2018年考研数学二试题与答案解析（完整版）

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1.若$\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+ax^2+bx\right)^{\frac{1}{x^2}}=1$，则

A. $a=\dfrac{1}{2},b=-1$ B. $a=-\dfrac{1}{2},b=-1$

C. $a=\dfrac{1}{2},b=1$ D. $a=-\dfrac{1}{2},b=1$

【答案】B

【解析】

$$1=\lim_{x\to 0}\left(e^x+ax^2+bx\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(e^x+ax^2+bx\right)}{x^2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+2ax+b}{2x\left(e^x+ax^2+bx\right)}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+2ax+b}{2x}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x+2ax+b}{2x}=0\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+2ax+b\right)=0\\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+2ax+b}{2x}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-1\\ a=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

2.下列函数中，在$x=0$处不可导的是

A. $f(x)=|x|\sin(x)$ B. $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$

C. $f(x)=\cos|x|$ D. $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$

【答案】D

【解析】

A 正确

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|\sin(x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x\cdot\sin(x)}{x}=0$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|\sin(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\cdot\sin(x)}{x}=0$$

B 正确

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{|x|\sin\sqrt{|x|}}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x\cdot\sin\sqrt{-x}}{x}=0$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{|x|\sin\sqrt{|x|}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x\cdot\sin\sqrt{x}}{x}=0$$

C 正确

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{\cos|x|\text{-}1}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x}=0$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos|x|\text{-}1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x}=0$$

D 不正确 $$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{\cos\sqrt{|x|}\text{-}1}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-\frac{1}{2}(\text{-}x)}{x}=\frac{1}{2}$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos\sqrt{|x|}\text{-}1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{2}x}{x}=\text{-}\frac{1}{2}$$

$$f'_+(0)\neq f'_-(0)$$

3.设函数 $f(x)=\begin{cases}\text{-}1, & x<0\\ 1, & x\geq 0\end{cases}, g(x)=\begin{cases}2-ax, x\leq -1\\ x, \quad -1<x<0\\ x-b, x\geq 0\end{cases}$, 若 $f(x)+g(x)$ 在 R 上连续，则

A. $a=3,b=1$　　　　　B. $a=3,b=2$

C. $a=-3,b=1$　　　　D. $a=-3,b=2$

【答案】B

【解析】

$$\lim_{x\to0^-}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim_{x\to0^-}f(x)+\lim_{x\to0^-}g(x)=\text{-}1+0=\text{-}1$$

$$\lim_{x\to0^+}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim_{x\to0^+}f(x)+\lim_{x\to0^+}g(x)=1-b$$

$$\Rightarrow \text{-}1=1-b\Rightarrow b=2$$

$$\lim_{x\to-1^-}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim_{x\to-1^-}f(x)+\lim_{x\to-1^-}g(x)=\text{-}1+2+a=1+a$$

$$\lim_{x\to-1^+}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim_{x\to-1^+}f(x)+\lim_{x\to-1^+}g(x)=\text{-}1-1=\text{-}2$$

$$\Rightarrow \text{-}2=1+a\Rightarrow a=3$$

4. .设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $\int_0^1 f(x)dx=0,$ 则

A.当 $f'(x)<0$ 时， $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

B. 当 $f''(x)<0$ 时， $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

C. 当 $f'(x)>0$ 时， $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

D. 当 $f''(x)>0$ 时， $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

【答案】D

【解析】

A 错误

$$f(x)=-x+\frac{1}{2},\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(-x+\frac{1}{2}\right)dx=0$$

$$f'(x)=-1<0,f\left(\frac{1}{2}\right)=0$$

B 错误

$$f(x)=-x^2+\frac{1}{3},\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(-x^2+\frac{1}{3}\right)dx=0$$

$$f''(x)=-2<0,f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{1}{12}>0$$

C 错误

$$f(x)=x-\frac{1}{2},\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)dx=0$$

$$f'(x)=1>0,f\left(\frac{1}{2}\right)=0$$

D 正确

$$f(x)=x^2-\frac{1}{3},\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(x^2-\frac{1}{3}\right)dx=0$$

$$f''(x)=2>0,f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{12}<0$$

5.设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx,N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}dx,K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\sqrt{\cos x}\right)dx$,则

A. $M>N>K$

B. $M>K>N$

C. $K>M>N$

D. $K>N>M$

【答案】C

【解析】

$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\frac{2x}{1+x^2})dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1dx$

$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$时，$1+\sqrt{\cos x}\geq 1$，所以$K>M$

