2016年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题答案

一、选择题:1～8小题，每小题4分，共32分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合

题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1、设$a_1=x(\cos\sqrt{x}-1)$，$a_2=\sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x})$，$a_3=\sqrt[3]{x+1}-1$.当$x\to 0^+$时，以上3个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是(　　)

（A）a_1,a_2,a_3.　　　　（B）a_2,a_3,a_1.

（C）a_2,a_1,a_3.　　　　（D）a_3,a_2,a_1.

【答案】（B）

【解析】当$x\to 0^+$时，

$$a_1=x(\cos\sqrt{x}-1)\sim-\frac{1}{2}x^2,a_2=\sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x})\sim x^{\frac{5}{6}},a_3=\sqrt[3]{x+1}-1\sim\frac{1}{3}x$$

所以3个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是a_2,a_3,a_1，故选B.

2、已知函数$f(x)=\begin{cases}2(x-1), & x<1,\\ \ln x, & x\geq 1,\end{cases}$则$f(x)$的一个原函数是

（A）$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1.\\ x(\ln x-1), & x\geq 1.\end{cases}$　　（B）$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1.\\ x(\ln x+1)-1, & x\geq 1.\end{cases}$

（C）$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1.\\ x(\ln x+1)+1, & x\geq 1.\end{cases}$　　（D）$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1.\\ x(\ln x-1)+1, & x\geq 1.\end{cases}$

【答案】（D）

【解析】$F(x)=\int f(x)dx=\begin{cases}(x-1)^2 & x<1\\ x\ln x-x+C & x>1\end{cases}$，$F(x)$需连续，$F(1^+)=F(1^-)$

$\Rightarrow C=1$

3、反常积分①$\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$，②$\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$的敛散性为

（A）①收敛，②收敛.　　　　（B）①收敛，②发散.

（C）①发散，②收敛.　　　　（D）①发散，②发散.

【答案】（B）

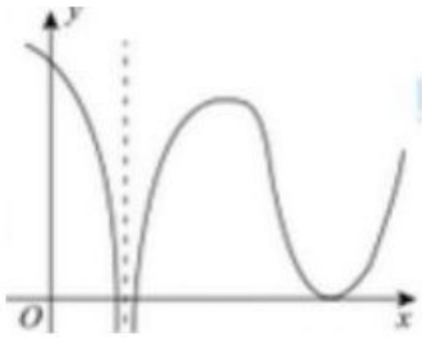
【解析】$\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx=-\int_{-\infty}^{0}e^{\frac{1}{x}}d\frac{1}{x}=-e^{\frac{1}{x}}\Big|_{-\infty}^{0}=-(\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}-\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\frac{1}{x}})=1$，收敛

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx=-\int_{0}^{+\infty}e^{\frac{1}{x}}d\frac{1}{x}=-e^{\frac{1}{x}}\Big|_{0}^{+\infty}=-(\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}-\lim_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}})=-1+\lim_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty,$$

发散

故选 B.

4、设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的图形如图所示，则(　　)



（A）函数 $f(x)$ 有 2 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点.

（B）函数 $f(x)$ 有 2 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 3 个拐点.

（C）函数 $f(x)$ 有 3 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 1 个拐点.

（D）函数 $f(x)$ 有 3 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点.

【答案】（B）

【解析】根据极值的必要条件可知，极值点可能是驻点或导数不存在的点。根据极值的充分条件知，在某点左右导函数符号发生改变，则该点是极值点，因此从图形可知函数 $f(x)$ 有 2 个极值点.

根据拐点的必要条件可知，拐点可能是二阶导为 0 的点或二阶导不存在的点，根据拐点的充分条件可知，曲线在某点左右导函数的单调性发生改变，则该点是曲线的拐点，因此曲线 $y=f(x)$ 由 3 个拐点，故选 B.

