = f(f_1(x)), \quad \dots, \quad f_n(x) = f(f_{n-1}(x)), \dots$$

设  $S_n$  是曲线  $y = f_n(x)$ , 直线  $x=1, y=0$  所围图形的面积. 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} nS_n$ .

【详解】

$$f_1(x) = \frac{x}{1+x}, \quad f_2(x) = \frac{f_1(x)}{1+f_1(x)} = \frac{\frac{x}{1+x}}{1+\frac{x}{1+x}} = \frac{x}{1+2x}, \quad f_3(x) = \frac{x}{1+3x}, \dots,$$

利用数学归纳法可得  $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$ .

$$S_n = \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \frac{x}{1+nx} dx = \frac{1}{n} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+nx}\right) dx = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{\ln(1+n)}{n}\right),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\ln(1+n)}{n}\right) = 1.$$

21. (本题满分 11 分)

已知函数  $f(x, y)$  满足  $\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y+1)$ , 且  $f(y, y) = (y+1)^2 - (2-y)\ln y$ , 求曲线  $f(x, y) = 0$  所成的

图形绕直线  $y = -1$  旋转所成的旋转体的体积.

**【详解】**

由于函数  $f(x, y)$  满足  $\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y+1)$ , 所以  $f(x, y) = y^2 + 2y + C(x)$ , 其中  $C(x)$  为待定的连续函数.

又因为  $f(y, y) = (y+1)^2 - (2-y)\ln y$ , 从而可知  $C(y) = 1 - (2-y)\ln y$ ,

得到  $f(x, y) = y^2 + 2y + C(x) = y^2 + 2y + 1 - (2-x)\ln x$ .

令  $f(x, y) = 0$ , 可得  $(y+1)^2 = (2-x)\ln x$ . 且当  $y = -1$  时,  $x_1 = 1, x_2 = 2$ .

曲线  $f(x, y) = 0$  所成的图形绕直线  $y = -1$  旋转所成的旋转体的体积为

$$V = \pi \int_1^2 (y+1)^2 dx = \pi \int_1^2 (2-x)\ln x dx = \left(2\ln 2 - \frac{5}{4}\right)\pi$$

22. (本题满分 11 分)

设  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $E$  为三阶单位矩阵.

(1) 求方程组  $AX = 0$  的一个基础解系;

(2) 求满足  $AB = E$  的所有矩阵.

**【详解】** (1) 对系数矩阵  $A$  进行初等行变换如下:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

得到方程组  $AX = 0$  同解方程组



$$\begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = 2x_4 \\ x_3 = 3x_4 \end{cases}$$

得到  $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{0}$  的一个基础解系  $\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

(2) 显然  $\mathbf{B}$  矩阵是一个  $4 \times 3$  矩阵, 设  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{pmatrix}$

对矩阵  $(\mathbf{A}\mathbf{E})$  进行初等行变换如下:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}\mathbf{E}) &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

由方程组可得矩阵  $\mathbf{B}$  对应的三列分别为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

即满足  $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{E}$  的所有矩阵为

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2-c_1 & 6-c_2 & -1-c_3 \\ -1+2c_1 & -3+2c_2 & 1+2c_3 \\ -1+3c_1 & -4+3c_2 & 1+3c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

其中  $c_1, c_2, c_3$  为任意常数.

23. (本题满分 11 分)

证明  $n$  阶矩阵  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$  与  $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$  相似.

【详解】证明：设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ .

分别求两个矩阵的特征值和特征向量如下：

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - n)\lambda^{n-1},$$

所以 A 的  $n$  个特征值为  $\lambda_1 = n, \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots \lambda_n = 0$ ;

而且 A 是实对称矩阵，所以一定可以对角化。且  $A \sim \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & 0 & & \\ & & \cdots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ ;

$$|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & \lambda & \cdots & -2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda - n \end{vmatrix} = (\lambda - n)\lambda^{n-1}$$

所以 B 的  $n$  个特征值也为  $\lambda_1 = n, \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots \lambda_n = 0$ ;

对于  $n-1$  重特征值  $\lambda = 0$ ，由于矩阵  $(0E - B) = -B$  的秩显然为 1，所以矩阵 B 对应  $n-1$  重特征值  $\lambda = 0$  的特征向量应该有  $n-1$  个线性无关，进一步矩阵 B 存在  $n$  个线性无关的特征向量，即矩阵 B 一定可以对

角化，且  $B \sim \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & 0 & & \\ & & \cdots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

从而可知  $n$  阶矩阵  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$  与  $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$  相似。