

# Teoria della decoerenza quantistica

Valerio Gherardi

28 maggio 2017

# Indice

<b>I</b>	<b>Preliminari</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
1.1	Il modello di sistema isolato . . . . .	1
1.2	Assiomi della meccanica quantistica . . . . .	2
<b>2</b>	<b>L'operatore densità</b>	<b>3</b>
2.1	Operatore densità di uno stato puro e di una miscela propria . . . . .	3
2.2	Operatore densità ridotta e sistemi entangled . . . . .	5
2.3	Fenomeni d'interferenza . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Misure ideali</b>	<b>8</b>
3.1	Lo schema di Von Neumann . . . . .	8
3.2	Il c-NOT quantistico e il problema della base preferenziale . . . . .	8
3.3	Il problema degli esiti . . . . .	11
<b>II</b>	<b>La decoerenza</b>	<b>13</b>
<b>4</b>	<b>La descrizione formale della decoerenza</b>	<b>13</b>
4.1	La decoerenza come risultato dell'interazione con l'ambiente . . . . .	13
4.2	Decoerenza di uno spin - un modello semplice . . . . .	15
<b>5</b>	<b>E(nvironment)-in(duced) (super)selection</b>	<b>17</b>
5.1	La selezione di un insieme di stati preferenziali . . . . .	17
5.2	Un criterio di esistenza oggettiva . . . . .	20
5.3	Ruoli della decoerenza nell'emergenza del mondo classico . . . . .	20
5.4	Misura con decoerenza - lo schema di Von Neumann rivisitato . . . . .	21
<b>6</b>	<b>Decoerenza collisionale e localizzazione</b>	<b>22</b>
6.1	Un modello di decoerenza collisionale . . . . .	22
6.2	Studio della master equation . . . . .	23
6.3	Stime numeriche . . . . .	25
<b>7</b>	<b>Osservazioni conclusive</b>	<b>26</b>
7.1	Il ruolo negativo della decoerenza . . . . .	26



# Parte I

## Preliminari

Questa parte di preliminari è intesa a fornire le nozioni e gli strumenti di base per la descrizione quantitativa del fenomeno della decoerenza, ossia il formalismo dell'operatore densità e il modello di Von Neumann dei processi di misura ideali. Prima di iniziare lo studio di questi argomenti, discuteremo brevemente il concetto di sistema isolato, e la sua applicabilità in ambito quantistico.

### 1 Introduzione

#### 1.1 Il modello di sistema isolato

Lo studio di un qualsiasi fenomeno naturale inizia con la suddivisione dell'universo in una parte interessante ai fini della descrizione del fenomeno (il *sistema*) ed una parte non interessante (l'*ambiente*). Questa suddivisione, oltre ad essere una scelta obbligata da evidenti ragioni pratiche, è inerente al nostro modo stesso di concepire la Fisica e di formularne i principi generali. La nozione stessa di "fenomeno", senza la previa individuazione di un particolare sistema, appare vacua.

Detto ciò, un compito del teorico è quello di ideare un modello del sistema studiato, in grado di spiegare i risultati degli esperimenti passati e di fornire previsioni circa gli esperimenti futuri, in accordo con le leggi generali della teoria sottostante (meccanica classica o quantistica, statistica, termodinamica, etc.).

Dagli albori della Fisica, il modello "par excellence" di sistema fisico fu il modello (o meglio, la classe di modelli) di *sistema isolato*, ovvero non interagente in alcun modo con l'ambiente. La causa di ciò si può attribuire ai seguenti fatti:

1. La convinzione a priori, fondata sull'esperienza, che la natura dei fenomeni fisici fosse indipendente dal nostro effettuare o meno esperimenti su di essi.
2. Il sostanziale successo di moltissimi modelli di sistema isolato.

L'avvento della meccanica quantistica rese la posizione espressa dal punto 1 insostenibile. Sappiamo ormai che, se vogliamo descrivere correttamente i fenomeni quantistici, la nostra descrizione deve necessariamente dipendere dal tipo di misure che effettuiamo sul sistema. Se mettiamo da parte i nostri pregiudizi sul fatto che la natura debba, o non debba, essere descritta da leggi deterministiche, il motivo principale di ciò si può individuare nell'esistenza di osservabili non commutanti. Finché ci limitiamo a considerare un insieme di osservabili commutanti, possiamo sempre mantenere la posizione secondo cui il sistema possiede, ad ogni stadio della misura, un valore ben definito delle osservabili misurate; valore che possiamo misurare in ogni momento e, in seguito, confermare con un'ulteriore misura. Tuttavia, se scegliamo di misurare osservabili non commutanti, un tale atteggiamento non può che portare a contraddizioni: ogni atto di misura riprepara il sistema rispetto alle altre osservabili incompatibili, di modo che nessuna di queste può avere, prima della misura stessa, un valore definito<sup>1</sup>.

Ciononostante, i primi successi della meccanica quantistica, come la predizione corretta dello spettro dell'atomo di idrogeno, si basavano sostanzialmente su modelli di sistema isolato. È probabilmente per questo motivo, per il fatto che la meccanica quantistica portasse a risultati corretti quando applicata ad oggetti microscopici supposti isolati, che tale idealizzazione non venne abbandonata per lungo tempo.

Per quanto, nella descrizione del mondo microscopico, non vi fossero segni dell'inadeguatezza di tali modelli, l'estensione degli stessi al dominio macroscopico si scontrava in maniera eclatante con un fatto inconfutabile dell'esperienza: gli oggetti macroscopici si comportano in modo classico, non quantistico. Quando descriviamo un sistema macroscopico, possiamo in ogni istante supporre che questo sia caratterizzato da valori ben definiti di un insieme ristretto di osservabili, come la posizione e la velocità del centro di massa. Inoltre possiamo, almeno in linea di principio, stabilire questi valori senza alterare in nessun modo lo stato (inteso come insieme dei valori delle osservabili) del sistema. Empiricamente ciò non porta a contraddizioni: il mondo macroscopico sembra aderire perfettamente al punto 1 di cui sopra.

Un altro modo di porre la questione è il seguente: i sistemi classici appaiono trovarsi *sempre* in autostati di alcune (poche) osservabili e *mai* in sovrapposizioni di questi. L'insieme degli stati permessi per un sistema è,

---

<sup>1</sup>"Questo è il nocciolo della meccanica quantistica." - J. J. Sakurai.

secondo la meccanica quantistica, piuttosto vasto: questo segue dal principio di sovrapposizione, che afferma che la sovrapposizione di due possibili stati dinamici del sistema è ancora un possibile stato. Tuttavia, per un sistema classico, un sottoinsieme molto ristretto di questi esaurisce i possibili stati del sistema.

Questo ci riporta al modello di sistema isolato. Per un sistema isolato, in accordo con le leggi della meccanica quantistica, le relazioni di sovrapposizione sono preservate dall'evoluzione temporale: l'equazione di Schrödinger è lineare. La stessa evoluzione temporale, genera tendenzialmente sovrapposizioni non classiche (a partire da stati "classici", ad esempio stati ben localizzati). In più, i sistemi macroscopici possono interagire con sistemi microscopici, per i quali l'esistenza delle sovrapposizioni è un dato di fatto. L'interazione dà luogo a correlazioni, che possono risultare in stati sovrapposti del sistema macroscopico (vedi "gatto di Schrödinger"). Stando a tutto ciò, tali sovrapposizioni macroscopiche dovrebbero essere non assenti ma, al contrario, ubiquo.

I primi passi verso il superamento dell'impasse si possono far risalire all'articolo del 1970 di H. D. Zeh [6]; l'osservazione chiave è la seguente. I sistemi macroscopici interagiscono costantemente con l'ambiente circostante. L'interazione è tale da creare correlazioni quantistiche (entanglement) fra sistema e ambiente, il cui risultato è la perdita, al livello del sistema, di una relazione di fase ben definita fra le diverse componenti di una sovrapposizione. Questo fenomeno è chiamato *decoerenza*<sup>2</sup>.

Di conseguenza, la decoerenza agisce come un "censore", che vieta la persistenza dell'infinità di stati permessi a priori dal principio di sovrapposizione. La decoerenza ha il merito di spiegare, in termini puramente operativi, l'emergenza degli stati classici dei sistemi macroscopici. Inoltre, tramite l'interazione con l'ambiente, vengono chiariti diversi aspetti riguardanti la descrizione quantomeccanica dei processi di misura.

La decoerenza è un fenomeno puramente quantistico (cioè segue dalle leggi della meccanica quantistica) e la sua inclusione o meno nella descrizione corretta della dinamica di un sistema non è arbitraria. La sua *efficienza* dipende dalla dimensione del sistema e dal tipo di interazione con l'ambiente. Tipicamente, i tempi di decoerenza per sistemi macroscopici sono estremamente brevi, svariati ordini di grandezza al di sotto di qualunque altra scala di tempi nei fenomeni in gioco, di modo che possiamo, ai fini pratici, considerare la decoerenza come un processo istantaneo.

Da questo discorso dovrebbe risultare abbastanza chiaro che, se vogliamo descrivere correttamente un sistema macroscopico in termini quantomeccanici, dobbiamo abbandonare l'idealizzazione di sistema isolato.

## 1.2 Assiomi della meccanica quantistica

Postuliamo i seguenti fatti (cfr. Zurek [10, VI.C]):

**i.** Ad ogni sistema quantistico è associato uno *spazio di Hilbert*. Uno stato di un sistema è un raggio<sup>3</sup> nello spazio di Hilbert ad esso associato e fornisce una descrizione completa del sistema.

**ii.** Lo stato di un sistema isolato evolve secondo l'*equazione di Schrödinger*:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |s\rangle = \hat{H} |s\rangle, \quad (1.1)$$

dove  $\hat{H}$ , l'*hamiltoniano*, è un operatore hermitiano.

**a.** Un'*osservabile* è un operatore hermitiano dello spazio di Hilbert, per il quale esiste una base ortonormale composta da suoi autovettori.

**b1.** Lo spettro di un'osservabile  $O$  rappresenta l'insieme dei possibili esiti di una misura della stessa.

**b2.** Se il sistema  $\mathcal{S}$  si trova nello stato  $|s\rangle = \sum_i c_i |o_i\rangle$ , dove  $|o_i\rangle$  è un autostato dell'osservabile  $O$  con autovalore  $o_i$ , allora la probabilità che una misura di  $O$  fornisca come risultato  $o_i$  è  $|c_i|^2$ .

