

# 西南交通大学 2024—2025 学年第(1)学期期末考试试卷

课程代码 MATH000112 课程名称 线性代数 B (A 卷) 考试时间 120 分钟

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 总成绩 |
|----|---|---|---|---|-----|
| 得分 |   |   |   |   |     |

注意：本试卷共四大题，16 小题。

一. 选择题（每小题 4 分，共计 24 分）

1. 设  $A$ 、 $B$  和  $C$  均为  $n$  阶非零方阵，以下等式成立的有（ ）.

- (A) 若  $AB = AC$ ，则  $B = C$
- (B) 若  $AB = BA, AC = CA$ ，则  $ABC = BCA$
- (C) 若  $A$  与  $B$  都可逆，则  $A+B$  可逆
- (D) 若  $A$  与  $B$  等价，则  $|A|=|B|$

2. 设  $A$  是 3 阶方阵，将  $A$  的第 1 行与第 2 行交换得  $B$ ，再把  $B$  的第 2 行加到第 3 行得到矩阵  $C$ ，则满足  $PA = C$  的可逆矩阵  $P$  为（ ）.

- (A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  (B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  (C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  (D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. 设  $n$  ( $n > 3$ ) 阶方阵  $A$  满足  $|A|=0$ ，且方阵  $A$  的伴随阵  $A^* \neq O$ ，则齐次线性方程组  $Ax = 0$  的基础解系中向量的个数为（ ）.

- (A) 1 (B) 2 (C)  $n-1$  (D)  $n$

4. 已知三阶方阵  $A$  的特征值为  $-1, 1, 2$ ，则下列说法错误的是（ ）.

- (A)  $A$  是可逆方阵
- (B)  $A$  与  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  等价

(C) 存在正交阵  $P$ , 使得  $A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^T$

(D) 以  $-1, 1, 2$  为特征值的三阶方阵都与  $A$  相似

5. 已知向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 则 ( ).

(A) 向量组  $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$  线性无关

(B) 向量组  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$  线性相关

(C) 向量组  $\alpha_1 - 2\alpha_2, 2\alpha_2 - 3\alpha_3, 3\alpha_3 - \alpha_1$  线性无关

(D) 向量组  $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$  线性无关

6. 设四元非齐次线性方程组  $Ax = b$  的系数矩阵的秩为 3,  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  是它的三个解,

且  $\eta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \eta_2 + \eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ ,  $k$  是任意常数, 则  $Ax = b$  的通解为  $x = ( )$ .

(A)  $k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$  (B)  $k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  (C)  $k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$  (D)  $k \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

二. 填空题 (每小题 4 分, 共计 16 分)

7. 设方阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ , 则  $A^4 =$ \_\_\_\_\_.

8. 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B$  为三阶非零矩阵, 且  $AB = O$ , 则  $t =$ \_\_\_\_\_.

9. 已知向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关, 而向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$  线性无关, 则向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  的秩为\_\_\_\_\_.

10. 已知 3 阶方阵  $A$  的特征值为 1, 2, 3, 方阵  $B$  与方阵  $A$  相似, 则

$|B^{-1} + B + 2E| =$ \_\_\_\_\_.

三. 解答题 (5 小题, 共计 54 分)

11. (6 分) 计算行列式  $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & -1 \\ 4 & -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ .

12. (12 分) 设向量组  $A: \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ c \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,

(1) 问参数  $c$  取何值时, 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是线性相关的?

(2) 当向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关时, 求向量组  $A: \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$  的一个极大无关组, 并把剩余向量用该极大无关组线性表出.

13. (12 分) 问参数  $\lambda$  取何值时, 线性方程组 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + \lambda x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + \lambda^2 x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = \lambda - 1 \end{cases}$$

(1) 无解; (2) 有无穷多解; (3) 有唯一解, 并在有唯一解时求其解.

14. (12 分) 已知二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$ ,

(1) 写出该二次型的矩阵  $A$ ;

(2) 求一个正交变换  $x = Py$  把该二次型化为标准形, 并写出标准形;

(3) 判断该二次型是否为正定二次型?

15. (12 分) 设  $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$  是正交单位向量组, 且  $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ , 定义矩阵

$$A = \alpha\beta^T + \beta\alpha^T,$$

(1) 验证  $\alpha + \beta, \alpha - \beta$  是方阵  $A$  的特征向量;

(2) 给出方阵  $A$  的所有特征值;

(3) 说明  $A$  可相似对角化, 并给出一个相似变换矩阵  $P$ .

#### 四、证明题

16. (6 分) 已知  $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ ,  $\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3$ ,  $\beta_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3$ , 证明  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  与  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  等价.