2017 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1））若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax},x>0\\ b,x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则（　　）

(A) $ab=\dfrac{1}{2}$　　(B) $ab=-\dfrac{1}{2}$　　(C) $ab=0$　　(D) $ab=2$

【答案】A

【解析】$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{2}x}{ax}=\dfrac{1}{2a},\because f(x)$ 在 $x=0$ 处连续 $\therefore\dfrac{1}{2a}=b\Rightarrow ab=\dfrac{1}{2}$. 选 A.

（2）设二阶可导函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=f(-1)=1,f(0)=-1$ 且 $f''(x)>0$，则（　　）

$(A)\int_{-1}^{1}f(x)dx>0$　　$(B)\int_{-1}^{1}f(x)dx<0$

$(C)\int_{-1}^{0}f(x)dx>\int_{0}^{1}f(x)dx$　　$(D)\int_{-1}^{0}f(x)dx<\int_{0}^{1}f(x)dx$

【答案】B

【解析】

$f(x)$ 为偶函数时满足题设条件，此时 $\int_{-1}^{0}f(x)dx=\int_{0}^{1}f(x)dx$，排除 C,D.

取 $f(x)=2x^2-1$ 满足条件，则 $\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}\left(2x^2-1\right)dx=-\dfrac{2}{3}<0$，选 B.

（3）设数列 $\{x_n\}$ 收敛，则（　）

(A) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$　　(B) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sqrt{|x_n|})=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

(C) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+{x_n}^2)=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$　　(D) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sin x_n)=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

【答案】D

【解析】特值法：（A）取 $x_n=\pi$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=0,\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\pi$，A 错；

取 $x_n=-1$，排除 B,C.所以选 D.

（4）微分方程的特解可设为

（A） $Ae^{2x}+e^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$　　　　（B） $Axe^{2x}+e^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$

（C） $Ae^{2x}+xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$　　　　（D） $Axe^{2x}+e^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$

【答案】A

【解析】特征方程为： $\lambda^2-4\lambda+8=0\Rightarrow\lambda_{1,2}=2\pm 2i$

$\because f(x)=e^{2x}(1+\cos 2x)=e^{2x}+e^{2x}\cos 2x\therefore y_1^*=Ae^{2x},y_2^*=xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x),$

故特解为： $y^*=y_1^*+y_2^*=Ae^{2x}+xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x),$ 选 C.

（5）设 $f(x,y)$ 具有一阶偏导数，且对任意的 (x,y)，都有 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0,\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}>0$，则

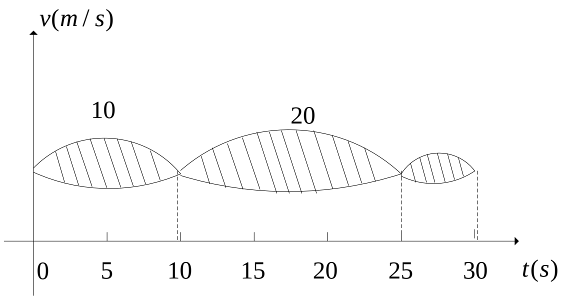
（A） $f(0,0)>f(1,1)$　（B） $f(0,0)<f(1,1)$　（C） $f(0,1)>f(1,0)$　（D） $f(0,1)<f(1,0)$

【答案】C

【解析】 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0,\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0,\Rightarrow$ $f(x,y)$ 是关于 x 的单调递增函数，是关于 y 的单调递减函数，

所以有 $f(0,1)<f(1,1)<f(1,0)$，故答案选 D.

（6）甲乙两人赛跑，计时开始时，甲在乙前方 10（单位：m）处，图中实线表示甲的速度曲线 $v=v_1(t)$（单位：m/s），虚线表示乙的速度曲线 $v=v_2(t)$，三块阴影部分面积的数值依次为 10,20,3，计时开始后乙追上甲的时刻记为 t_0（单位：s），则（　　）



（A） $t_0=10$　　　　（B） $15<t_0<20$　　　　（C） $t_0=25$　　　　（D） $t_0>25$

【答案】B

【解析】从 0 到 t_0 这段时间内甲乙的位移分别为 $\int_0^{t_0} v_1(\mathrm{t})dt, \int_0^{t_0} v_2(\mathrm{t})dt,$ 则乙要追上甲，则

$\int_0^{t_0} v_2(\mathrm{t}) - \mathrm{v}_1(\mathrm{t})dt = 10$，当 $t_0 = 25$ 时满足，故选 C.