**c.** Se una misura di  $O$  fornisce il valore  $o_i$ , immediatamente dopo la misura il sistema si trova nello stato  $|o_i\rangle$ .

Gli assiomi **i** e **ii** si riferiscono all'evoluzione dei sistemi isolati; questa è, come conseguenza della (1.1), deterministica (in entrambe le direzioni temporali). Gli assiomi **a**, **b1**, **b2**, **c** si riferiscono invece ai processi di misura, che sono intrinsecamente stocastici. L'assioma **b2** è la regola di Born, mentre **c** è il postulato del collasso. Si noti che la combinazione di **b2** e **c** garantisce l'immediata ripetibilità della misura. Inoltre, proprio **c** (il postulato del collasso) permette affermazioni del tipo "il sistema si trova nello stato  $|s\rangle$ ".

Zurek nota, giustamente, che oltre al sistema di assiomi **i-c**, è spesso sottinteso:

<sup>2</sup>Per un breve resoconto storico sulla nascita della teoria della decoerenza il lettore può consultare [5, pp. 10-12]

<sup>3</sup>Come è consuetudine, nel seguito la parola "stato" sarà riferita sempre al *vettore* di stato, cioè un qualsiasi rappresentante del raggio in questione.

$\emptyset$ . Esistono sistemi quantistici e apparati classici.

Questo è effettivamente lo spirito dell'interpretazione di Copenhagen, che postula il famoso dualismo fra “sistemi microscopici” (descritti dalla meccanica quantistica) e “apparati macroscopici” (descritti dalla meccanica classica) (cfr. Landau [4, § 1]). Il punto di vista di Zurek (e dell'autore) è invece il seguente:

$\emptyset'$ . L'universo è composto da sistemi quantistici. Lo spazio di Hilbert di un sistema composito è il prodotto tensoriale degli spazi di Hilbert dei costituenti.

**Il problema della misura.** Non entreremo nella questione del “problema della misura”, che, ridotto ai minimi termini, è il problema di quale sia la causa del collasso del vettore di stato (sia che si voglia vedere quest'ultimo come un vero e proprio processo fisico, sia che questo rappresenti l'acquisizione di un'informazione da parte dell'osservatore). Da un punto di vista operativo, gli assiomi **i-c** devono essere necessariamente completati da un'ulteriore proposizione come  $\emptyset$ , contenente (a differenza di  $\emptyset'$ ) un'affermazione positiva riguardo la possibilità di effettuare misure. Quello che intendo sottolineare con l'affermazione  $\emptyset'$ , è che qualunque sistema è in linea di principio passibile di una descrizione quantistica, punto di vista che, ritengo, sia un passo nella direzione giusta per la comprensione della natura profonda del processo di misura.

Credo sia opportuno definire chiaramente il significato del termine “misura”, così come verrà usato nel seguito: una misura di un'osservabile è una *qualsiasi* procedura al termine della quale lo sperimentatore è in grado di determinare in maniera univoca il valore dell'osservabile misurata. Quello che tenteremo di fare nel seguito è di fornire un *modello* di processo di misura, tuttavia ci tengo a precisare che il significato che attribuisco al termine “misura” è del tutto indipendente da questi modelli e molto più basilare.

## 2 L'operatore densità

In questa sezione si introduce il formalismo dell'operatore densità, fondamentale nella descrizione della decoerenza.

Spesso, per un sistema quantistico, una descrizione tramite un ket di stato non è disponibile. Ciò può essere dovuto a motivi pratici, come una preparazione imperfetta dello stato iniziale del sistema. Tuttavia, talvolta l'impossibilità è *di principio*: è il caso dei sistemi entangled, per cui non è possibile associare un ket di stato ai sistemi individuali. A questo proposito, osserviamo che la frase “il ket di stato fornisce una descrizione completa del sistema” andrebbe meglio precisata con “Qualora sia possibile assegnare in maniera univoca uno stato al sistema, [...]”. Strettamente parlando, lo schema «ket di stato  $\rightarrow$  evoluzione di Schrödinger  $\rightarrow$  collasso» si applica ad un sistema isolato fra due atti di misura.

Per chiarezza espositiva, diamo la seguente definizione generalizzata di *stato*: diremo che il sistema quantistico  $\mathcal{S}$  si trova in uno stato descritto dall'operatore densità  $\rho$  se il valore atteso di una qualsiasi osservabile  $O$  di  $\mathcal{S}$  in un esperimento è dato da:

$$\langle O \rangle = \text{tr}(\rho O). \quad (2.1)$$

Come si vede facilmente (Teorema 2.1), uno stato descritto da un ket (detto, talvolta, *stato puro*) è un caso particolare della definizione precedente. Nel seguito, quando ciò non possa dar luogo a equivoci, parleremo di “stato” in questo senso generalizzato.

### 2.1 Operatore densità di uno stato puro e di una miscela propria

Consideriamo un sistema  $\mathcal{S}$  nello stato puro  $|s\rangle$ . Definiamo l'operatore densità:

$$\rho = |s\rangle \langle s|. \quad (2.2)$$

**Teorema 2.1.** *Se  $O$  è un'osservabile del sistema  $\mathcal{S}$ , allora:*

$$\langle s|O|s\rangle = \text{tr}(\rho O).$$

*In altre parole, lo stato del sistema è descritto dalla densità  $\rho$ .*

*Dimostrazione.* Scegliamo una base ortonormale  $\{|i\rangle, i = 1, 2, \dots\}$  di  $\mathcal{S}$ , con  $|1\rangle = |s\rangle$ . Allora:

$$\text{tr}(\rho O) = \sum_i \langle i|(|1\rangle \langle 1| O)|i\rangle = \sum_i \delta_{i1} \langle 1|O|i\rangle = \langle 1|O|1\rangle = \langle s|O|s\rangle,$$

come volevasi dimostrare.  $\square$

Il Teorema 2.1 mostra che le due descrizioni mediante il ket di stato  $|s\rangle$  o l'operatore densità (2.2) sono equivalenti. Supponiamo ora che il sistema si trovi con certezza in uno degli stati (non necessariamente ortogonali)  $|s_i\rangle$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , con probabilità note  $p_i$ . In tal caso, il valore atteso dell'osservabile  $O$ , in accordo con la regola di Born, sarà dato da:

$$\langle O \rangle = \sum_i p_i \langle s_i | O | s_i \rangle \quad (2.3)$$

Per confermare la (2.3), esprimiamo l'osservabile  $O$  in termini dei suoi autostati  $|o_j\rangle$ :

$$O = \sum_j o_j |o_j\rangle \langle o_j|.$$

Allora la (2.3) equivale a:

$$\sum_i p_i \left\langle s_i \left| \left\{ \sum_j o_j |o_j\rangle \langle o_j| \right\} \right| s_i \right\rangle = \sum_j o_j \left[ \sum_i |\langle o_j | s_i \rangle|^2 p_i \right] = \sum_j o_j f(o_j). \quad (2.4)$$

Ma  $|\langle o_j | s_i \rangle|^2$  è la probabilità che una misura di  $O$  dia il risultato  $o_j$ , se il sistema è nello stato  $s_i$ , mentre  $p_i$  è la probabilità che il sistema si trovi in questo stato. Di conseguenza, per il teorema delle probabilità composte<sup>4</sup>,  $f(o_j)$  è esattamente la probabilità del valore  $o_j$ , da cui la (2.3).

Notiamo ora che la (2.3) si può ottenere ugualmente dall'operatore densità:

$$\rho = \sum_i p_i |s_i\rangle \langle s_i| \quad (2.5)$$

mediante la regola  $\langle O \rangle = \text{tr}(\rho O)$ , ovvero lo stato del sistema è descritto dalla densità  $\rho$ . La dimostrazione è immediata e segue dal Teorema 2.1 e dall'osservazione che l'operazione di traccia è lineare.

Abbiamo appena descritto quella che viene usualmente chiamata una *miscela propria di stati*. In questo caso, la descrizione mediante l'operatore densità è resa necessaria dalla soggettiva ignoranza, da parte dello sperimentatore, sullo stato del sistema. In linea di principio, è possibile assegnare un ket di stato al sistema; tuttavia, tutto ciò che è disponibile è l'informazione parziale, codificata dalla (2.5), riguardo alle probabilità di un certo insieme di stati  $s_i$ . In questo senso, possiamo dire che la densità (2.5) ammette un'interpretazione basata sull'ignoranza.

È comunque importante osservare che la corrispondenza fra operatori densità della forma (2.5) e miscele proprie non è biunivoca. Per chiarire questo punto, consideriamo un sistema a due stati descritto dall'operatore densità:

$$\rho = \frac{1}{2} |0\rangle \langle 0| + \frac{1}{2} |1\rangle \langle 1| = \frac{1}{2} |+\rangle \langle +| + \frac{1}{2} |-\rangle \langle -|.$$

Qui  $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle)$  è la base coniugata a  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  ed è chiaro che un'interpretazione basata sull'ignoranza è applicabile al più ad una delle due basi; non di meno la matrice densità è identica in entrambe le basi (e in qualsiasi altra base).

Notiamo, infine, che in un dato esperimento può accadere che disponiamo di un certo numero  $N$  di copie del sistema  $\mathcal{S}$ , di cui una frazione  $p_i$  è preparata (con certezza) nello stato  $s_i$ . L'osservabile d'interesse è  $\bar{O} = \frac{O^{(1)} + O^{(2)} + \dots + O^{(N)}}{N}$ , dove  $O^{(i)}$  si riferisce alla  $i$ -esima copia del sistema  $\mathcal{S}$ . Anche in questo caso, le medie di insieme  $\langle \bar{O} \rangle$  (rispetto allo stato puro dell'insieme di  $N$  copie) si possono ottenere dall'operatore densità (2.5), tramite l'usuale regola di traccia.