令$f(x)=1+x-e^x, f(0)=0, f'(x)=1-e^x$

当$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$f'(x)<0$；当$x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$时，$f'(x)>0$

所以$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$时，有$f(x)\leq 0$，从可有$\frac{1+x}{e^x}\leq 1$，由比较定理得N<M, 故选C

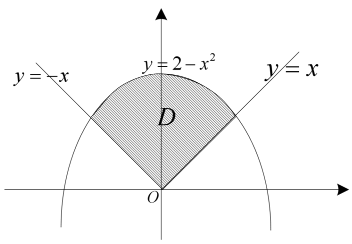
6. $\int_{-1}^{0}dx\int_{x}^{2-x^2}(1-xy)dy+\int_{0}^{1}dx\int_{x}^{2-x^2}(1-xy)dy=$

A. $\frac{5}{3}$　　B. $\frac{5}{6}$

C. $\frac{7}{3}$　　D. $\frac{7}{6}$

【答案】C

【解析】如图，$\int_{-1}^{0}dx\int_{-x}^{2-x^2}(1-xy)dy+\int_{0}^{1}dx\int_{x}^{2-x^2}(1-xy)dy=\iint_D(1-xy)dxdy=\iint_D dxdy=S_D=\frac{7}{3}$.



7.下列矩阵中，与矩阵$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$相似的为

A. $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

【答案】A

【解析】令 $P=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$P^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$$P^{-1}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}P=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

所以 $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ 相似

故选（A）

8.设 A,B 为 n 阶矩阵，记 $r(X)$ 为矩阵 X 的秩，(X,Y) 表示分块矩阵，则

A. $r(A\quad AB)=r(A)$.　　　　B. $r(A\quad BA)=r(A)$.

C. $r(A\quad B)=\max\{r(A), r(B)\}$.　　　　D. $r(A\quad B)=r(A^T\quad B^T)$.

【答案】（A）

【解析】$r(E,B)=n\Rightarrow r(A,AB)=r[A(E,B)]=r(A)$

故选（A）

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

9. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2[\arctan(x+1)-\arctan x]=$____________.

【答案】1

【解析】令 $t=\dfrac{1}{x}$，则

$$原式=\lim_{t\to0^+}\frac{\arctan(1+\frac{1}{t})-\arctan\frac{1}{t}}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{1+(1+\frac{1}{t})^2}(-\frac{1}{t^2})-\frac{1}{1+(\frac{1}{t})^2}(-\frac{1}{t^2})}{2t}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{t^2+(1+t)^2}}{2t}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+(1+\frac{1}{t})^2}(-\frac{1}{t^2})-\frac{1}{1+(\frac{1}{t})^2}(-\frac{1}{t^2})}{2t(1+t^2)[t^2(1+t)^2]}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{2t+t^2}{2t}$$

$$=1$$

10. 曲线 $y=x^2+2\ln x$ 在其拐点处的切线方程是________________.

【答案】$y=4x-3$

【解析】$y'=x+\frac{2}{x}$，$y''=2-\frac{2}{x^2}$，令 $y''=0$，则 $x_0=\pm 1$，由于 $x>0$，故 $x_0=1$

$y'(x_0)=4$，则过拐点 $(1,1)$ 的切线方程为 $y-1=4(x-1)$ 即 $y=4x-3$.

11. $\int_5^{+\infty}\frac{1}{x^2-4x+3}dx=$______________________.

【答案】$\frac{1}{2}\ln 2$

【解析】$\int_5^{+\infty}\frac{1}{x^2-4x+3}dx=\int_5^{+\infty}\frac{1}{(x-3)(x-1)}dx$

$$=\int_5^{+\infty}\frac{1}{2}(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1})dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{x-3}{x-1}\Big|_5^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{x-3}{x-1}-\ln\frac{5-3}{5-1}$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2$$

12. 曲线 $\begin{cases}x=\cos^3 t,\\ y=\sin^3 t\end{cases}$ 在 $t=\frac{\pi}{4}$ 对应点处的曲率为_____________.

【答案】$\frac{2}{3}$

【解析】$y'=\frac{-\sin^2 t\cos t}{3\cos^2 t(-\sin t)}=-\tan t$，$y'|_{t=\frac{\pi}{4}}=-1$，

$$y''\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{-\sec^2 t}{-3\cos^2 t\sin t}=\frac{1}{3\cos^4 t\sin t},\quad y''\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{3(\frac{\sqrt{2}}{2})^5}=\frac{4\sqrt{2}}{3},$$

$$k=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{4\sqrt{2}}{3}}{(1+1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{3}.$$

13.设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\ln z+e^{z-1}=xy$ 确定，则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,\frac{1}{2})}=$____________.