5、设函数 $f_i(x)(i=1,2)$ 具有二阶连续导数，且 $f_i(x_0)<0(i=1,2)$，若两条曲线 $y=f_i(x)(i=1,2)$ 在点 (x_0,y_0) 处具有公切线 $y=g(x)$，且在该点处曲线 $y=f_1(x)$ 的曲率大于曲线 $y=f_2(x)$ 的曲率，则在 x_0 的某个领域内，有(　　)

（A） $f_1(x)\le f_2(x)\le g(x)$ （B） $f_2(x)\le f_1(x)\le g(x)$

（C） $f_1(x)\le g(x)\le f_2(x)$ （D） $f_2(x)\le g(x)\le f_1(x)$

【答案】（A）

【解析】因为 $f_i''(x)$ 连续且 $f_i''(x_0)<0$，所以根据连续的定义和极限的保号性在 x_0 的某领域 $U(x_0)$ 内有 $f_i''(x)<0$，所以 $f_i(x)$ 在 $U(x_0)$ 内是凸的.又因为在 $x=x_0$ 处具有公切线 $y=g(x)$，根据凸函数的几何意义可知曲线与切线位置关系为 $f_i(x)\le g(x)$.在点 x_0 处 $y=f_1(x)$ 曲率大于 $y=f_2(x)$，所以 $f_1''(x_0)<f_2''(x_0)<0$，所以令 $F(x)=f_1(x)-f_2(x)$，因为在 $x=x_0$ 处具有公切线 $y=g(x)$，所以 $F(x_0)=0$，$F'(x_0)=0$.再由 $F''(x_0)<0$ 得，$F(x_0)=0$ 为 $F(x)$ 的极大值，所以在 x_0 的某领域 $U_1(x_0)$ 内 $F(x)\le 0$，故 $f_1(x)\le f_2(x)$.从而 $f_1(x)\le f_2(x)\le g(x)$.故选 A.

6、已知函数 $f(x,y)=\dfrac{e^x}{x-y}$，则

（A） $f_x'-f_y'=0$ （B） $f_x'+f_y'=0$

（C） $f_x'-f_y'=f$ （D） $f_x'+f_y'=f$

【答案】（D）

【解析】因为 $f_x'(x,y)=\dfrac{e^x(x-y)-e^x}{(x-y)^2},f_y'(x,y)=\dfrac{e^x}{(x-y)^2}$，

所以 $f_x'(x,y)+f_y'(x,y)=\dfrac{e^x}{x-y}=f(x)$.故选 D.

7、设 A，B 是可逆矩阵，且 A 与 B 相似，则下列结论错误的是

（A） A^T 与 B^T 相似 （B） A^{-1} 与 B^{-1} 相似

（C） $A+A^T$ 与 $B+B^T$ 相似 （D） $A+A^{-1}$ 与 $B+B^{-1}$ 相似

【答案】（C）

【解析】 A 与 B 相似，所以存在可逆阵 P 使得 $P^{-1}AP=B$.

$B^T=P^TA^T(P^{-1})^T=P^TA^T(P^T)^{-1}$，即 A^T 与 B^T 相似.

$B^{-1}=P^{-1}A^{-1}P$，即 A^{-1} 与 B^{-1} 相似.

又 $B=P^{-1}AP$，从而有 $B^{-1}+B=P^{-1}(A+A^{-1})P$

所以 $A+A^{-1}$ 与 $B^{-1}+B$ 相似，从而选 C.

8、设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$ 的正、负惯性指数分别为 1,2，则(　　)

（A）$a>1$　　　　（B）$a<-2$

（C）$-2<a<1$　　　　（D）$a=1$ 与 $a=-2$

【答案】（C）

【解析】二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 对应的矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$，由

$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-a & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-a \end{vmatrix}=(\lambda-a-2)(\lambda-a+1)^2=0$ 得，A 的特征值为 $\lambda_1=a+2,\lambda_2=\lambda_3=a-1$，由于 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的正、负惯性指数分别为 1,2，且正负惯性指数恰好等于特征值中正、负数的个数，所以 $a+2>0$ 且 $a-1<0$，即 $-2<a<1$.故选 C.

二、填空题：9～14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

9、曲线 $y=\dfrac{x^3}{1+x^2}+\arctan(1+x^2)$ 的斜渐近线方程为____________.