<sup>4</sup>L'applicabilità dei teoremi del calcolo delle probabilità classico alle "probabilità" fornite dal formalismo quantistico non è sempre garantita. La causa di ciò si può ricondurre alla generica non commutatività delle osservabili della meccanica quantistica. In questo caso, ci riferiamo ad un esperimento in cui l'osservabile che si misura è ben specificata (e non ad una classe di esperimenti in cui si misurano osservabili in generale non commutanti). Lo spazio di probabilità è  $\Omega = \{(s_i, o_j)\}$  e gli eventi casuali sono tutti gli eventi elementari, mentre la funzione di probabilità è soggetta ai vincoli:

$$\Pr(s_i) = p_i, \quad \Pr(o_j | s_i) = |\langle o_j | s_i \rangle|^2,$$

dove gli eventi  $s_i$  e  $o_j$  sono definiti rispettivamente da

$$s_i = \{(s_i, o_j) \mid j = 1, 2, \dots\}, \quad o_j = \{(s_i, o_j) \mid i = 1, 2, \dots\}.$$

Con queste definizioni possiamo provare rigorosamente il teorema.

## 2.2 Operatore densità ridotta e sistemi entangled

Consideriamo un sistema  $\mathcal{S}$  composto da due sottosistemi  $\mathcal{S}_1$  e  $\mathcal{S}_2$ . Supponiamo che lo stato di  $\mathcal{S}$  sia descritto da un operatore densità  $\rho$ .

**Teorema 2.2.** *Lo stato di  $\mathcal{S}_1$  è descritto dalla densità*

$$\rho_1 = \text{tr}_2 \rho. \quad (2.6)$$

In altre parole, se  $O_1$  è un'osservabile di  $\mathcal{S}_1$ , allora:

$$\langle O_1 \rangle = \text{tr}_1(\rho_1 O_1).$$

Qui  $\text{tr}_i$  indica la traccia (parziale) rispetto agli stati del sottosistema  $i$ :

$$\text{tr}_i A = \sum_j \langle s_j^{(i)} | A | s_j^{(i)} \rangle,$$

dove  $\left\{ |s_j^{(i)}\rangle \right\}$  è una qualsiasi base di  $\mathcal{S}_i$ .

*Dimostrazione.* Indichiamo con  $I_2$  l'operatore identità di  $\mathcal{S}_2$ . Allora:

$$\begin{aligned} \langle O_1 \rangle &= \text{tr}(\rho \cdot (O_1 \otimes I_2)) \\ &= \sum_{i,j} \langle s_i^{(1)} | \langle s_j^{(2)} | \{ \rho \cdot (O_1 \otimes I_2) \} | s_i^{(1)} \rangle | s_j^{(2)} \rangle \\ &= \sum_i \langle s_i^{(1)} | \left\{ \sum_j \langle s_j^{(2)} | \rho | s_j^{(2)} \rangle \right\} O_1 | s_i^{(1)} \rangle \\ &= \sum_i \langle s_i^{(1)} | \rho_1 O_1 | s_i^{(1)} \rangle \\ &= \text{tr}_1(\rho_1 O_1), \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare. □

Il teorema precedente si applica in modo naturale agli stati entangled<sup>5</sup>. Supponiamo che lo stato (puro) di  $\mathcal{S}$  sia dato da una somma di tensori decomponibili:

$$|s\rangle = \sum_i c_i |s_i^{(1)}\rangle |s_i^{(2)}\rangle. \quad (2.7)$$

Questo è equivalente (Teorema 2.1) all'operatore densità:

$$\rho = |s\rangle \langle s| = \sum_{ij} c_i c_j^* |s_i^{(1)}\rangle |s_i^{(2)}\rangle \langle s_j^{(1)}| \langle s_j^{(2)}|.$$

Un semplice calcolo mostra che:

$$\rho_1 = \text{tr}_2 \rho = \sum_{ij} c_i c_j^* \langle s_j^{(2)} | s_i^{(2)} \rangle |s_i^{(1)}\rangle \langle s_j^{(1)}|. \quad (2.8)$$

Se, in particolare,  $\left\{ |s_j^{(2)}\rangle \right\}$  è un insieme ortonormale di  $\mathcal{S}_2$ , allora l'operatore densità ridotta è:

$$\rho_1 = \sum_i |c_i|^2 |s_i^{(1)}\rangle \langle s_i^{(1)}|. \quad (2.9)$$

---

<sup>5</sup>Uno stato  $|s\rangle$  di un sistema composto  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \mathcal{S}_2$  si dice *entangled* se è un tensore indecomponibile, i.e. se non è un prodotto tensoriale di stati di  $\mathcal{S}_1$  e  $\mathcal{S}_2$ . Il lettore interessato a una discussione sull'entanglement può consultare [5, Sez. 2.3].



*formalmente* analogo all'operatore densità di una miscela propria (2.5). Ciò non deve trarre in inganno: le due densità hanno un'origine differente. Nel primo caso, l'uso dell'operatore densità è, come già osservato, in linea di principio dispensabile e dipende dalla soggettiva ignoranza dello sperimentatore. Nel secondo caso, l'operatore densità emerge da un'*oggettiva impossibilità* di attribuire un ket di stato ad un sistema entangled. In questo senso, l'operatore densità (e non il ket di stato) fornisce una descrizione completa del sistema.

D'altra parte l'analogia formale fra le densità (2.9) e (2.5) ha un'importante conseguenza: supponiamo che uno sperimentatore trovi che la statistica delle sue misure ripetute su un certo numero di copie di  $\mathcal{S}_1$  sia descritta dalla (2.9). Allora egli non può distinguere, tramite le sue misure, i due casi in cui **(a)** le copie del sistema sono preparate indeterministicamente, con probabilità  $|c_i|^2$ , nei diversi stati  $s_i$  oppure **(b)** tutte le copie si trovano nello stesso stato entangled. I suoi risultati sono, in entrambi i casi, descritti dalla densità (2.9).

### 2.2.1 Aggiornamento dell'operatore densità e densità condizionale

Supponiamo che la coppia  $\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2$  sia descritta da un operatore densità  $\rho$ . Definiamo la *densità condizionale rispetto allo stato*  $|s^{(2)}\rangle$  di  $\mathcal{S}_2$  tramite:

$$\rho_{|s^{(2)}\rangle} = \frac{\langle s^{(2)}|\rho|s^{(2)}\rangle}{\text{tr}_1(\langle s^{(2)}|\rho|s^{(2)}\rangle)}, \quad (2.10)$$

ammesso che sia  $\text{tr}_1(\langle s^{(2)}|\rho|s^{(2)}\rangle) \neq 0$ . Per comprendere questa definizione, consideriamo le uguaglianze:

$$\text{tr} \left[ |s^{(1)}\rangle \langle s^{(1)}| \rho_{|s^{(2)}\rangle} \right] = \langle s^{(1)}| \rho_{|s^{(2)}\rangle} |s^{(1)}\rangle = \frac{\langle s^{(1)}| \langle s^{(2)}|\rho|s^{(2)}\rangle |s^{(1)}\rangle}{\text{tr}_1(\langle s^{(2)}|\rho|s^{(2)}\rangle)} = \frac{\text{tr} [ (|s^{(1)}\rangle \langle s^{(1)}| \otimes |s^{(2)}\rangle \langle s^{(2)}|) \rho ]}{\text{tr} [(I_1 \otimes |s^{(2)}\rangle \langle s^{(2)}|) \rho]}. \quad (2.11)$$

Il membro a destra si riconosce facilmente essere la probabilità condizionata che una misura dell'osservabile  $|s^{(1)}\rangle \langle s^{(1)}|$  fornisca 1, se una misura dell'osservabile  $|s^{(2)}\rangle \langle s^{(2)}|$  ha fornito 1. Di conseguenza, l'operatore  $\rho_{|s^{(2)}\rangle}$  descrive lo stato di  $\mathcal{S}_1$  condizionato dall'osservazione dello stato  $|s^{(2)}\rangle$  di  $\mathcal{S}_2$ . Il valore atteso di una qualunque osservabile  $O_1$  di  $\mathcal{S}_1$  è dato dalla regola usuale:

$$\langle O_1 \rangle = \text{tr}_1(O_1 \rho_{|s^{(2)}\rangle}). \quad (2.12)$$

In particolare, il valore atteso dell'osservabile  $|s^{(1)}\rangle \langle s^{(1)}|$  nello stato  $\rho_{|s^{(2)}\rangle}$  è, come si è visto,  $\langle |s^{(1)}\rangle \langle s^{(1)}| \rangle = \text{Pr}(s^{(1)}|s^{(2)})$ .

Per calcolare facilmente la densità condizionale  $\rho_{|s^{(2)}\rangle}$  a partire dallo stato globale  $\rho$ , possiamo prima calcolare la densità condizionale non normalizzata tramite

$$\tilde{\rho}_{|s^{(2)}\rangle} = |s^{(2)}\rangle \langle s^{(2)}| \rho |s^{(2)}\rangle \langle s^{(2)}| \quad (2.13)$$

e poi porre  $\rho_{|s^{(2)}\rangle} = \frac{\tilde{\rho}_{|s^{(2)}\rangle}}{\text{tr} \tilde{\rho}_{|s^{(2)}\rangle}}$ . Si vede facilmente che ciò è equivalente alla definizione (2.10).

Vediamo in particolare la densità condizionale rispetto a uno stato  $|\sigma^{(2)}\rangle$  di  $\mathcal{S}_2$  se l'operatore densità ha la forma:

$$\rho = \sum_i p_i |s_i^{(1)}\rangle \langle s_i^{(1)}| |s_i^{(2)}\rangle \langle s_i^{(2)}|. \quad (2.14)$$

Questa è:

$$\rho_{|\sigma^{(2)}\rangle} = \sum_i w_i |s_i^{(1)}\rangle \langle s_i^{(1)}|, \quad (2.15)$$

dove i nuovi pesi sono definiti da:

$$w_i = \frac{p_i \left| \langle \sigma^{(2)} | s_i^{(2)} \rangle \right|^2}{\sum_j p_j \left| \langle \sigma^{(2)} | s_j^{(2)} \rangle \right|^2}. \quad (2.16)$$

Ciò mostra che l'interpretazione della densità condizionale è corretta:  $p_i$  è la probabilità a priori di ottenere lo stato  $|s_i^{(1)}\rangle$ , mentre  $\left| \langle \sigma^{(2)} | s_i^{(2)} \rangle \right|^2$  è la probabilità condizionata da  $|s_i^{(1)}\rangle$  di ottenere lo stato  $|\sigma^{(2)}\rangle$ , e la (2.16) è l'analogo quantomeccanico del teorema di Bayes.