【答案】$\frac{1}{4}$

【解析】根据题意，得 $z(2,\frac{1}{2})=1$，对方程两边同时对 x 偏导数并讲点代入，得 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,\frac{1}{2})}=\frac{1}{4}$.

14.设 A 为 3 阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为线性无关的向量组. 若 $A\alpha_1=2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，

$A\alpha_2=\alpha_2+2\alpha_3$，$A\alpha_3=-\alpha_2+\alpha_3$，则 A 的实特征值为______________.

【答案】2

【解析】

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本题满分 10 分）

求不定积分 $\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx$ 的值

【答案】$\frac{1}{2}(e^{2x}arc\tan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{3}(e^x-1)^{\frac{3}{2}}+\sqrt{e^x-1})+C$

【解析】

原式 $=\frac{1}{2}\int\arctan\sqrt{e^x-1}de^{2x}$

$=\frac{1}{2}(e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\int e^{2x}\frac{1}{1+e^x-1}\cdot\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}dx)$

$=\frac{1}{2}(e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\int\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}dx)$

$\int\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}dx$,令 $\sqrt{e^x-1}=t,e^x=t^2+1,x=\ln(t^2+1)$

原式

$=\int \frac{(t^2+1)^2}{2t}\cdot\frac{2t}{t^2+1}dt$

$=\int (t^2+1)dt$

$=\frac{1}{3}t^3+t+C$

$=\frac{1}{3}(e^x-1)^{\frac{3}{2}}+\sqrt{e^x-1}+C$

故原式$=\frac{1}{2}(e^{2x}arc\tan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{3}(e^x-1)^{\frac{3}{2}}+\sqrt{e^x-1})+C$

16.（本题满分 10 分）

已知连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(x-t)dt=ax^2$.

（I）求 $f(x)$ ；（II）若 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的平均值为 1，求 a 的值。

【答案】（I） $f(x)=e^{-x}(2ae^x-2a)$ ；（II） $a=\frac{e}{2}$

【解析】（I）

$\int_0^x tf(x-t)dt \underline{\underline{令x-t=u}}\ x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du$

则有$\int_0^x f(t)dt+x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du=ax^2$，两边同时对$x$ 求导，则有

$f(x)+\int_0^x f(u)du=2ax,$

$f'(x)+f(x)=2a,$ 故$f(x)=e^{-x}(2ae^x+C)$, 由于当$x=0$时，$f(0)=0$，

则$C=-2a$, 综上$f(x)=e^{-x}(2ae^x-2a)$.

（II）由于 $\int_0^1 f(x)dx=1$ ，则 $\int_0^1 e^{-x}(2ae^x-2a)dx=1\Rightarrow 2a+2a(e^{-1}-1)=1\Rightarrow a=\frac{e}{2}.$

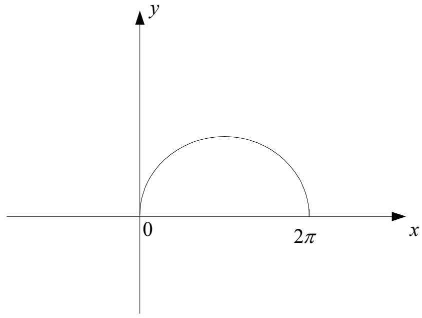
17.（本题满分 10 分）

设平面区域 D 由曲线$\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}(0\le t\le 2\pi)$与 x 轴围成，计算二重积分$\iint\limits_D(x+2y)dxdy$.

【答案】 $\frac{5\pi}{2}$

【解析】

$$\iint_D (x+2y)dxdy$$
$$=\int_0^{2\pi} dx\int_0^{\varphi(x)}(x+2y)dy$$
$$=\int_0^{2\pi}[(xy+y^2)\Big|_0^{\varphi(x)}]dx$$
$$=\int_0^{2\pi}[x\varphi(x)+(\varphi(x))^2]dx$$



令 $x=t\sin t$

$$=\int_0^{2\pi}(t-\sin t)(1-cost)+(1-\cos t)^3dt$$
$$=\int_0^{2\pi}(t-\sin t)d(t-\sin t)+\int_0^{2\pi}8\sin^6\frac{t}{2}dt$$
$$=0+\frac{5\pi}{2}$$
$$=\frac{5\pi}{2}$$

18. （本题满分 10 分）

已知常数 $k\ge \ln 2-1$，证明：$(x-1)(x-\ln^2 x+2k\ln x-1)\ge 0$

【解析】

当 $0<x<1$ 时，$x-1<0$.只需证明 $x-\ln^2 x+2k\ln x-1\le 0$ 即可.

