

西南交通大学 2022—2023 学年第(1)学期半期考试试卷

课程代码 MATH000112 课程名称 线性代数 B 考试时间 100 分钟

题号	一	二	三	四	总成绩
得分					

注意：本试卷共四大题，14 小题。

一、选择题（每小题 5 分，共计 25 分）

BDABC

二、填空题（每小题 5 分，共计 15 分）

6. $n-m$;

7. 0;

8. -16;

三、计算题（共计 54 分）

9. (10 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $3AB - 2A$ 及 $A^T B$.

解: $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix};$

故 $3AB - 2A = 3 \begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 13 & 22 \\ -2 & -17 & 20 \\ 4 & 29 & -2 \end{pmatrix}$

因为 $A^T = A$, 故 $A^T B = AB = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}$

10. (10分) 设有四阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, 计算: $-M_{41} + 4A_{42} + 7M_{43} + 6M_{44}$.

解: $-M_{41} + 4A_{42} + 7M_{43} + 6M_{44} = A_{41} + 4A_{42} - 7A_{43} + 6A_{44}$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 7 & -5 & 13 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= 27$$

11. (10分) 求解非齐次线性方程组 $\begin{cases} 2x + y - z + w = 1, \\ 3x - 2y + z - 3w = 4, \\ x + 4y - 3z + 5w = -2. \end{cases}$

解: 增广矩阵 $\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & -3 & 5 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{r} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & -14 & 10 & -18 & 10 \\ 0 & -7 & 5 & -9 & 5 \end{array} \right)$

$$\xrightarrow{r} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{9}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{6}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{9}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

选取 z, w 为自由未知数, 得到同解方程组 $\begin{cases} x = \frac{1}{7}z + \frac{1}{7}w + \frac{6}{7}, \\ y = \frac{5}{7}z - \frac{9}{7}w - \frac{5}{7}. \end{cases}$

$$\text{即得} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1/7 \\ 5/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1/7 \\ -9/7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6/7 \\ -5/7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, c_1, c_2 \in R.$$

12. (12分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3k \\ -1 & 2k & -3 \\ k & -2 & 3 \end{pmatrix}$, 问 k 为何值时, 可使:

(1) $R(A)=1$; (2) $R(A)=2$; (3) $R(A)=3$.

解: 解法一: $|A| = -6(k-1)^2(k+2)$

故当 $k \neq 1$ 且 $k \neq -2$ 时, $R(A)=3$

当 $k = -2$ 时, $R(A) \leq 2$, 且显然 A 左上角二阶子式不为零, 故 $R(A) \geq 2$

故 $R(A)=2$

$$\text{当 } k=1 \text{ 时, } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故 $R(A)=1$

解法二: 对 A 做初等行变换

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3k \\ -1 & 2k & -3 \\ k & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3k \\ 0 & 2(k-1) & 3(k-1) \\ 0 & 0 & -3(k-1)(k+2) \end{pmatrix}$$

于是当 $k=1$ 时 $R(A)=1$;

当 $k=-2$ 时 $R(A)=2$;

当 $k \neq 1$ 且 $k \neq -2$ 时 $R(A)=3$

13. (12分) 设矩阵 X 满足 $A^*X = A^{-1}B + 2X$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

求矩阵 X .

解：因 $|A|=4$ ，故可逆

由 $AA^*=|A|E=4E$ ，得 $AA^*X=AA^{-1}B+2AX$ ，

即 $4EX=EB+2AX \Rightarrow 2(2E-A)X=B$

因 $2E-A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 可逆，且 $(2E-A)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

用 $(2E-A)^{-1}$ 乘上式，得 $2X=(2E-A)^{-1}B$

$$\Rightarrow X=\frac{1}{2}(2E-A)^{-1}B=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

四、计算证明题（6分）.

14. 设 $A^k=O$ （ k 为正整数），证明 $E-A$ 可逆，且其逆矩阵 $(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$.

证明：因 $(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})=E+A+\cdots+A^{k-1}-A-A^2-\cdots-A^k$
 $=E-O=E$

则 $E-A$ 可逆，且 $(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$.