La probabilità di uno stato  $|\sigma^{(1)}\rangle$ , condizionata dall'osservazione di  $|\sigma^{(2)}\rangle$ , è:

$$\text{tr} \left[ |\sigma^{(1)}\rangle \langle \sigma^{(1)} | \rho_{|\sigma^{(2)}\rangle} \right] = \sum_i w_i \left| \langle \sigma^{(1)} | s_i^{(1)} \rangle \right|^2. \quad (2.17)$$

Le seguenti affermazioni, che si riferiscono alla densità iniziale (2.14), sono conseguenze più o meno immediate delle (2.17) e (2.16).

1.  $\text{tr} \left[ |s_i^{(1)}\rangle \langle s_i^{(1)} | \rho_{|s_j^{(2)}\rangle} \right] = \delta_{ij}$ .
2.  $\text{tr} \left[ |\sigma^{(1)}\rangle \langle \sigma^{(1)} | \rho_{|\sigma^{(2)}\rangle} \right] = 1$  se e solo se  $|\sigma^{(1)}\rangle = |s_i^{(1)}\rangle$  per qualche  $i$ , e  $p_j \left| \langle \sigma^{(2)} | s_j^{(2)} \rangle \right|^2 = 0$  per ogni  $j \neq i$ .

## 2.3 Fenomeni d'interferenza

Per illustrare il fenomeno dell'interferenza, consideriamo una particella descritta dalla funzione d'onda:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1(x) + \psi_2(x)) \quad (2.18)$$

La densità di probabilità della posizione della particella è data da:

$$|\psi(x)|^2 = \frac{1}{2} |\psi_1(x)|^2 + \frac{1}{2} |\psi_2(x)|^2 + \text{Re} \{ \psi_1^*(x) \psi_2(x) \} \quad (2.19)$$

I primi due termini della (2.19) costituiscono una somma classica di probabilità: se sapessimo con certezza che la particella si trova con probabilità  $\frac{1}{2}$  in uno dei due stati  $\psi_1$  e  $\psi_2$ , con relative densità  $|\psi_{1,2}(x)|^2$ , allora (come segue dal teorema delle probabilità composte) la densità sarebbe data da questa semplice somma. Il terzo termine nella (2.19), che rappresenta l'interferenza fra i due stati  $\psi_1$  e  $\psi_2$ , è ciò che permette di distinguere sperimentalmente la sovrapposizione (2.18) da una miscela propria.

Possiamo generalizzare queste considerazioni tramite il formalismo dell'operatore densità. Supponiamo che un sistema sia descritto dall'operatore densità

$$\rho = \sum_i p_i |a_i\rangle \langle a_i| \quad (2.20)$$

dove  $|a_i\rangle$  sono autostati di un'osservabile  $A$ . È fondamentale osservare che la (2.20) descrive uno stato del sistema  $\mathcal{S}$  differente dalla sovrapposizione:

$$|s\rangle = \sum_i \sqrt{p_i} e^{i\phi_i} |a_i\rangle,$$

sebbene ciò non si possa rilevare effettuando misure della sola osservabile  $A$ . La densità corrispondente a un tale stato è:

$$\rho = |s\rangle \langle s| = \sum_i p_i |a_i\rangle \langle a_i| + \sum_{i \neq j} \sqrt{p_i p_j} e^{i(\phi_i - \phi_j)} |a_i\rangle \langle a_j|, \quad (2.21)$$

l'interferenza fra le componenti  $i \neq j$  è, almeno in linea di principio, empiricamente osservabile. Se  $O$  è una qualunque osservabile, la distribuzione di probabilità degli autovalori  $o_j$  è data da:

$$f(o_j) = \text{tr}(\rho |o_j\rangle \langle o_j|) = \langle o_j | \rho | o_j \rangle.$$

Nel caso dello stato puro (2.21) questa è:

$$f(o_j) = \underbrace{\sum_i p_i |\langle o_j | a_i \rangle|^2}_{\text{somma classica di probabilità}} + \underbrace{\sum_{i \neq j} \sqrt{p_i p_j} e^{i(\phi_i - \phi_j)} \langle o_j | a_i \rangle \langle a_j | o_j \rangle}_{\text{interferenza}}, \quad (2.22)$$

mentre per lo stato impuro (2.20) abbiamo:

$$f(o_j) = \underbrace{\sum_i p_i |\langle o_j | a_i \rangle|^2}_{\text{somma classica di probabilità}}. \quad (2.23)$$

Possiamo perciò affermare che il sistema descritto dalla (2.20) si trova in una *sovrapposizione incoerente* di autostati di  $A$ . Con ciò si intende dire che, sebbene tutti gli stati  $|a_i\rangle$  siano presenti nella sovrapposizione, non si osserva fra di essi interferenza nella misura di osservabili del sistema, come si vede dal confronto di (2.22) e (2.23).

Sottolineiamo che la presenza o assenza di interferenza è sempre riferita ad una particolare base (o a un particolare insieme di stati). Del resto, le densità fin qui introdotte sono operatori autoaggiunti e, in quanto tali, sempre diagonali in una qualche base ortonormale, per la quale non vi è interferenza.

### 3 Misure ideali

In questa sezione descriviamo il modello di Von Neumann dei processi di misura ideali ed alcuni problemi associati a tale modello. Mostriamo come l'ambiguità della base preferenziale può essere risolta introducendo un terzo sistema nella catena sistema-apparato.

#### 3.1 Lo schema di Von Neumann

Lo schema di Von Neumann è un modello dell'interazione sistema-apparato di misura basato sull'entanglement. In questo modello, un sistema  $\mathcal{S}$  ed un apparato  $\mathcal{A}$  si trovano, per  $t < 0$ , nello stato separabile  $(\sum_i c_i |s_i\rangle) |a_0\rangle$ , dove  $\{|s_i\rangle\}$  è una base di  $\mathcal{S}$ . All'istante  $t = 0$  i due iniziano ad interagire e, al termine dell'interazione, lo stato del sistema composito è:

$$\left(\sum_i c_i |s_i\rangle\right) |a_0\rangle \xrightarrow{t} \sum_i c_i |s_i\rangle |a_i\rangle, \quad (3.1)$$

dove  $\{|a_i\rangle\}$  sono vettori ortonormali (non necessariamente una base) di  $\mathcal{A}$ . Di conseguenza, gli stati  $|s_i\rangle$  del sistema sono correlati in modo biunivoco agli stati  $|a_i\rangle$  dell'apparato; l'osservazione dell'apparato nello stato  $|a_i\rangle$  rivela immediatamente lo stato  $|s_i\rangle$  del sistema.

Poniamoci ora il seguente problema: qual è l'osservabile di  $\mathcal{S}$  misurata dall'apparato  $\mathcal{A}$ ? Ovviamente, a primo acchitto, saremmo tentati di rispondere:

$$\sigma = \sum_k k |s_k\rangle \langle s_k|.$$

Per mostrare che, di fatto, questa conclusione non segue dalla (3.1), consideriamo un modello semplicissimo, che illustra questa ambiguità dello schema di Von Neumann in maniera evidente.

#### 3.2 Il c-NOT quantistico e il problema della base preferenziale

Consideriamo due sistemi a due stati  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{T}$ , con ket di base  $\{|0\rangle_c, |1\rangle_c\}$  e  $\{|0\rangle_t, |1\rangle_t\}$ , interagenti tramite l'hamiltoniano:

$$H = g |1\rangle \langle 1|_c |-\rangle \langle -|_t, \quad (3.2)$$

dove

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle \pm |0\rangle). \quad (3.3)$$

Supponiamo che i sistemi interagiscano per un tempo  $t = \frac{\hbar\pi}{g}$ . Allora, in seguito all'interazione:

$$\begin{aligned} |0\rangle_c |0\rangle_t &\rightarrow |0\rangle_c |0\rangle_t, \\ |0\rangle_c |1\rangle_t &\rightarrow |0\rangle_c |1\rangle_t, \\ |1\rangle_c |0\rangle_t &\rightarrow |1\rangle_c |1\rangle_t, \\ |1\rangle_c |1\rangle_t &\rightarrow |1\rangle_c |0\rangle_t. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Questo modello è chiamato c-NOT quantistico<sup>6</sup> [10]. Il sistema  $\mathcal{C}$  (control) agisce come un “interruttore” per lo scambio dei ket  $|0\rangle_t$  e  $|1\rangle_t$  del sistema  $\mathcal{T}$  (target). In particolare, se consideriamo soltanto la prima e terza equazione delle (3.4), abbiamo un processo di Von Neumann:

$$\begin{aligned} |0\rangle_c |0\rangle_t &\rightarrow |0\rangle_c |0\rangle_t \\ |1\rangle_c |0\rangle_t &\rightarrow |1\rangle_c |1\rangle_t \end{aligned} \quad (3.5)$$

dove l'apparato è il target  $\mathcal{T}$ . Supponiamo ora che lo stato iniziale di  $\mathcal{C}$  sia:

$$|+\rangle_c = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle_c + |0\rangle_c).$$

L'evoluzione (3.1) dà:

$$|+\rangle_c |0\rangle_t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle_c |1\rangle_t + |0\rangle_c |0\rangle_t).$$

D'altra parte, come mostra un semplice calcolo:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle_c |1\rangle_t + |0\rangle_c |0\rangle_t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_c |+\rangle_t + |-\rangle_c |-\rangle_t). \quad (3.6)$$

Di conseguenza, gli stati  $|0\rangle, |1\rangle$  di  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{T}$ , sono correlati allo stesso modo degli stati  $|+\rangle, |-\rangle$ . Dalla sola forma dello stato finale (3.6) è impossibile determinare a priori in quale stato venga osservato l'apparato, se  $|0\rangle_t, |1\rangle_t$  oppure  $|\pm\rangle_t$ , o ancora una qualsiasi sovrapposizione di  $|0\rangle_t$  e  $|1\rangle_t$ . Ne concludiamo, con Zurek [7] che:

«La meccanica quantistica, quando applicata alla coppia *isolata* di un sistema e un apparato, non è in grado di determinare quale osservabile sia stata misurata.»

