

西南交通大学 2022—2023 学年第(1)学期半期考试试卷

课程代码 MATH000112 课程名称 线性代数 B 考试时间 90 分钟

题号	一	二	三	四	总成绩
得分					

注意：本试卷共四大题，14 小题。

一、选择题（每小题 5 分，共计 20 分）

1. 下列命题中，正确的是（ ）。

- (A) 设 A, B 均为 n 阶方阵，则 $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ ；
 (B) 设 A, B 均为 $n(n > 1)$ 阶方阵，则 $A^2 - A = A(A - 1)$ ；
 (C) 设 A 为 n 阶非零方阵， X 为 $n \times s$ 矩阵， $AX = O$ ，则 $X = O$ ；
 (D) 设 A, B 均为 n 阶方阵，则 $(AB)^T = B^T A^T$ 。

2. 设 A 为三阶方阵，将 A 的第二行加到第一行的 B ，再将 B 的第一列的 (-1)

倍加到第二列得 C ，记 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ，则（ ）。

- (A) $C = P^{-1}AP$ ； (B) $C = P^T AP$ ；
 (C) $C = PAP^{-1}$ ； (D) $C = PAP^T$ 。

3. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ，则 $A^{-1} =$ （ ）。

- (A) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ ； (B) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ；

$$(C) \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (D) \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$4. n \text{ 阶行列式 } \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ n & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (\quad).$$

$$(A) (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n!; \quad (B) (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} n!; \quad (C) -n!; \quad (D) n!.$$

二、填空题 (每小题 5 分, 共计 20 分)

$$5. \text{ 设 } A \text{ 为 } 4 \text{ 阶方阵}, |A| = \frac{1}{3}, \text{ 则 } |(3A)^{-1} - 2A^*| = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$6. \text{ 设方阵 } A \text{ 满足 } A^2 + 2A - 4E = O, \text{ 则 } (A + 3E)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$7. \text{ 设 } f(x) = \begin{vmatrix} 2x+1 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & x & 4 & 5 \\ 1 & -1 & x & x \\ 2 & 3 & x-1 & 2 \end{vmatrix}, \text{ 则 } f(x) \text{ 中 } x^4 \text{ 的系数为 } \underline{\hspace{2cm}};$$

$$8. \text{ 设 } n \text{ 阶方阵 } A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & \lambda \end{pmatrix}, \text{ 且 } A \text{ 的秩 } R(A) = n-1, \text{ 则 } \lambda = \underline{\hspace{2cm}}.$$

三、计算题 (每小题 10 分, 共计 50 分)

$$9. \text{ 已知矩阵 } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 计算:}$$

$$(1) A-2B; (2) A^T B; (3) AB^T; (4) (BA^T B)^T.$$

$$10. \text{ 设矩阵 } A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

(1) 先用初等行变换将 A 化为行最简形矩阵, 再用初等列变换将行最简形化为标

准形；

(2) 给出 A 的秩和 A 的一个最高阶非零子式。

11. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 若矩阵 X 满足 $AX + B^* = B^*A + X$, 其中 B^* 为 B 的伴随矩阵, 求 X 。

12. 设 $AP = P\Lambda$, 其中 $P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $E + A - A^2 - A^5 + A^8$ 。

13. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, M_{ij} 是 a_{ij} 的余子式, 计算:

(1) $|A|$; (2) $M_{11} - M_{12} + M_{13} - M_{14}$ 。

四、计算证明题 (10 分)

14. 设 P 是 $m \times n$ 矩阵, PP^T 可逆, 且 $A = E - 2P^T(PP^T)^{-1}P$, 其中 E 是 n 阶单位矩阵, 证明: (1) A 是对称阵; (2) $AA^T = E$ 。