（7）设 A 为三阶矩阵，$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 为可逆矩阵，使得 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$，则 $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) =$（　　）

（A）$\alpha_1 + \alpha_2$　　（B）$\alpha_2 + 2\alpha_3$　　（C）$\alpha_2 + \alpha_3$　　（D）$\alpha_1 + 2\alpha_2$

【答案】 B

【解析】

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow AP = P\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix} = \alpha_2 + 2\alpha_3,$$

因此 B 正确。

（8）设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,则（　）

（A）A与C相似$,B$与C相似　　（B）A与C相似$,B$与C不相似

（C）A与C不相似$,B$与C相似　　（D）A与C不相似$,B$与C不相似

【答案】B

【解析】由 $\left|\lambda E - A\right| = 0$ 可知 A 的特征值为 2,2,1,

因为 $3 - r(2E - A) = 1$，∴A 可相似对角化，即 $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

由 $\left|\lambda E - B\right| = 0$ 可知 B 特征值为 2,2,1.

因为 $3 - r(2E - B) = 2$，∴B 不可相似对角化，显然 C 可相似对角化，∴ $A \sim C$，但 B 不相似于 C.

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 曲线 $y=x\left(1+\arcsin\dfrac{2}{x}\right)$ 的斜渐近线方程为_______

【答案】 $y=x+2$

【解析】

$$\because \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}(1+\arcsin\frac{2}{x})=1,\lim_{x\to\infty}\left(y-x\right)=\lim_{x\to\infty}x\arcsin\frac{2}{x}=2,$$

$\therefore y=x+2$

(10) 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t+e^t\\ y=\sin t\end{cases}$ 确定，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=$______

【答案】 $-\dfrac{1}{8}$

【解析】

$$\frac{dy}{dt}=\cos t,\frac{dx}{dt}=1+e^t\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{\cos t}{1+e^t}$$

$$\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(\dfrac{\cos t}{1+e^t}\right)'}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{-\sin t(1+e^t)-\cos te^t}{\left(1+e^t\right)^2}\Rightarrow\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=-\frac{1}{8}$$

(11) $\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}dx=$_______

【答案】1

【解析】

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}dx&=-\int_0^{+\infty}\ln(1+x)d\frac{1}{1+x}\\&=-\left[\left.\frac{\ln(1+x)}{1+x}\right|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)^2}dx\right]\\&=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)^2}dx=1.\end{aligned}$$

(12) 设函数 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，且 $df(x,y)=ye^ydx+x(1+y)e^ydy$， $f(0,0)=0$，则

$f(x,y)=$_______

【答案】 xye^y

【解析】 $f_x'=ye^y,f_y'=x(1+y)e^y,f(x,y)=\int ye^ydx=xye^y+c(y),$ 故

$$f'_y = xe^y + xye^y + c'(y) = xe^y + xye^y,$$

因此 $c'(y)=0$，即 $c(y)=C$，再由 $f(0,0)=0$，可得 $f(x,y)=xye^y$.

【答案】
【解析】
（13）$\int_0^1 dy\int_y^1 \frac{\tan x}{x}dx =$ ______

【答案】$\ln\cos 1$.
【解析】交换积分次序：
$\int_0^1 dy\int_y^1 \frac{\tan x}{x}dx = \int_0^1 dx\int_0^x \frac{\tan x}{x}dy = \int_0^1 \tan x dx = \ln\cos 1$.

（14）设矩阵 $A=\begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & a \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ 的一个特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，则 $a=$ ______

【答案】-1

【解析】设 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，由题设知 $A\alpha = \lambda\alpha$，故

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & a \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 3+2a \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix}$$

故 $a=-1$.