【答案】$y=x+\dfrac{\pi}{2}$

【解析】因为 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}(\dfrac{x^3}{1+x^2}+\arctan(1+x^2))=1$，

$b=\lim\limits_{x\to\infty}(y-ax)=\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^3}{1+x^2}+\arctan(1+x^2)-x)=\dfrac{\pi}{2}$.所以斜渐近线为 $y=x+\dfrac{\pi}{2}$.

10、极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+n\sin\dfrac{n}{n})=$____________.

【答案】$\sin 1-\cos 1$

【解析】因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(\sin\frac{1}{n}+2\sin\frac{2}{n}+\cdots+n\sin\frac{n}{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}+2\frac{1}{n}\sin\frac{2}{n}+\cdots+n\frac{1}{n}\sin\frac{n}{n})$$

$$=\int_0^1 x\sin x dx=\sin 1-\cos 1$$

11、以 $y=x^2-e^x$ 和 $y=x^2$ 为特解的一阶非齐次线性微分方程为____________.

【答案】$y'-y=2x-x^2$

【解析】设一阶非齐次线性微分方程为 $y'+p(x)y=q(x)$.根据线性微分方程齐次与非齐次解之间的关系知 $x^2-(x^2-e^x)=e^x$ 为 $y'+p(x)y=0$ 的解，所以 $p(x)=-1$.又因为 $y=x^2$ 是 $y'+p(x)y=q(x)$ 的解，所以 $q(x)=2x-x^2$.故一阶非齐次线性微分方程为 $y'-y=2x-x^2$.

12、已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)=(x+1)^2+2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ ，则当 $n\geq 2$ 时，$f^{(n)}(0)=$____________.

【答案】$\frac{5}{2}\times 2^n$

【解析】当 $x=0$ 时，$f(0)=1$ ；

$f(x)=(x+1)^2+2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 两边同时对 x 求导，得 $f'(x)=2(x+1)+2f(x)$ ，$f'(0)=4$ ；

$f'(x)=2(x+1)+2f(x)$ 两边同时对 x 求导，得 $f''(x)=2+2f'(x)$ ，$f''(0)=10$ ；

$f''(x)=2+2f'(x)$ 两边同时对 x 求导，得 $f'''(x)=2f''(x)$ ；

……..

依次求导得 $f^{(n)}(x)=2^{n-2}f''(x)$ ；所以 $f^{(n)}(0)=2^{n-2}f''(0)=10\times 2^{n-2}=\frac{5}{2}\times 2^n$.

13、已知动点 P 在曲线 $y=x^3$ 上运动，记坐标原点与点 P 间的距离为 l .若点 P 的横坐标时间的

变化率为常数 V_0 ，则当点 P 运动到点 $(1,1)$ 时，l 对时间的变化率是________.

【答案】$2\sqrt{2}v_0$

【解析】$l=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+x^6}$ ，同时对 t 求导得，$\frac{dl}{dt}=\frac{dl}{dx}\frac{dx}{dt}=\frac{2x+6x^5}{2\sqrt{x^2+x^6}}\frac{dx}{dt}$ ，又因为 $x=1,\frac{dx}{dt}=v_0$ ，所以 $\frac{dl}{dt}\Big|_{x=1}=\frac{8}{2\sqrt{2}}v_0=2\sqrt{2}v_0$.

14、设矩阵$\begin{bmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$等价，则$a =$ __________.

【答案】2

【解析】$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$，$r(B) = 2$

$$|\ \ | = \begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & & -1 \\ -1 & -1 & a \end{vmatrix} = (\ \ +1)^2(\ \ -2) = 0$$

当$a = -1$时，$r(A) = 1$；当$a = 2$时，$r(A) = 2$，故$a = 2$.

三、解答题：15～23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15、（本题满分 10 分）

求极限$\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x + 2x\sin x - 1)^{\frac{1}{x^4}}$

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x + 2x\sin x - 1)^{\frac{1}{x^4}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^4}(\cos 2x + 2x\sin x - 1)}$

其中

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}(\cos 2x + 2x\sin x - 1) = \lim_{x\to 0}\frac{1 - \frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{4!}(2x)^4 + o(x^4) + 2x(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)) - 1}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + 2x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)) - 1}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \frac{1}{3}$$

因此，原极限$= e^{\frac{1}{3}}$

16、（本题满分 10 分）

设函数$f(x) = \int_0^1 \left|t^2 - x^2\right| dt (x > 0)$，求$f'(x)$并求$f(x)$的最小值.

