

2022-2023学年第二学期《高等数学 II》半期考试参考解答

一、选择题

1. C 2. B 3. C 4. A 5. B 6. D

二、填空题

7. $-\frac{\pi}{2}(dx+dy)$ 8. 2 9. $x+y-z=1$ 10. $\frac{1}{2}$ 11. $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y) dx$

三、解答题

12. 解: 方程左右两边对 x 求导:
$$\begin{cases} 2x+2y \cdot y' + 2z \cdot z' = 0 \\ 2x+2y \cdot y' = 2 \end{cases}$$

代入 $(1,1,\sqrt{2})$ 得 $\begin{cases} 1+y'(1)+\sqrt{2}z'(1)=0 \\ 1+y'(1)=1 \end{cases}$, 解得: $\begin{cases} y'(1)=0 \\ z'(1)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

所以切向量 $T=(\sqrt{2},0,-1)$

切线方程: $\frac{x-1}{\sqrt{2}} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-\sqrt{2}}{-1}$

法平面方程: $\sqrt{2}x-z=0$

13. 解:
$$\begin{cases} f_x = e^{ax}(2x-2) \\ f_y = e^{ay}(ax^2-2ax+2ay+2) \end{cases}$$

$(1,1)$ 为驻点, 故 $a-2a+2a+2=0$, 即 $a=-2$

由 $f_{xx}=2e^{-2y}$, $f_{xy}=e^{-2y}(-4x+4)$, $f_{yy}=e^{-2y}(4x^2-8x+8y-8)$

在点 $(1,1)$, $A=2e^{-2}$, $B=0$, $C=-4e^{-2}$,

$AC-B^2 < 0$, 所以点 $(1,1)$ 非极值点.

14. 解: 原点到曲线上点 (x,y,z) 的距离 $d = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

令 $L = x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-12)$

则由拉格朗日乘数法得

$$\begin{cases} L_x = 2x+2\lambda x+\mu=0 \\ L_y = 2y+2\lambda y+\mu=0 \\ L_z = 2z-\lambda+\mu=0 \\ x^2+y^2-z=0 \\ x+y+z-12=0 \end{cases}$$

解方程组得 $x=y=2$, 此时 $z=8$, $d = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 6\sqrt{2}$

及 $x=y=-3$, 此时 $z=18$, $d = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 3\sqrt{38}$

所以最长距离为 $3\sqrt{38}$, 最短距离为 $6\sqrt{2}$.

15. 解: 由对称性 $I = \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy$

设 $D_1 = \{(x,y) | x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$

则 $I = 2 \iint_{D_1} \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{\rho}{1+\rho^2} d\rho$$

$$= 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \ln(1+\rho^2) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} \ln 2$$

16. 解: $I = \iiint_{\Omega} (x^2+y^2) dv$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R r^4 \sin^3 \varphi dr$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi d\varphi \int_0^R r^4 dr$$

$$= 2\pi \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} R^5 = \frac{4}{15} \pi R^5$$

2022-2023学年第二学期《高等数学 II》半期考试参考解答

一、选择题

1. C 2. B 3. C 4. A 5. B 6. D

二、填空题

7. $-\frac{\pi}{2}(dx+dy)$ 8. 2 9. $x+y-z=1$ 10. $\frac{1}{2}$ 11. $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y) dx$

三、解答题

12. 解: 方程左右两边对 x 求导:
$$\begin{cases} 2x+2y \cdot y' + 2z \cdot z' = 0 \\ 2x+2y \cdot y' = 2 \end{cases}$$

代入 $(1,1,\sqrt{2})$ 得 $\begin{cases} 1+y'(1)+\sqrt{2}z'(1)=0 \\ 1+y'(1)=1 \end{cases}$, 解得: $\begin{cases} y'(1)=0 \\ z'(1)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

所以切向量 $T=(\sqrt{2},0,-1)$

切线方程: $\frac{x-1}{\sqrt{2}} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-\sqrt{2}}{-1}$

法平面方程: $\sqrt{2}x-z=0$

13. 解:
$$\begin{cases} f_x = e^{ax}(2x-2) \\ f_y = e^{ay}(ax^2-2ax+2ay+2) \end{cases}$$

$(1,1)$ 为驻点, 故 $a-2a+2a+2=0$, 即 $a=-2$

由 $f_{xx}=2e^{-2y}$, $f_{xy}=e^{-2y}(-4x+4)$, $f_{yy}=e^{-2y}(4x^2-8x+8y-8)$

在点 $(1,1)$, $A=2e^{-2}$, $B=0$, $C=-4e^{-2}$,

$AC-B^2 < 0$, 所以点 $(1,1)$ 非极值点.

14. 解: 原点到曲线上点 (x,y,z) 的距离 $d = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

令 $L = x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-12)$

则由拉格朗日乘数法得

$$\begin{cases} L_x = 2x+2\lambda x+\mu=0 \\ L_y = 2y+2\lambda y+\mu=0 \\ L_z = 2z-\lambda+\mu=0 \\ x^2+y^2-z=0 \\ x+y+z-12=0 \end{cases}$$

解方程组得 $x=y=2$, 此时 $z=8$, $d = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 6\sqrt{2}$

及 $x=y=-3$, 此时 $z=18$, $d = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 3\sqrt{38}$

所以最长距离为 $3\sqrt{38}$, 最短距离为 $6\sqrt{2}$.

15. 解: 由对称性 $I = \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy$

设 $D_1 = \{(x,y) | x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$

则 $I = 2 \iint_{D_1} \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{\rho}{1+\rho^2} d\rho$$

$$= 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \ln(1+\rho^2) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} \ln 2$$

16. 解: $I = \iiint_{\Omega} (x^2+y^2) dv$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R r^4 \sin^3 \varphi dr$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi d\varphi \int_0^R r^4 dr$$

$$= 2\pi \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} R^5 = \frac{4}{15} \pi R^5$$