Questo è il cosiddetto “problema della base preferenziale” e dimostra che lo schema di Von Neumann, come modello di misura, è incompleto.

Possiamo andare oltre e mostrare che il modello qui presentato è ambiguo non solo nella definizione dell'osservabile misurata, ma anche nella definizione di “apparato” e “sistema”. Per capirlo, osserviamo che, in seguito alla stessa interazione, si ha anche:

$$\begin{aligned} |-\rangle_c |-\rangle_t &\rightarrow |+\rangle_c |-\rangle_t \\ |-\rangle_c |+\rangle_t &\rightarrow |-\rangle_c |+\rangle_t \\ |+\rangle_c |-\rangle_t &\rightarrow |-\rangle_c |-\rangle_t \\ |+\rangle_c |+\rangle_t &\rightarrow |+\rangle_c |+\rangle_t. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Ma questa è esattamente la (3.4) con “1,c” e “-,t” scambiati! Di conseguenza, se si utilizza la base  $\{|\pm\rangle\}$  il control  $\mathcal{C}$  si comporta come “apparato” e il target  $\mathcal{T}$  come “sistema”.

<sup>6</sup>In analogia al c-NOT classico, ovvero la funzione a due valori booleani di due variabili booleane:

$$(c, t) \mapsto (c, c\bar{t} + \bar{c}t),$$

la cui tavola di verità coincide, con le opportune identificazioni, con le (3.4), come si verifica facilmente.

**Una soluzione del problema della base preferenziale** Consideriamo un terzo sistema a due stati  $\mathcal{E}$  interagente con il target  $\mathcal{T}$  tramite lo stesso hamiltoniano (3.2). Abbiamo perciò l'evoluzione:

$$\begin{aligned} |0\rangle_t |0\rangle_e &\rightarrow |0\rangle_t |0\rangle_e \\ |1\rangle_t |0\rangle_e &\rightarrow |1\rangle_t |1\rangle_e. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Supponiamo che il processo di misura avvenga in due fasi: nella prima fase  $\mathcal{C}$  interagisce con  $\mathcal{T}$ , mentre  $\mathcal{E}$  non interagisce; nella seconda fase  $\mathcal{T}$  interagisce con  $\mathcal{E}$ , mentre  $\mathcal{C}$  non interagisce. Ne risulta la seguente evoluzione:

$$\begin{aligned} |0\rangle_c |0\rangle_t |0\rangle_e &\xrightarrow{\mathcal{CT}} |0\rangle_c |0\rangle_t |0\rangle_e \xrightarrow{\mathcal{TE}} |0\rangle_c |0\rangle_t |0\rangle_e \\ |1\rangle_c |0\rangle_t |0\rangle_e &\xrightarrow{\mathcal{CT}} |1\rangle_c |1\rangle_t |0\rangle_e \xrightarrow{\mathcal{TE}} |1\rangle_c |1\rangle_t |1\rangle_e. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Consideriamo nuovamente lo stato (3.6). Abbiamo:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle_c + |0\rangle_c) |0\rangle_t |0\rangle_e \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle_c |1\rangle_t |1\rangle_e + |0\rangle_c |0\rangle_t |0\rangle_e). \quad (3.10)$$

Come prima, una misura dell'osservabile

$$A_t = |1\rangle \langle 1|_t - |0\rangle \langle 0|_t \quad (3.11)$$

fornisce un'informazione completa sul valore di  $A_c$ . D'altra parte, supponiamo di misurare:

$$B_t = |+\rangle \langle +|_t - |-\rangle \langle -|_t \quad (3.12)$$

e di trovare  $|+\rangle_t$ . Allora il nuovo stato sarà, in seguito alla misura:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle_c |1\rangle_t |1\rangle_e + |0\rangle_c |0\rangle_t |0\rangle_e) &\rightarrow |+\rangle \langle +|_t \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle_c |1\rangle_t |1\rangle_e + |0\rangle_c |0\rangle_t |0\rangle_e) \right] \\ &= \frac{1}{2}(|1\rangle_c |+\rangle_t |1\rangle_e + |0\rangle_c |+\rangle_t |0\rangle_e) \\ &\propto \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_c |+\rangle_t |+\rangle_e + |-\rangle_c |+\rangle_t |-\rangle_e) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Di conseguenza, da una misura di  $B_t$  non abbiamo alcun modo di inferire il valore di  $B_c$ . Più in generale, il sistema  $\mathcal{CT}$  è, in seguito all'interazione con  $\mathcal{E}$ , descritto da una densità:

$$\rho_{\mathcal{CT}} = p |1\rangle \langle 1|_c |1\rangle \langle 1|_t + q |0\rangle \langle 0|_c |0\rangle \langle 0|_t,$$

dove  $p + q = 1$ . La densità condizionale di  $\mathcal{C}$  secondo lo stato:

$$|\theta, \phi\rangle_t = \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} |1\rangle_t + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} |0\rangle_t \quad (3.14)$$

è

$$\rho_{\mathcal{C}|\theta, \phi}_t = \frac{1}{p \cos^2 \frac{\theta}{2} + q \sin^2 \frac{\theta}{2}} \left[ p \cos^2 \frac{\theta}{2} |1\rangle \langle 1|_c + q \sin^2 \frac{\theta}{2} |0\rangle \langle 0|_c \right]$$

e la probabilità condizionale di uno stato  $|\tilde{\theta}, \tilde{\phi}\rangle_c$  è:

$$f(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}|\theta, \phi) = \frac{p \cos^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\tilde{\theta}}{2} + q \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\tilde{\theta}}{2}}{p \cos^2 \frac{\theta}{2} + q \sin^2 \frac{\theta}{2}}. \quad (3.15)$$

Inaspettatamente, la probabilità condizionale non dipende dagli angoli azimutali  $\phi$  e  $\tilde{\phi}$ . Fissato  $\theta$ , la precedente espressione assume il suo massimo per  $\tilde{\theta} = 0$  o  $\tilde{\theta} = \pi$ , a seconda che sia  $p \cos^2 \frac{\theta}{2} \gtrless q \sin^2 \frac{\theta}{2}$ . Una correlazione perfetta fra gli stati del sistema e gli stati dell'apparato si ha soltanto nel caso in cui l'osservabile misurata per entrambi sia:

$$A = |1\rangle \langle 1| - |0\rangle \langle 0|. \quad (3.16)$$

Vediamo perciò che l'introduzione di un terzo sistema  $\mathcal{E}$  fornisce un criterio oggettivo per determinare qual è l'osservabile misurata dall'apparato  $\mathcal{T}$ : questa è l'unica per la quale si ha correlazione perfetta ( $f = 1$ ) fra i valori misurati sull'apparato e i valori misurati sul sistema.

### 3.3 Il problema degli esiti

Abbiamo illustrato lo schema di Von Neumann come modello idealizzato del processo di misura. Tuttavia dobbiamo riconoscere che, anche qualora si sia in grado di risolvere il problema della base preferenziale, non possiamo considerare questo schema come esaustivo nella descrizione di una misura dal punto di vista dell'osservatore. Il motivo è semplice: lo stato finale di (3.1) è ancora una sovrapposizione di stati diversi del sistema entangled  $\mathcal{SA}$ . In questa descrizione non è contenuto in alcun modo il fatto che l'osservatore, al termine della misura, ottiene uno e un solo esito. Questo viene chiamato, da alcuni, il “problema degli esiti” [5] e non è altro che il problema del collasso del vettore di stato (si veda anche la discussione al termine del paragrafo 1.2). La questione, talvolta dichiarata insolubile<sup>7</sup>, di “cosa causi il collasso della funzione d'onda” ha dato luogo a svariate interpretazioni della meccanica quantistica, delle quali non discuteremo.

Per questo motivo, appare opportuno sottolineare quale sia lo scopo e il significato dello schema di Von Neumann nell'ambito dei processi di misura. Si assume qui che il valore dell'osservabile misurata venga dedotto dal valore di una rispettiva osservabile dell'apparato, come la posizione di un puntatore. L'apparato è macroscopico, nel senso che le sovrapposizioni di diversi stati localizzati del puntatore non sono osservabili, per via dei brevissimi tempi di decoerenza di tali sovrapposizioni. Lo schema di Von Neumann descrive esattamente questo processo di amplificazione e la decoerenza ha il merito di chiarire quali siano gli stati dell'apparato in grado di mantenere una correlazione persistente con gli stati del sistema e che, al tempo stesso, possano essere osservati per tempi sufficientemente lunghi. Come discuteremo nel paragrafo 5.4, dopo un tempo di decoerenza, lo sperimentatore può supporre che il complesso sistema-apparato si trovi in uno degli stati finali  $|s_i\rangle |a_i\rangle$ , con probabilità  $p_i = |c_i|^2$ , senza incorrere con ciò in nessuna contraddizione.

---

<sup>7</sup>Zurek [7]:

«[...]Hence, even though below we do not face the insoluble question of quantum theory of measurement: “What causes the collapse of the system-apparatus-environment combined wave function?” we do determine into what mixture the wave function appears to have collapsed.»



## Parte II

# La decoerenza

Siamo ora nella posizione di introdurre l'argomento principale della presente dissertazione, la decoerenza. Esamineremo la descrizione formale della decoerenza, discuteremo le regole di superselezione e, infine, presenteremo un modello di decoerenza collisionale.

## 4 La descrizione formale della decoerenza

In questa sezione introduciamo il fenomeno della decoerenza ed esaminiamo un modello semplice.

La decoerenza è la perdita di una relazione di fase definita fra le diverse componenti di una sovrapposizione di stati. Essa è dovuta all'interazione con l'ambiente e può essere vista come un'azione *del* sistema *sull'*ambiente.

La perdita di una relazione di fase implica la non osservabilità dell'interferenza. Per una sovrapposizione di stati soggetta a decoerenza si applicano le regole classiche di somma delle probabilità.

La validità della teoria della decoerenza si basa su alcune assunzioni circa l'interazione fra sistema e ambiente. Lo studio di modelli specifici permette di indagare sulla validità di queste assunzioni.

