

西南交通大学 2024—2025 学年第(1)学期期末考试试卷

课程代码 MATH0002 (1) 12 课程名称 线性代数 A, B (A 卷) 考试时间 120 分钟

题号	一	二	三	四	总成绩
得分					

注意：本试卷共四大题，16 小题。

一. 选择题（每小题 4 分，共计 24 分）

BDACDB

二. 填空题（每小题 4 分，共计 16 分）

7. 设方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $A^4 =$ _____.

【答案： $A^4 = \begin{pmatrix} 27 & -27 & 27 \\ -27 & 27 & -27 \\ 27 & -27 & 27 \end{pmatrix}$ 或 $A^4 = 27A$ 或 $A^4 = 3^3 A$ 】

8. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, B 为三阶非零矩阵, 且 $AB = O$, 则 $t =$ -3.

9. 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 而向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 线性无关, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的秩为 2.

10. (线代 A) 已知 3 阶方阵 A 的特征值为 1, 2, 3, 方阵 B 与方阵 A 相似, 则 $|B^2 + B + 2E| =$ 448.

(线代 B) 已知 3 阶方阵 A 的特征值为 1, 2, 3, 方阵 B 与方阵 A 相似, 则 $|B^{-1} + B + 2E| =$ 96.

三. 解答题 (5 小题, 共计 54 分)

11. (6 分) 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & -1 \\ 4 & -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

解: $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & -1 \\ 4 & -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & -7 & 5 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -5 & -1 \\ 1 & 6 & -1 \\ -7 & 5 & -8 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 0 & -13 & 4 \\ 0 & 47 & -15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -13 & 4 \\ 47 & -15 \end{vmatrix} = 7.$$

12. (12 分) 设向量组 $A: \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ c \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$

(1) 问参数 c 取何值时, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性相关的?

(2) 当向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关时, 求向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 的一个极大无关组, 并把剩余向量用该极大无关组线性表出.

12 解:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & c & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & c-2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = B \quad \dots$$

所以, 当 $c=2$ 时, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性相关的。 .

注: 本小题多种方法

(2) 当向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性相关的时,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

此时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 的一个极大线性无关组,

且有 $\alpha_3 = -\alpha_1 - \alpha_2 + 0\alpha_4, \alpha_5 = -\frac{1}{2}\alpha_1 - \alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_4$.

13. (12 分) 问参数 λ 取何值时, 线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + \lambda x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + \lambda^2 x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = \lambda - 1 \end{cases}$$

(1) 无解; (2) 有无穷多解; (3) 有唯一解, 并在有唯一解时求其解.

13 解: 对方程组的增广矩阵 (A, b) 作初等行变换

$$\bar{A} = (A, b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & \lambda & 0 \\ 1 & 4 & \lambda^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \lambda - 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda & \lambda - 1 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda - 2)(\lambda - 1) \end{pmatrix} = B$$

(1) 当 $(\lambda - 2)(\lambda - 1) \neq 0$, 即 $\lambda \neq 2$ 且 $\lambda \neq 1$ 时, $R(A) = 3 < R(\bar{A}) = 4$, 原方程组无解。

(2) 当 $\lambda = 1$ 时, $R(A) = R(\bar{A}) = 2 < n = 3$, 原方程组有无穷多解。

(3) 当 $\lambda = 2$ 时, $R(A) = R(\bar{A}) = n = 3$, 原方程组有唯一解。

此时, 继续对 B 作初等行变换

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

此时, 方程组的唯一解为: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 。

14. (12 分) 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$,

(1) 写出该二次型的矩阵 A ;

(2) 求一个正交变换 $x = Py$ 把该二次型化为标准形, 并写出标准形;

(3) 判断该二次型是否为正定二次型?

