

西南交通大学 2022—2023 学年第(1)学期半期考试试卷

课程代码 MATH000112 课程名称 线性代数 B 考试时间 100 分钟

题号	一	二	三	四	总成绩
得分					

注意：本试卷共四大题，14 小题。

一、选择题（每小题 5 分，共计 20 分）

DCDA

二、填空题（每小题 5 分，共计 20 分）

5. $1/27$;

6. $A - E$;

7. -2 ;

8. $n - 1$.

三、计算题（每小题 10 分，共计 50 分）

9. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 计算:

(1) $A - 2B$; (2) $A^T B$; (3) AB^T ; (4) $(BA^T B)^T$.

解: (1) $A - 2B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$;

(2) $A^T B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(3) $AB^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; (4) $(BA^T B)^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

10. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, 先用初等行变换将 A 化为行最简形矩阵, 再用初

等列变换将行最简形化为标准形。

$$\text{解: (1) 行最简形: } A \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5/8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3/8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -9/16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = B;$$

$$\text{标准形: } B \xrightarrow{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) $R(A)=4$, 一个最高阶非零子式为 A 的任意四列构成的一个四阶子式。

(注: 最高阶非零子式不唯一)

11. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 若矩阵 X 满足 $AX + B^* = B^*A + X$, 其中 B^* 为 B 的

伴随矩阵, 求 X 。

解: 由 $AX + B^* = B^*A + X$, 得

$$(A - E)X = B^*(A - E)$$

$$\text{而 } |A - E| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \text{ 故方阵 } A - E \text{ 可逆, 计算可得}$$

$$(A - E)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

于是

$$X = (A - E)^{-1} B^* (A - E)$$

由 $BB^* = |B|E = -E$ 知, $B^* = -B^{-1} = -B$, 于是

$$X = (A - E)^{-1} (-B) (A - E),$$

$$\text{所以 } X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

12. 设 $AP = P\Lambda$, 其中 $P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $E + A - A^2 - A^5 + A^8$.

解：由 $|P| = 54$ 知 P 可逆，于是

$$A = P\Lambda P^{-1}, A^2 = P\Lambda^2 P^{-1}, A^5 = P\Lambda^5 P^{-1}, A^8 = P\Lambda^8 P^{-1},$$

所以

$$E + A - A^2 - A^5 + A^8 = P(E + \Lambda - \Lambda^2 - \Lambda^5 + \Lambda^8)P^{-1} = PEP^{-1} = E.$$

13. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, M_{ij} 是 a_{ij} 的余子式，计算：(1) $|A|$; (2) $M_{11} - M_{12} + M_{13} - M_{14}$.

解：

$$(1) |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 36$$

$$(2) M_{11} - M_{12} + M_{13} - M_{14} = A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 18.$$

四、计算证明题 (每小题 10 分)

14. 设 P 是 $m \times n$ 矩阵, $m < n$, PP^T 可逆, 且 $A = E - 2P^T(PP^T)^{-1}P$, 其中 E 是 n 阶单位矩阵, 证明: (1) A 是对称阵; (2) $AA^T = E$.

证明 : (1)

$$\begin{aligned} A^T &= (E - 2P^T(PP^T)^{-1}P)^T = E - 2P^T[(PP^T)^{-1}]^T(P^T)^T \\ &= E - 2P^T[(PP^T)^T]^{-1}P = E - 2P^T(PP^T)^{-1}P = A \end{aligned}$$

所以 A 是对称阵.

(2)

$$\begin{aligned} AA^T &= AA = [E - 2P^T(PP^T)^{-1}P][E - 2P^T(PP^T)^{-1}P] \\ &= E - 2P^T(PP^T)^{-1}P - 2P^T(PP^T)^{-1}P[E - 2P^T(PP^T)^{-1}P] \\ &= E - 4P^T(PP^T)^{-1}P + 4[P^T(PP^T)^{-1}P][P^T(PP^T)^{-1}P] \\ &= E - 4P^T(PP^T)^{-1}P + 4P^T(PP^T)^{-1}(PP^T)(PP^T)^{-1}P \\ &= E - 4P^T(PP^T)^{-1}P + 4P^T(PP^T)^{-1}P = E. \end{aligned}$$