设 $f\left(x\right)=x-\ln^2 x+2k\ln x-1,$ 则

$$f'\left(x\right)=1-\frac{2\ln x}{x}+\frac{2k}{x}=\frac{x-2\ln x+2k}{x}$$

设 $g\left(x\right)=x-2\ln x+2k$ ，则

$$g'\left(x\right)=1-\frac{2}{x}=\frac{x-2}{x}<0.$$

故 $g\left(x\right)\ge g\left(1\right)=1+2k\ge 1+2\ln 2-2=2\ln 2-1=\ln\frac{4}{e}\ge 0$

$f'\left(x\right)\ge 0$，故 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 内单增，故 $f\left(x\right)\le f\left(1\right)=0$.

当 $x\ge 1$ 时，$x-1\ge 0$.只需证明 $x-\ln^2 x+2k\ln x-1\ge 0$ 即可.

设 $f\left(x\right)=x-\ln^2 x+2k\ln x-1,\ g\left(x\right)=x-2\ln x+2k$

$$f'\left(x\right)=1-\frac{2\ln x}{x}+\frac{2k}{x}=\frac{x-2\ln x+2k}{x}$$

$$g'\left(x\right)=1-\frac{2}{x}=\frac{x-2}{x}<0.$$

故 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 单减，$g(x) \ge g(+\infty) \ge 0$

所以 $f'(x) \ge 0$，故 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内单增，故 $f(x) \ge f(1) = 0$.

综上得证.

19. （本题满分 10 分）

将长为 2m 的铁丝分成三段，依次围城圆、正方形与正三角形，三个图形的面积之和是否存在最小值？若存在，求出最小值。

【解析】假设圆的半径为 x，正方形边长为 y，正三角形边长为 z，则有

$$2\pi x + 4y + 3z = 2, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$$

令 $f(x,y,z)=\pi x^2 + y^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}z^2 + \lambda(2\pi x + 4y + 3z - 2)$

$$f(x,y,z)=\pi x^2 + y^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}z^2 + \lambda(2\pi x + 4y + 3z - 2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2\pi x + 2\pi\lambda = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 4\lambda = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\sqrt{3}}{2}z + 3\lambda = 0 \\ 2\pi x + 4y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

求解上述方程得到，驻点为 $\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}(1,2,2\sqrt{3})$

最小面积为，$S_{\min}=\pi\left(\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{2}{\pi+4+3\sqrt{3}}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2\sqrt{3}}{\pi+4+3\sqrt{3}}\right)^2=\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}$。

20. （本题满分 11 分）

已知曲线 L：$y=\frac{4}{9}x^2(x \ge 0)$，点 $O(0,0)$，点 $A(0,1)$，设 P 是 L 上的动点，S 是直线 OA 与直线 AP 及曲线 L 所围成图形的面积，若 P 运动到点 $(3,4)$ 时沿 x 轴正向的速度是 4，求此时 S 关于时间 t 的变化率。

【答案】

【解析】$S(x)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{4}{9}x^2\right)x-\int_0^x \frac{4}{9}x^2 dx=\frac{x}{2}+\frac{2x^3}{27}$

$S'(x)=\dfrac{x'(t)}{2}+\dfrac{6x^2x'(t)}{27}$

将 $x=3,x'(t)=4,$ 代入有 $S'=\dfrac{4}{2}+\dfrac{6\cdot 3^2\cdot 4}{27}=10$

21. （本题满分 11 分）

设数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1>0$，$x_ne^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1(n=1,2,\ldots)$，证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

【答案】0

【解析】

(1)由 $x_ne^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1$ 有 $e^{x_{n+1}}=\dfrac{e^{x_n}-1}{x_n}\Rightarrow x_{n+1}=\ln\dfrac{e^{x_n}-1}{x_n}$

则 $x_2=\ln\dfrac{e^{x_1}-1}{x_1}$

设 $f(x)=e^x-1-x$

$\because f'(x)=e^x-1>0(x>0)$,且 $f(0)=0$

$\therefore f(x)$ 单调递增,故 $f(x)>0$ 而 $e^x-1>x(x>0)$

因此 $\dfrac{e^{x_1}-1}{x_1}$ 在 x_1 时大于 1,而 $x_2=\ln\dfrac{e^{x_1}-1}{x_1}>0$,

用数学归纳法可证之. 对 $\forall n,x_n>0$

$x_{n+1}-x_n=\ln\dfrac{e^{x_n}-1}{x_n}-x_n=\ln\dfrac{e^{x_n}-1}{x_n}-\ln e^{x_n}=\ln\dfrac{e^{x_n}-1}{x_ne^{x_n}}$