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x \sqrt{x-t}e^t dt}{\sqrt{x^3}}$

【答案】$\frac{2}{3}$

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sqrt{x-t}e^t}{\sqrt{x^3}}dt$，令 $x-t=u$，则有

$$\int_0^x \sqrt{x-t}e^t dt = -\int_x^0 \sqrt{u}e^{x+u}du = \int_0^x \sqrt{u}e^{x+u}du$$

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sqrt{u}e^{x+u}du}{x^{\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\int_0^x \sqrt{u}e^{u}du}{x^{\frac{3}{2}}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sqrt{u}e^{u}du}{x^{\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}e^x}{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{2}{3}$

（16）（本题满分 10 分）设函数 $f(u,v)$ 具有 2 阶连续偏导数，$y=f(e^x,\cos x)$，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$，$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$

【答案】$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=f_1'(1,1),\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=f_{11}''(1,1),$

【解析】

$$y=f(e^x,\cos x)\overset{x=0}{\Rightarrow}y(0)=f(1,1)$$

$$\Rightarrow\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\left.\left(f_1'e^x+f_2'\left(-\sin x\right)\right)\right|_{x=0}=f_1'(1,1)\cdot 1+f_2'(1,1)\cdot 0=f_1'(1,1)$$

$$\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}=f_{11}''e^{2x}+f_{12}''e^x(-\sin x)+f_{21}''e^x(-\sin x)+f_{22}''\sin^2 x+f_1'e^x-f_2'\cos x$$

$$\Rightarrow\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=f_{11}''(1,1)+f_1'(1,1)-f_2'(1,1)$$

结论：

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=f_1'(1,1)$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=f_{11}''(1,1)+f_1'(1,1)-f_2'(1,1)$$

（17）（本题满分 10 分）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$

【答案】$\dfrac{1}{4}$

【解析】

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln(1+\frac{k}{n})=\int_0^1 x\ln(1+x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+x)dx^2=\frac{1}{2}(\ln(1+x)\cdot x^2\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2-1+1}{1+x}dx)=\frac{1}{4}$$

（18）（本题满分 10 分）已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 确定，求 $y(x)$ 的极值

【答案】极大值为 $y(1)=1$，极小值为 $y(-1)=0$

【解析】

两边求导得：

$3x^2+3y^2y'-3+3y'=0$ （1）

令 $y'=0$ 得 $x=\pm 1$

对（1）式两边关于 x 求导得 $6x+6y\left(y'\right)^2+3y^2y''+3y''=0$ （2）

将 $x=\pm 1$ 代入原题给的等式中，得 $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases} or \begin{cases}x=-1\\y=0\end{cases}$，

将 $x=1,y=1$ 代入（2）得 $y''(1)=-1<0$

将 $x=-1,y=0$ 代入（2）得 $y''(-1)=2>0$

故 $x=1$ 为极大值点，$y(1)=1$；$x=-1$ 为极小值点，$y(-1)=0$

（19）（本题满分 10 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有 2 阶导数，且 $f(1)>0,\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}<0$，证明：

(I) 方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根；

(Π) 方程 $f(x)f'(x)+(f'(x))^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同实根。

【答案】

【解析】

（I） $f(x)$ 二阶导数， $f(1)>0,\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}<0$

解：1）由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}<0$，根据极限的保号性得

$\exists\delta>0,\forall x\in(0,\delta)$ 有 $\frac{f(x)}{x}<0$，即 $f(x)<0$

进而 $\exists x_0\in(0,\delta)有f\left(\delta\right)<0$

又由于 $f(x)$ 二阶可导，所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上必连续

那么 $f(x)$ 在 $[\delta,1]$ 上连续，由 $f(\delta)<0,f(1)>0$ 根据零点定理得：

至少存在一点 $\xi\in(\delta,1)$，使 $f(\xi)=0$，即得证

（II）由（1）可知 $f(0)=0$，$\exists\xi\in(0,1),使f(\xi)=0$，令 $F(x)=f(x)f'(x)$，则 $f(0)=f(\xi)=0$

由罗尔定理$\exists\eta\in(0,\xi)$,使$f'(\eta)=0$，则$F(0)=F(\eta)=F(\xi)=0$，

对$F(x)$在$(0,\eta),(\eta,\xi)$分别使用罗尔定理：

$\exists\eta_1\in(0,\eta),\eta_2\in(\eta,\xi)$且$\eta_1,\eta_2\in(0,1),\eta_1\neq\eta_2$，使得$F'(\eta_1)=F'(\eta_2)=0$，即

$F'(x)=f(x)f''(x)+\left(f'(x)\right)^2=0$在$(0,1)$至少有两个不同实根。

得证。

（20）（本题满分 11 分）已知平面区域$D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq 2y\right\}$,计算二重积分$\iint\limits_D\left(x+1\right)^2dxdy$。