【解析】$f(x) = \int_0^1 \left|t^2 - x^2\right| dt, (x > 0)$

当$0 < x \le 1$时，$f(x) = \int_0^x (x^2 - t^2)dt + \int_x^1 (t^2 - x^2)dt$

$$= x^3 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x^3 - x^2(1-x) = \frac{4}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}$$

当 $x>1$ 时，　　$f(x)=\int_0^1 (x^2-t^2)dt = x^2\int_0^1 dt - \int_0^1 t^2 dt = x^2-\frac{1}{3}$

即 $f(x)=\begin{cases} \frac{4}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3} & 0<x\le 1 \\ x^2-\frac{1}{3} & x>1 \end{cases}$　　$f'(x)=\begin{cases} 4x^2-2x & 0<x\le 1 \\ 2x & x>1 \end{cases}$

令 $f'(x)=0$ 可得当 $0<x\le 1$ 时 $x=\frac{1}{2}$ 为驻点且为极小值点 $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$，而 $f(1)=\frac{2}{3}$

所以 $f(x)$ 的最小值为 $\frac{1}{4}$.

17、（本题满分 10 分）

已知函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(x^2+y^2)z+\ln z+2(x+y+1)=0$ 确定，求 $z=z(x,y)$ 的极值.

【解析】$\begin{cases} 2xz+x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}+2=0 \\ x^2\frac{\partial z}{\partial y}+2yz+y^2\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y}+2=0 \end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases} xz+1=0 \\ yz+1=0 \\ x^2z+y^2z+\ln z+2(x+y+1)=0 \end{cases}\qquad\Rightarrow\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \\ z=1 \end{cases}$$

由 $2xz+x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}+2=0$ 再对 x 求导可得

$$2z+2x\frac{\partial z}{\partial x}+(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{1}{z^2}(\frac{\partial z}{\partial x})^2+\frac{1}{z}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$$

将 $\frac{\partial z}{\partial x}=0, x=-1, y=-1, z=1$ 代入可得 $A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{2}{3}<0$，同理：$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}<0$

由 $2xz+x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}+2=0$ 再对 y 求导可得

$$2x\frac{\partial z}{\partial y}+2y\frac{\partial z}{\partial x}+(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{1}{z^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{1}{z}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$$

将 $\frac{\partial z}{\partial x}=0, \frac{\partial z}{\partial y}=0, x=-1, y=-1, z=1$ 代入可得 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$

$AC-B^2>0$且$A<0$，所以$(-1,-1)$处取得极大值.

18、（本题满分 10 分）

设D是由直线$y=1$，$y=x$，$y=-x$围成的有界区域，计算二重积分$\iint\limits_D \frac{x^2-xy-y^2}{x^2+y^2}dxdy$.

【解析】$I=\iint\limits_D \frac{x^2-xy-y^2}{x^2+y^2}dxdy=\iint\limits_D \frac{x^2+y^2-2y^2}{x^2+y^2}dxdy-\iint\limits_D \frac{xy}{x^2+y^2}dxdy=I_1+I_2$

又区域 D 关于　轴对称，则$I_2=0$

$I_1=\iint\limits_D dxdy-2\iint\limits_D \frac{y^2}{x^2+y^2}dxdy=I_3+I_4$

其中$I_3=\iint\limits_D dxdy=1$，

$I_4=2\iint\limits_D \frac{y^2}{x^2+y^2}dxdy=4\iint\limits_{D_1} \frac{y^2}{x^2+y^2}dxdy=4\int_0^1 dy\int_0^y \frac{y^2}{x^2+y^2}dx$

又$\int_0^y \frac{y^2}{x^2+y^2}dx=y\int_0^y \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}d\frac{x}{y}=y\arctan\frac{x}{y}\Big|_0^y=\frac{\pi}{4}y$

故$I_4=\pi\int_0^1 ydy=\frac{\pi}{2}$，则$I=1-\frac{\pi}{2}$.