### 4.1 La decoerenza come risultato dell'interazione con l'ambiente

Consideriamo una sovrapposizione  $\sum_i c_i |s_i\rangle$  di stati di un sistema quantistico. Concettualmente, possiamo scomporre l'informazione contenuta in tale sovrapposizione in due parti. La prima parte riguarda il peso con cui le diverse componenti entrano nella sovrapposizione, quantificato dai moduli  $|c_i|^2$ . La seconda concerne le relazioni di fase fra le diverse componenti, ovvero le fasi dei numeri complessi  $c_i c_j^*$ .

La decoerenza è, essenzialmente, la perdita della seconda parte d'informazione, in seguito all'interazione del sistema con l'ambiente. A livello globale, piuttosto che di perdita, dovremmo parlare di *delocalizzazione*. Tuttavia, la decoerenza è in pratica un fenomeno irreversibile: la ricostruzione di una sovrapposizione coerente al livello del sistema richiederebbe un controllo totale dei gradi di libertà dell'ambiente, il che è assolutamente irrealizzabile. Di conseguenza, se ci limitiamo a guardare il sistema, la seconda parte d'informazione è (dopo un tempo di decoerenza) del tutto persa.

Per comprendere come ciò possa realizzarsi, supponiamo che il sistema  $\mathcal{S}$  interagisca con l'ambiente  $\mathcal{E}$  e che ad un certo istante, diciamo  $t = 0$ , il sistema composito  $\mathcal{SE}$  si trovi in uno stato separabile:

$$|s\rangle |E_0\rangle = \left( \sum_i c_i |s_i\rangle \right) |E_0\rangle, \quad (4.1)$$

Assumiamo che l'interazione fra sistema e ambiente dia luogo a un'evoluzione schematizzabile come un processo di Von Neumann:

$$|s\rangle |E_0\rangle = \left( \sum_i c_i |s_i\rangle \right) |E_0\rangle \rightarrow \sum_i c_i |s_i\rangle |E_i\rangle. \quad (4.2)$$

Parafrasando la (4.2), che è la descrizione formale del processo di decoerenza, l'interazione ha l'effetto di stabilire delle correlazioni fra sistema e ambiente, del tutto analoghe alle correlazioni stabilite in un'interazione sistema-apparato.

In linea di principio, l'interazione fra sistema e apparato è reversibile. Per fare un esempio concreto, consideriamo un elettrone in uno stato spazialmente localizzato, che scriviamo sottoforma di bispinore:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \psi_0(\mathbf{r}),$$

che attraversi un magnete di Stern-Gerlach. Un po' artificialmente, possiamo considerare lo spin come "il sistema" e la posizione come "l'apparato"; l'hamiltoniano di interazione sistema-apparato è:

$$H_{SA} = \frac{|e|\hbar}{m} S_z B_z(\mathbf{r}).$$



L'evoluzione temporale risulta in due funzioni d'onda  $\psi_\uparrow$  e  $\psi_\downarrow$ , corrispondenti alle due componenti del bispinore, con una sovrapposizione spaziale trascurabile:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \psi_0(\mathbf{r}) \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha\psi_\uparrow(\mathbf{r}) \\ \beta\psi_\downarrow(\mathbf{r}) \end{pmatrix}.$$

A questo punto possiamo misurare la componente  $z$  dello spin dell'elettrone ponendo, in uscita dal magnete, uno schermo fosforescente che interagisca fortemente col grado di libertà "posizione" dell'elettrone (e che, in un'analisi in termini di decoerenza, costituirebbe "l'ambiente"). D'altra parte, possiamo costruire un sistema di tre magneti come in figura 1 e ricombinare le due funzioni d'onda delocalizzate  $\psi_\uparrow$  e  $\psi_\downarrow$ , in modo da riprodurre, in uscita dall'apparato, la stessa sovrapposizione di stati di spin:

$$\begin{pmatrix} \alpha\psi_\uparrow(\mathbf{r}) \\ \beta\psi_\downarrow(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \psi_1(\mathbf{r}).$$

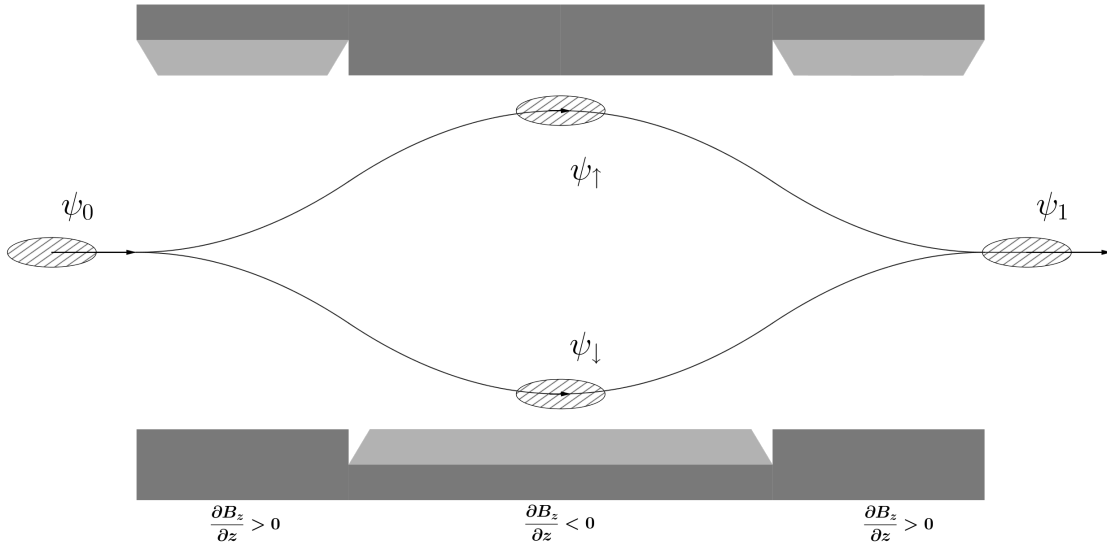


Figura 1: Apparato di Stern-Gerlach reversibile

La situazione è assai differente qualora si consideri l'interazione del sistema con l'ambiente. Qui i gradi di libertà dell'ambiente sono del tutto incontrollabili, essendo l'ambiente costituito da un numero enorme di componenti (molecole d'aria, fotoni, spin etc.) che interagiscono singolarmente con il sistema stabilendo con esso correlazioni tramite processi della forma (4.2); inoltre, queste stesse componenti, interagiscono a loro volta con l'ambiente più remoto del sistema ed i tempi di ricorrenza sono enormemente maggiori dei tempi di decoerenza. L'informazione sulla relazione di fase fra le diverse componenti della base  $\{|s_i\rangle\}$  del sistema viene rapidamente dispersa ed è, all'atto pratico, del tutto irrecuperabile.

Consideriamo lo stesso processo (4.2) dal punto di vista dell'operatore densità del sistema. Come si è visto (teorema 2.2), l'operatore densità esaurisce l'informazione disponibile riguardo alle misure locali sul sistema, ovvero contiene interamente la statistica di queste misure. La densità *pre*-decoerenza del sistema composto  $\mathcal{SE}$  è:

$$\rho_{\mathcal{SE}}^{\text{pre}} = |s\rangle \langle s| \otimes |E_0\rangle \langle E_0| = \left( \sum_{ij} c_i c_j^* |s_i\rangle \langle s_j| \right) \otimes |E_0\rangle \langle E_0|, \quad (4.3)$$

mentre la densità *post*-decoerenza:

$$\rho_{\mathcal{SE}}^{\text{post}} = \sum_{ij} c_i c_j^* |s_i\rangle \langle s_j| \otimes |E_i\rangle \langle E_j|. \quad (4.4)$$

Al livello del sistema:

$$\rho_S^{\text{pre}} = \sum_{ij} c_i c_j^* |s_i\rangle \langle s_j| \quad (4.5)$$

e

$$\begin{aligned} \rho_S^{\text{post}} &= \text{tr}_{\mathcal{E}}(\rho_{S\mathcal{E}}^{\text{post}}) = \sum_{ij} c_i c_j^* \langle E_j|E_i\rangle |s_i\rangle \langle s_j| \\ &\approx \sum_i |c_i|^2 |s_i\rangle \langle s_i|. \end{aligned} \quad (4.6)$$

L'ultimo passaggio segue se:

$$\langle E_j|E_i\rangle \approx \delta_{ij}, \quad (4.7)$$

ovvero se gli stati finali dell'ambiente sono approssimativamente ortogonali. La validità di quest'assunzione è il nocciolo della teoria della decoerenza. Una parte cospicua del lavoro di ricerca in questo campo consiste nella formulazione di modelli realistici dell'interazione tra sistema e ambiente, atti a studiare la validità della (4.7).

La scala dei tempi in cui i kets dell'ambiente diventano ortogonali definisce un *tempo di decoerenza*  $\tau_D$ . In alcuni casi, il bracket  $\langle E_j|E_i\rangle$ , noto come *fattore di decoerenza*, può avere un andamento esponenziale:

$$\langle E_j|E_i\rangle \propto e^{-\frac{t}{\tau_D}}, \quad (4.8)$$

dove  $\tau_D$  è funzione dei parametri che entrano nel modello. Un caso esemplare è quello della localizzazione di una particella massiva in un gas di particelle, che discuteremo in Sezione 6. Qui gli stati di base del sistema sono gli stati localizzati  $\{|\mathbf{r}\rangle\}$  e il fattore di decoerenza ha, per distanze  $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$  piccole rispetto alla lunghezza d'onda termica del gas, un andamento del tipo:

$$\langle E(\mathbf{r}_j)|E_i(\mathbf{r}_i)\rangle = e^{-\Lambda|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2 t}. \quad (4.9)$$

La densità post-decoerenza del sistema (4.6) è, con ottima approssimazione, della forma di una sovrapposizione incoerente (v. par. 2.3) con  $p_i = |c_i|^2$ . Come si è visto, per tale sovrapposizione, non vi è interferenza. Di conseguenza: *la decoerenza di una sovrapposizione di stati è sempre accompagnata dalla soppressione degli effetti d'interferenza*. Per lo stato post-decoerenza, vale la regola classica di somma delle probabilità (cfr. par. 2.3).