【答案】$\dfrac{5\pi}{4}$

【解析】$\iint\limits_D\left(x+1\right)^2dxdy=\iint\limits_D\left(x^2+1\right)dxdy=2\iint\limits_D x^2dxdy+\iint\limits_D dxdy=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}r^2\cos^2\theta d\theta+\pi=\dfrac{5\pi}{4}$

（21）（本题满分 11 分）设$y(x)$是区间$\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$内的可导函数，且$y(1)=0$，点$P$是曲线 L: $y=y(x)$上任意一点，L 在点 P 处的切线与 y 轴相交于点$\left(0,Y_p\right)$，法线与 x 轴相交于点$\left(X_p,0\right)$，若$X_p=Y_p$，求 L 上点的坐标$\left(x,y\right)$满足的方程。

【答案】

【解析】设$p\left(x,y(x)\right)$的切线为$Y-y(x)=y'(x)\left(X-x\right)$，令$X=0$得$Y_p=y(x)-y'(x)x$，法线$Y-y(x)=-\dfrac{1}{y'(x)}\left(X-x\right)$,令$Y=0$得$X_p=x+y(x)y'(x)$。由$X_p=Y_p$得$y-xy'(x)=x+yy'(x)$，即$\left(\dfrac{y}{x}+1\right)y'(x)=\dfrac{y}{x}-1$。令$\dfrac{y}{x}=u$，则$y=ux$，按照齐次微分方程的解法不难解出$\dfrac{1}{x}\ln(u^2+1)+\arctan u=-\ln|x|+C$,

（22）（本题满分 11 分）设 3 阶矩阵$A=\left(\alpha_1,\ \ \alpha_2,\ \ \alpha_3\right)$有 3 个不同的特征值，且$\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$。

(I) 证明：$r(A)=2$

(Π) 若$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，求方程组$Ax=\beta$的通解。

【答案】（I）略；（II）通解为$k\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},k\in R$

【解析】

（I）证明：由$\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$可得$\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=0$，即$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，

因此，$|A|=|\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3|=0$，即 A 的特征值必有 0。

又因为 A 有三个不同的特征值，则三个特征值中只有 1 个 0，另外两个非 0.

且由于 A 必可相似对角化，则可设其对角矩阵为$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & 0\end{pmatrix},\lambda_1\neq\lambda_2\neq 0$

$\therefore r(A)=r(\Lambda)=2$

（II）由（1）$r(A)=2$，知$3-r(A)=1$，即$Ax=0$的基础解系只有 1 个解向量，

由$\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=0$可得$\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=0$，则$Ax=0$的基础解系为$\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$，

又$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，即$\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\beta$，则$Ax=\beta$的一个特解为$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，

综上，$Ax=\beta$的通解为$k\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},k\in R$

（23）（本题满分 11 分）设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$在正交变换$X=QY$下的标准型$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$，求$a$的值及一个正交矩阵$Q$.

【答案】$a=2;Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},f\ \underset{=\!=\!=}{x=Qy}\ -3y_1^2+6y_2^2$

【解析】

$f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$，其中 $A=\begin{pmatrix}2&1&-4\\1&-1&1\\-4&1&a\end{pmatrix}$

由于 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$ 经正交变换后，得到的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$，

故 $r(A)=2\Rightarrow|A|=0\Rightarrow\begin{vmatrix}2&1&-4\\1&-1&1\\-4&1&a\end{vmatrix}=0\Rightarrow a=2$，

将 $a=2$ 代入，满足 $r(A)=2$，因此 $a=2$ 符合题意，此时 $A=\begin{pmatrix}2&1&-4\\1&-1&1\\-4&1&2\end{pmatrix}$，则

$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&4\\-1&\lambda+1&-1\\4&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=0\Rightarrow\lambda_1=-3,\lambda_2=0,\lambda_3=6$，

由 $(-3E-A)x=0$，可得 A 的属于特征值-3 的特征向量为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$；

由 $(6E-A)x=0$，可得 A 的属于特征值 6 的特征向量为 $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

由 $(0E-A)x=0$，可得 A 的属于特征值 0 的特征向量为 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-3&&\\&6&\\&&0\end{pmatrix}$，由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 彼此正交，故只需单位化即可：

$\beta_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T,\beta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T,\beta_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$,，

则 $Q=(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，$Q^TAQ=\begin{pmatrix}-3&&\\&6&\\&&0\end{pmatrix}$

$$f(x_1, x_2, x_3) \xlongequal{x=Qy} -3y_1^2 + 6y_2^2$$