设 $g(x)=e^x-1-xe^x$

$\because g'(x)=-xe^x$

显然当 $x>0$ 时，$g'(x)<0,$ 则 $g(x)$ 单调递减，又 $\because g(0)=0$

$\therefore g(x)<g(0)=0,\therefore e^x-1<xe^x\Rightarrow\dfrac{e^x-1}{xe^x}<1$

$\therefore x_{n+1}-x_n=\ln\dfrac{e^{x_n}-1}{x_n e^{x_n}}<0, n=1,2,3,\cdots$

故$\{x_n\}$单调递减

综上可知$\{x_n\}$单调递减且存在下界，$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在.

（2）设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，故$ae^n=e^a-1$，因此$a=0$.

22. （本题满分 11 分）

设实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$，其中$a$是参数。

（1） 求$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解

（2） 求$f(x_1,x_2,x_3)$的规范形

【解析】

（1）

$\because f(x_1,x_2,x_3)=0$

$$\therefore \begin{cases} x_1-x_2+x_3=0 \\ x_2+x_3=0 \\ x_1+ax_3=0 \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{bmatrix}$$

①当$a-2=0$，即$a=2$时，$r(A)=2<3, A\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$f(x_1,x_2,x_3)=0$有非零解

通解为$x=k\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, k\in R$

②当$a-2\neq 0$，即$a\neq 2$时，$r(A)=3, f(x_1,x_2,x_3)=0$只有 0 解

即$x_1=x_2=x_3=0$

(2)当 $a\neq 2$ 时

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & a\end{bmatrix},|A|\neq 0$$

$\therefore$ 令 $y=Ax$ 为非退化的线性变换

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=y_1^2+y_2^2+y_3^2$$

当 $a=2$ 时

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2x_1^2+2x_2^2+6x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3$$

$$=2\left(x_1-\frac{x_2+3x_3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\left(x_2-x_3\right)^2$$

令:

$$\begin{cases}y_1=x_1-\dfrac{x_2+3x_3}{2}\\ y_2=x_2-x_3\\ y_3=x_3\end{cases}$$

$\therefore$ 二次型的标准型为 $2y_1^2+\dfrac{3}{2}y_2^2$

$\therefore$ 二次型的规范型为 $z_1^2+z_2^2$

23. （本题满分 11 分）

已知 a 是常数，且矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & a\\ 1 & 3 & 0\\ 2 & 7 & -a\end{pmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $B=\begin{pmatrix}1 & a & 2\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

（1） 求 a

（2） 求满足 $AP=B$ 的可逆矩阵 P

【答案】

（1）$a=2$

（2）$P=\begin{bmatrix}-6k_1+3 & -6k_2+4 & -6k_3+4\\ 2k_1-1 & 2k_2-1 & 2k_3-1\\ k_1 & k_2 & k_3\end{bmatrix}$

【解析】

（1）

$\because$ 矩阵 A 经过初等列变换得到矩阵 B

$\therefore$ 矩阵 A,B 等价

$\therefore r(A)=r(B)$

$$A=\begin{bmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&a\\1&3&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&a&2\\0&1&1\\0&0&2-a\end{bmatrix}$$

$\therefore 2-a=0,a=2$

（2）

$$(A,B)=\begin{bmatrix}1&2&a&1&a&2\\1&3&0&0&1&1\\2&7&-a&-1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&6&3&4&4\\0&1&-2&-1&-1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}-6k_1+3\\2k_1-1\\k_1\end{bmatrix},Y=\begin{bmatrix}-6k_2+4\\2k_2-1\\k_2\end{bmatrix},Z=\begin{bmatrix}-6k_3+4\\2k_3-1\\k_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-6k_1+3&-6k_2+4&-6k_3+4\\2k_1-1&2k_2-1&2k_3-1\\k_1&k_2&k_3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&k_3-k_2\end{bmatrix}$$

$\because P$ 可逆，$\therefore k_2\neq k_3$

$$\therefore P=\begin{bmatrix}-6k_1+3&-6k_2+4&-6k_3+4\\2k_1-1&2k_2-1&2k_3-1\\k_1&k_2&k_3\end{bmatrix},\quad k_2\neq k_3,k_1,k_2,k_3\in R$$