Prima di passare all'esame di un semplice modello di decoerenza, discutiamo brevemente un'altra caratteristica del processo di decoerenza qui schematizzato. Dalla (4.2) si vede che gli stati della base  $\{|s_i\rangle\}$  non vengono modificati dall'interazione. Se il sistema si trova inizialmente nello stato  $|s_i\rangle$ , al termine dell'interazione (4.2) il sistema persiste nello stesso stato. A questo proposito, si dice spesso che il processo di decoerenza è un'azione *del* sistema *sull'*ambiente (nonostante questa azione abbia un'influenza sullo stesso sistema).

Chiaramente, l'interazione fra sistema e ambiente gioca un ruolo anche in meccanica classica. Una particella carica passante per uno spessore di materiale subisce perdite di energia per ionizzazione e l'analisi di questo processo può, con una certa approssimazione, essere svolta in termini puramente classici: questo è un processo di *dissipazione*, ovvero di perdita di energia da parte del sistema dovuta all'interazione con l'ambiente. A differenza dei processi di decoerenza, i processi di dissipazione *alterano* sempre gli stati del sistema. Mentre la decoerenza è formalmente espressa da un'azione del sistema sull'ambiente, come in (4.2), la dissipazione implica chiaramente un'azione reciproca fra le parti interagenti. I tempi di dissipazione sono, tipicamente, svariati ordini di grandezza superiori ai tempi di decoerenza, per cui spesso, nell'analisi dei processi di decoerenza, possiamo trascurare gli effetti dissipativi.

## 4.2 Decoerenza di uno spin - un modello semplice

In questo paragrafo descriviamo un semplice modello, originariamente introdotto da Zurek [8], e ripreso più recentemente da Cucchiatti, Paz e Zurek [1], per illustrare i meccanismi di decoerenza in un caso risolvibile analiticamente. Consideriamo uno spin  $S$  interagente con un ambiente  $\mathcal{E}$  di  $N$  spins tramite l'hamiltoniano:

$$H = (|\uparrow\rangle \langle \uparrow| - |\downarrow\rangle \langle \downarrow|) \sum_{k=1}^N \frac{g_k}{2} (|\uparrow\rangle \langle \uparrow|_k - |\downarrow\rangle \langle \downarrow|_k). \quad (4.10)$$

Nel seguito indicheremo con  $|\rangle$  e  $|\rangle_k$  i kets relativi al sistema e al  $k$ -esimo spin dell'ambiente rispettivamente e ometteremo, per brevità, gli operatori identità degli spin  $k' \neq k$  in espressioni come (4.10). Inoltre fisseremo  $\hbar = 1$ , per cui le costanti di accoppiamento  $g_k$  avranno le dimensioni di una frequenza.

Lo stato iniziale del sistema composto  $\mathcal{SE}$  è dato nella forma separabile:

$$|\Psi(0)\rangle = (a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle) \bigotimes_{k=1}^N (\alpha_k|\uparrow\rangle_k + \beta_k|\downarrow\rangle_k). \quad (4.11)$$

Dopo un tempo di interazione  $t$ , lo stato evolve in:

$$|\Psi(t)\rangle = a|\uparrow\rangle |E_\uparrow(t)\rangle + b|\downarrow\rangle |E_\downarrow(t)\rangle \quad (4.12)$$

dove:

$$\begin{aligned} |E_\uparrow(t)\rangle &= \bigotimes_{k=1}^N (\alpha_k e^{-i\frac{g_k}{2}t} |\uparrow\rangle_k + \beta_k e^{i\frac{g_k}{2}t} |\downarrow\rangle_k), \\ |E_\downarrow(t)\rangle &= \bigotimes_{k=1}^N (\alpha_k e^{i\frac{g_k}{2}t} |\uparrow\rangle_k + \beta_k e^{-i\frac{g_k}{2}t} |\downarrow\rangle_k) = |E_\uparrow(-t)\rangle. \end{aligned} \quad (4.13)$$

La densità ridotta del sistema  $\mathcal{S}$  è:

$$\rho_{\mathcal{S}}(t) = |a|^2 |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |b|^2 |\downarrow\rangle\langle\downarrow| + ab^* r(t) |\uparrow\rangle\langle\downarrow| + a^* b r(t) |\downarrow\rangle\langle\uparrow|, \quad (4.14)$$

dove  $r(t)$ , il fattore di decoerenza, è:

$$r(t) = \langle E_\downarrow(t) | E_\uparrow(t) \rangle = \prod_{k=1}^N (|\alpha_k|^2 e^{-ig_k t} + |\beta_k|^2 e^{ig_k t}) = \prod_{k=1}^N \left[ \cos(g_k t) + i(|\beta_k|^2 - |\alpha_k|^2) \sin(g_k t) \right]. \quad (4.15)$$

Dalla precedente espressione segue immediatamente:

$$\begin{aligned} \bar{r} &= 0, \\ \overline{|r|^2} &= 2^{-N} \prod_{k=1}^N \left[ 1 + (|\beta_k|^2 - |\alpha_k|^2)^2 \right], \end{aligned} \quad (4.16)$$

dove  $\bar{f}$  denota la media temporale:

$$\bar{f} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt.$$

Vediamo dunque che (eccezion fatta per casi sporadici, come  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = 1$ ) le fluttuazioni del fattore di decoerenza attorno al valor medio  $\bar{r} = 0$  sono dell'ordine di  $2^{-N}$ :

$$\overline{|r|^2} \sim 2^{-N}.$$

Si può dimostrare [1] che per un'ampia classe<sup>8</sup> di distribuzioni delle costanti di accoppiamento  $g_k$ ,  $r(t)$  è approssimativamente gaussiano:

$$r(t) \simeq e^{i\bar{E}_N t} e^{-B_N^2 t^2 / 2}, \quad (4.17)$$

dove:

$$\begin{aligned} \bar{E}_N &= \sum_{k=1}^N (|\beta_k|^2 - |\alpha_k|^2) g_k, \\ B_N^2 &= \sum_{k=1}^N 4 |\alpha_k|^2 |\beta_k|^2 g_k^2. \end{aligned} \quad (4.18)$$

<sup>8</sup>La condizione necessaria e sufficiente è che le varianze  $\langle (g_k - \langle g_k \rangle)^2 \rangle$  esistano finite. Inoltre le  $\{g_k\}$  sono assunte indipendenti.

Il tempo di decoerenza è:

$$\tau_D = \frac{1}{B_N} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^N 4|\alpha_k|^2|\beta_k|^2 g_k^2}}. \quad (4.19)$$

In particolare, per  $|\alpha_k| = |\beta_k|$  e  $g_k = g$ :

$$\tau_D = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{1}{g}.$$

Può essere interessante un confronto con il tempo di ricorrenza  $\tau_R$  per questo caso altamente ordinato. Come si vede dalla (4.15), questo è:

$$\tau_R = \frac{2\pi}{g},$$

per cui  $\tau_D = \frac{1}{2\pi\sqrt{N}}\tau_R$ . Anche in questo caso, il tempo di decoerenza è, per ambienti macroscopici (i.e.  $N \sim 10^{23}$ ), svariati ordini di grandezza inferiore al tempo di ricorrenza.

In figura 2 è rappresentato il processo di decoerenza sulla sfera di Bloch.

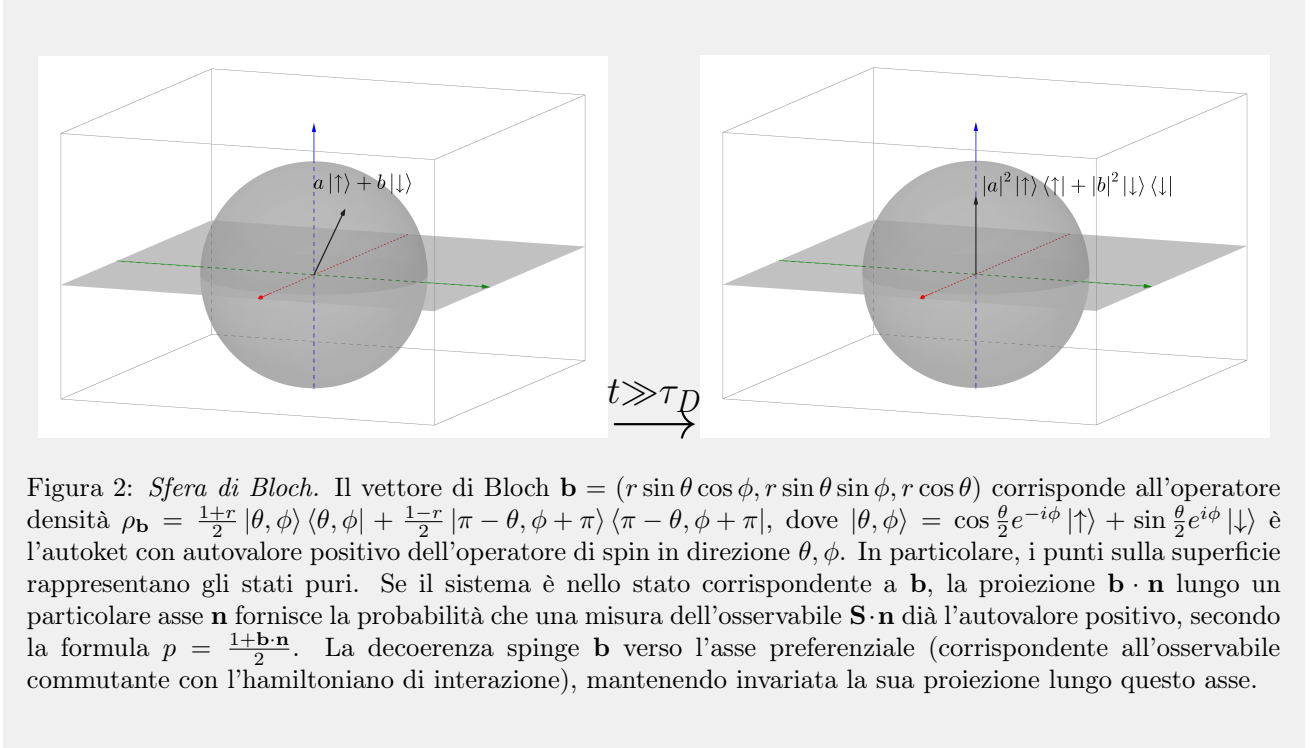


Figura 2: *Sfera di Bloch*. Il vettore di Bloch  $\mathbf{b} = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta)$  corrisponde all'operatore densità  $\rho_{\mathbf{b}} = \frac{1+r}{2} |\theta, \phi\rangle \langle \theta, \phi| + \frac{1-r}{2} |\pi - \theta, \phi + \pi\rangle \langle \pi - \theta, \phi + \pi|$ , dove  $|\theta, \phi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} |\uparrow\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} |\downarrow\rangle$  è l'autoket con autovalore positivo dell'operatore di spin in direzione  $\theta, \phi$ . In particolare, i punti sulla superficie rappresentano gli stati puri. Se il sistema è nello stato corrispondente a  $\mathbf{b}$ , la proiezione  $\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}$  lungo un particolare asse  $\mathbf{n}$  fornisce la probabilità che una misura dell'osservabile  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}$  dia l'autovalore positivo, secondo la formula  $p = \frac{1+\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}}{2}$ . La decoerenza spinge  $\mathbf{b}$  verso l'asse preferenziale (corrispondente all'osservabile commutante con l'hamiltoniano di interazione), mantenendo invariata la sua proiezione lungo questo asse.