19、（本题满分 10 分）

已知$y_1(x)=e^x$，$y_2(x)=\mu(x)e^x$是二阶微分方程$(2x-1)y''-(2x+1)y'+2y=0$的两个解，若$\mu(-1)=e$，$\mu(0)=-1$，求$\mu(x)$并写出该微分方程的通解.

【解析】已知$y_2(x)=\mu(x)e^x$是二阶微分方程$(2x-1)y''-(2x+1)y'+2y=0$的解，代入并整理得$(2x-1)\mu''=(3-2x)\mu'$，即$\frac{\mu''}{\mu'}=\frac{3-2x}{2x-1}$，

所以$\int\frac{\mu''}{\mu'}dx=\int\frac{3-2x}{2x-1}dx$，$\ln|\mu'|=\int\frac{1-2x+2}{2x-1}dx=-x+\ln|2x-1|+\ln C_1$.

所以$|\mu'(x)|=e^{-x}\cdot|2x-1|C_1$，$\mu'(x)=C_1(2x-1)e^{-x}$。

$\mu(x)=\int C_1(2x-1)e^{-x}dx=C_1[-2xe^{-x}-e^{-x}+C_2]$

已知 $\mu(-1)=e$，$\mu(0)=-1$，所以 $C_1=1$，$C_2=0$，即 $\mu(x)=-2xe^{-x}-e^{-x}$.

已知 $y_1(x)$，$y_2(x)$ 必线性无关，从而原方程通解为 $y=k_1e^{-x}+k_2(-2x-1)e^{-x}$，$k_1,k_2$ 为任意常数.

20、（本题满分 11 分）

设 D 是由曲线 $y=\sqrt{1-x^2}\,(0\le x\le 1)$ 与 $\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases}\left(0\le t\le\dfrac{\pi}{2}\right)$ 围成的平面区域，求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积和表面积。

【解析】$V=V_1-V_2=\pi\int_0^1\left(1-x^2\right)dx-\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sin^6 t\cdot 3\cos^2 t\left(-\sin t\right)dt$

$$=\frac{2\pi}{3}-3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 t\left(1-\sin^2 t\right)dt+3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^9 tdt$$

则 $V==\dfrac{2\pi}{3}-3\pi\cdot\dfrac{16}{35}\cdot\dfrac{1}{9}=\dfrac{18}{35}\pi$

$$S_1=2\pi\int_0^1 y\sqrt{1+y'^2(x)}dx=2\pi\int_0^1\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}dx=2\pi$$

$$S_2=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\sqrt{(3\sin^2 t\cos t)^2+(3\cos^2 t\sin t)^2}dt$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\cdot 3\sin t\cos tdt$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\sin^4 td\sin t=\frac{6\pi}{5}\sin^5 t\,|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{6\pi}{5}$$

所以 $S=S_1+S_2=2\pi+\dfrac{6\pi}{5}=\dfrac{16\pi}{5}$.

21、（本题满分 11 分）

已知 $f(x)$ 在 $[0,\dfrac{3\pi}{2}]$ 上连续，在 $(0,\dfrac{3\pi}{2})$ 内是函数 $\dfrac{\cos x}{2x-3\pi}$ 的一个原函数，且 $f(0)=0$，

（1）求 $f(x)$ 在区间 $[0,\dfrac{3\pi}{2}]$ 上的平均值；

（2）证明 $f(x)$ 在区间 $(0,\dfrac{3\pi}{2})$ 内存在唯一零点.