14 解: (1) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 3-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)(\lambda-5)^2$

方阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = 5$ 。

对 $\lambda_1 = -1$, 可求得方程组 $(A + E)x = 0$ 的一个基础解系为: $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

单位化得 $p_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

对 $\lambda_2 = \lambda_3 = 5$, 可求得方程组 $(A - 5E)x = 0$ 的一个基础解系为:

$$\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

将 ξ_2, ξ_3 正交化可得

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

单位化可得

$$p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, p_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

作矩阵 $P = (p_1, p_2, p_3)$, 则矩阵 P 为正交阵,

所求正交变换为: $x = Py$; 在此正交变换下的标准形为 $-y_1^2 + 5y_2^2 + 5y_3^2$ 。

注: 1. 在解方程组 $(A - 5E)x = 0$ 时可直接求得正交的基础解系:

$$\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2. 正交阵不唯一。

(3) 因二次型的矩阵 A 的特征值中 $\lambda_1 = -1 < 0$, 所有对称阵 A 不是正定阵, 从而原二次型也不是正定二次型。

15. (12 分) 设 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ 是正交单位向量组, 且 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, 定义矩阵

$$A = \alpha\beta^T + \beta\alpha^T,$$

(1) 验证 $\alpha + \beta, \alpha - \beta$ 是方阵 A 的特征向量;

(2) 给出方阵 A 的所有特征值;

(3) 说明 A 可相似对角化, 并给出一个相似变换矩阵 P .

15 解: (1) 因为 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ 是正交单位向量组,

$$\text{所以 } \alpha^T \beta = \beta^T \alpha = 0, \quad \alpha^T \alpha = \beta^T \beta = 1;$$

又因为

$$A(\alpha + \beta) = (\alpha\beta^T + \beta\alpha^T)(\alpha + \beta) = \alpha\beta^T \alpha + \beta\alpha^T \alpha + \alpha\beta^T \beta + \beta\alpha^T \beta = \alpha + \beta,$$

$$A(\alpha - \beta) = (\alpha\beta^T + \beta\alpha^T)(\alpha - \beta) = \alpha\beta^T \alpha + \beta\alpha^T \alpha - \alpha\beta^T \beta - \beta\alpha^T \beta = -(\alpha - \beta),$$

所以, $\alpha + \beta, \alpha - \beta$ 是方阵 A 的特征向量,

对应的特征值分别为 1, -1。

(2) 由 (1) 可得 1, -1 为 A 的特征值,

由矩阵秩的性质可得

$$R(A) = R(\alpha\beta^T + \beta\alpha^T) \leq R(\alpha\beta^T) + R(\beta\alpha^T) \leq R(\alpha) + R(\beta) \leq 1 + 1 = 2 < 3,$$

所以 $|A| = 0$, 所以方阵 A 必有特征值 0。

因此, 方阵 A 的所有特征值为: 1, -1, 0。

法二：因为 $tr(A) = tr(\alpha\beta^T + \beta\alpha^T) = tr(\alpha\beta^T) + tr(\beta\alpha^T) = \alpha^T\beta + \beta^T\alpha = 0$,

利用 $tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ 可得, A 的第三个特征值为 0,

(3) 由 $A^T = (\alpha\beta^T + \beta\alpha^T)^T = \beta\alpha^T + \alpha\beta^T = A$, 所以 A 可相似对角化。

(或由于 3 阶方阵 A 有三个互不相同的特征值)

...

设特征值 0 对应的特征向量 $p_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, 则与 $\alpha + \beta = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}, \alpha - \beta = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$ 正交, 故

$$\begin{cases} (a_1 + b_1)x_1 + (a_2 + b_2)x_2 + (a_3 + b_3)x_3 = 0 \\ (a_1 - b_1)x_1 + (a_2 - b_2)x_2 + (a_3 - b_3)x_3 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

解之可得方程组的基础解系为: $\xi = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)^T$.

$$\text{取 } P = (\alpha + \beta, \alpha - \beta, \xi), \text{ 则 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

四、证明题

16 (6 分). 已知 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3$, $\beta_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3$, 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 等价。

证明: 法一:

由题意知, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示。

另一方面, 由 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3$, $\beta_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3$ 可以解出

$$\alpha_1 = \beta_1 + \beta_2 - \beta_3, \alpha_2 = \beta_1 - 2\beta_2 + \beta_3, \alpha_3 = -\beta_1 + \beta_2 + 0\beta_3,$$

即 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示。

所以, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 等价。

法二：

由题可得

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

记 $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ，则 $|T| = -1$ ，且

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

所以 T 可逆，从而 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ，

即： $\alpha_1 = \beta_1 + \beta_2 - \beta_3, \alpha_2 = \beta_1 - 2\beta_2 + \beta_3, \alpha_3 = -\beta_1 + \beta_2 + 0\beta_3$

所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 等价.