【解析】（1）$f(x)=\int_0^x \frac{\cos t}{2t-3\pi}dt=\frac{\int_0^{\frac{3}{2}\pi}dx\int_0^x \frac{\cos t}{2t-3\pi}dt}{\frac{3}{2}\pi}=\frac{\int_0^{\frac{3}{2}\pi}dt\int_t^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\cos t}{2t-3\pi}dx}{\frac{3}{2}\pi}$

$$=\frac{-\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\cos t}{2}dt}{\frac{3}{2}\pi}=\frac{-\frac{1}{2}\sin t\Big|_0^{\frac{3}{2}\pi}}{\frac{3}{2}\pi}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}\pi}=\frac{1}{3\pi}$$

（2）$f(x)=\int_0^x \frac{\cos t}{2t-3\pi}dt$ 得，$f'(x)=\frac{\cos x}{2x-3\pi}$，令 $f'(x)=0$ 解得在 $(0,\frac{3\pi}{2})$ 上的唯一驻点为 $x=\frac{\pi}{2}$，且当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$f'(x)<0$；当 $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi$ 时，$f'(x)>0$

所以 $x=\frac{\pi}{2}$ 为 $f(x)$ 在 $(0,\frac{3\pi}{2})$ 内的极小值点，也是最小值点.故 $f_{\min}(x)=f(\frac{\pi}{2})<0$，$f(0)=0$，$f(\pi)>0$，结合单调性可知，函数 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内无零点，函数 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ 内唯一零点，综上所述，$f(x)$ 在区间 $(0,\frac{3\pi}{2})$ 内只有唯一零点.

22、（本题满分 11 分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1-a\\ 1 & 0 & a\\ a+1 & 1 & a+1\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2a-2\end{pmatrix}$，且方程组 $Ax=\beta$ 无解，

（1）求 a 的值；

（2）求方程组 $A^TAx=A^T\beta$ 的通解.

【解析】（1）由方程组 $Ax=\beta$ 无解，可知 $r(A)\neq r(A,\beta)$，故这里有 $|A|=0$，

$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1-a\\ 1 & 0 & a\\ a+1 & 1 & a+1\end{vmatrix}=0\Rightarrow a=0$ 或 $a=2$。由于当 $a=0$ 时，$r(A)\neq r(A,\beta)$，而当 $a=2$ 时，$r(A)=r(A,\beta)$ 综上，故 $a=0$ 符合题目.

（2）当 $a=0$ 时，$A^TA=\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix},A^T\beta=\begin{pmatrix}-1\\ -2\\ -2\end{pmatrix}$，故

$$(A^TA, A^T\beta)=\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&2&-1\\2&2&2&-2\\2&2&2&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

因此，方程组 $A^TAx=A^T\beta$ 的通解为 $x=k\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$，其中 k 为任意实数.

23、（本题满分 11 分）

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

（1）求 A^{99}

（2）设 3 阶矩阵 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 满足 $B^2=BA$.记 $B^{100}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，将 β_1,β_2,β_3 分别表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合.

【解析】(1)由 $|\lambda E-A|=\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)=0$，所以 $\lambda_1=0,\lambda_2=-1,\lambda_3=-2$。

所以 A 可相似对角化，且 A 与 $\begin{pmatrix}0&&\\&-1&\\&&-2\end{pmatrix}$ 相似。

由 $(0E-A)x=0$ 得 $\eta_1=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\1\\1\end{pmatrix}$；由 $(-E-A)x=0$ 得 $\eta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$；由 $(-2E-A)x=0$ 得 $\eta_3=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$.

令 $P=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&1&1\\1&1&2\\1&0&0\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&&\\&-1&\\&&-2\end{pmatrix}=\Lambda$.

所以 $A = P\Lambda P^{-1}$，所以 $A^{99} = P\Lambda^{99}P^{-1} = \begin{pmatrix} -2+2^{99} & 1-2^{99} & 2-2^{98} \\ -2+2^{100} & 1-2^{100} & 2-2^{99} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(2)由 $B^2 = BA$ 得

$B^3 = B^2A = BA^2 \Rightarrow B^4 = B^2A^2 = BA^3 \Rightarrow \cdots\cdots \Rightarrow B^{100} = BA^{99}$,

所以 $(\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3) = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3)A^{99}$,

所以 $\beta_1 = (-2+2^{99})\alpha_1 + (-2+2^{100})\alpha_2$

$\beta_2 = (1-2^{99})\alpha_1 + (1-2^{100})\alpha_2$,

$\beta_3 = (2-2^{98})\alpha_1 + (2-2^{99})\alpha_2$