## 5 E(nvironment)-in(duced) (super)selection

In questa sezione introduciamo il concetto di *einselection* (environment-induced superselection) ed esaminiamo alcune implicazioni della decoerenza in merito ai modelli di misura e all'emergenza del mondo classico dal substrato quantistico.

### 5.1 La selezione di un insieme di stati preferenziali

La conseguenza principale dell'interazione con l'ambiente è la selezione di un insieme preferenziale di stati, immuni al processo di decoerenza. Questa selezione restringe drasticamente il numero di stati in cui il sistema è in grado di persistere per più di un tempo di decoerenza: l'interazione con l'ambiente impone delle *regole effettive di superselezione* agli stati del sistema.

La descrizione formale della decoerenza è data da un processo di Von Neumann, come in (4.2). Gli stati iniziali  $\{|s_i\rangle\}$  del sistema sono detti *stati preferenziali*<sup>9</sup> e sono selezionati dalla dinamica dell'interazione sistema-ambiente.

Ci poniamo il problema della determinazione degli stati preferenziali. Notiamo che la dinamica (4.2) equivale a richiedere che l'operatore di evoluzione temporale:

$$U^t = e^{-i\frac{H}{\hbar}t}$$

soddisfi un'equazione del tipo:

$$U^t |s_i\rangle |E_0\rangle = |s_i\rangle U_i^t |E_0\rangle \quad (5.1)$$

per ogni stato iniziale  $|E_0\rangle$  dell'ambiente.

In generale, l'hamiltoniano del sistema composito  $\mathcal{SE}$  è dato da tre termini:

$$H = H_S + H_{\mathcal{E}} + H_{S\mathcal{E}}. \quad (5.2)$$

Le tecniche per la determinazione degli stati preferenziali  $\{|s_i\rangle\}$  a partire dall'hamiltoniano generale (5.2), sono tuttora oggetto di studio nella teoria della decoerenza. In particolare, Zurek ha sviluppato un insieme di metodi, noto come *Predictability Sieve* [9], per classificare gli stati dello spazio di Hilbert in base alla loro propensione all'entanglement con i gradi di libertà dell'ambiente. Esaminiamo qui brevemente solo un caso particolare, in cui l'insieme di stati preferenziali emerge in modo piuttosto naturale.

### Quantum-measurement limit.

Se nella (5.2) possiamo porre  $H \approx H_{S\mathcal{E}}$  (ovvero se le auto-energie del sistema e dell'ambiente si possono ritenere trascurabili), il problema della determinazione degli stati preferenziali si semplifica notevolmente. Quest'approssimazione è nota come “quantum-measurement limit” [5, paragrafo 2.8.1], in quanto si assume che lo stabilirsi di correlazioni fra  $\mathcal{S}$  ed  $\mathcal{E}$  sia un processo molto più rapido delle rispettive evoluzioni libere, come ci si aspetta, idealmente, dall'interazione fra sistema e apparato di misura. In questo caso, l'equazione (5.1) è identicamente soddisfatta se  $\{|s_i\rangle\}$  sono autostati non degeneri di una qualunque osservabile  $\hat{s}$  del sistema  $\mathcal{S}$  tale che  $[\hat{s}, H_{S\mathcal{E}}] = 0$ . Infatti, in tal caso,  $\langle s_j | H_{S\mathcal{E}} | s_i \rangle = 0$  se  $i \neq j$  per cui l'hamiltoniano di interazione assume la forma:

$$H_{S\mathcal{E}} = \sum_i |s_i\rangle \langle s_i| \otimes H_{S\mathcal{E}}^{(i)}. \quad (5.3)$$

In questo caso:

$$U^t |s_i\rangle |E_0\rangle = \exp\left(-i\frac{H_{S\mathcal{E}}}{\hbar}t\right) |s_i\rangle |E_0\rangle = |s_i\rangle \exp\left(-i\frac{H_{S\mathcal{E}}^{(i)}}{\hbar}t\right) |E_0\rangle = |s_i\rangle |E_i\rangle. \quad (5.4)$$

Un caso in cui l'identificazione dell'osservabile  $\hat{s}$  è immediata è quello in cui l'hamiltoniano di interazione assume la forma:

$$H_{S\mathcal{E}} = g\hat{s}\hat{B}. \quad (5.5)$$

Questo è il caso del modello di ambiente di spins discusso nel paragrafo 4.2 (vedi equazione (4.10)), ovvero dell'interazione fra spin e posizione di un elettrone in un apparato di Stern-Gerlach.

Possiamo ottenere una lieve generalizzazione, se supponiamo che siano trascurabili non le autoenergie, ma quelle parti delle autoenergie che non commutano con l'energia di interazione:

$$[H_S, H_{S\mathcal{E}}] \approx 0, \quad [H_{\mathcal{E}}, H_{S\mathcal{E}}] \approx 0. \quad (5.6)$$

<sup>9</sup>In letteratura si incontrano spesso i termini “pointer-states/basis/observables”, che derivano dal contesto, la teoria quantistica della misura, nel quale furono originariamente introdotti questi concetti [7].

In tal caso possiamo porre (cfr. Zurek [8, equazioni 3.2a-b-c]):

$$H_S = \sum_i \delta_i |s_i\rangle \langle s_i|, \quad H_{\mathcal{E}} = \sum_j \epsilon_j |e_j\rangle \langle e_j|, \quad H_{S\mathcal{E}} = \sum_{ij} \gamma_{ij} |s_i\rangle \langle s_i| |e_j\rangle \langle e_j|. \quad (5.7)$$

L'evoluzione di uno stato separabile  $|\Psi(0)\rangle = (\sum_i \alpha_i |s_i\rangle) \otimes (\sum_j \beta_j |e_j\rangle)$  è data da (qui  $\hbar = 1$ ):

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iHt} |\Psi(0)\rangle = \sum_{ij} \alpha_i \beta_j e^{-i(\delta_i + \epsilon_j + \gamma_{ij})t} |s_i\rangle |e_j\rangle. \quad (5.8)$$

L'operatore densità ridotta del sistema è:

$$\rho_S(t) = \text{tr}_{\mathcal{E}} |\Psi(t)\rangle \langle \Psi(t)| = \sum_{ij} \alpha_i \alpha_j^* r_{ij}(t) |s_i\rangle \langle s_j| \quad (5.9)$$

dove il fattore di decoerenza è:

$$r_{ij}(t) = e^{-i(\delta_i - \delta_j)t} \sum_k p_k e^{-i\omega_k^{ij}t}, \quad p_k = |\beta_k|^2, \quad \omega_k^{ij} = \gamma_{ik} - \gamma_{jk}. \quad (5.10)$$

Le equazioni precedenti sono ancora valide se l'ambiente si trova inizialmente in uno stato misto, descritto da una matrice densità (nella base dell'energia)  $\rho_{hk}$ , nel qual caso  $p_k = \rho_{kk}$ . A parte un fattore di fase inessenziale, vediamo che il fattore di decoerenza per elementi non diagonali è della forma:

$$f_{ij}(t) = \sum_k p_k e^{-i\omega_k^{ij}t}. \quad (5.11)$$

Valor medio e fluttuazioni del fattore di decoerenza sono dati, rispettivamente, da:

$$\bar{r} = 0, \quad \overline{|r|^2} = \sum_k p_k^2. \quad (5.12)$$

dove abbiamo assunto per semplicità che sia  $\omega_k^{ij} \neq \omega_h^{ij}$  per  $k \neq h$ .

Se assumiamo una distribuzione uniforme fra  $\nu$  autostati dell'energia di  $\mathcal{E}$ , allora le fluttuazioni sono dell'ordine di:

$$\Delta = \sqrt{\overline{r^2}} \sim \frac{1}{\sqrt{\nu}}. \quad (5.13)$$

Il numero di stati con energie inferiore a una data  $E$  cresce, per sistemi macroscopici, esponenzialmente con il numero di gradi di libertà del sistema:  $\Omega(E) = \exp(N\phi(\frac{E}{N}))$ , dove  $\phi(\frac{E}{N}) \sim 1$  ( $S_H = Nk\phi(\frac{E}{N})$  è l'entropia microcanonica di Helmholtz). Inoltre, se  $\nu(E)$  è il numero di stati con energie in un piccolo intervallo  $[E - \Delta, E]$ , l'errore relativo che si compie nel sostituire  $\nu(E)$  con  $\Omega(E)$  è trascurabile. Di conseguenza, il numero che appare a denominatore della (5.13) è tipicamente enorme (dell'ordine di  $e^N$ ).

Notiamo che dalla (5.11) segue che, per tempi sufficientemente brevi ( $t \ll \tau_D$ ), il fattore di decoerenza *non* decade esponenzialmente. Per vederlo, sviluppiamo al secondo ordine l'esponenziale nella (5.11):

$$\begin{aligned} f_{ij}(t) &\approx \sum_k p_k \left(1 - i\omega_k^{ij}t - \frac{1}{2}(\omega_k^{ij})^2 t^2\right) \\ &= 1 - i\langle \omega^{ij} \rangle t - \frac{1}{2} \langle (\omega^{ij})^2 \rangle t^2, \end{aligned} \quad (5.14)$$

per cui:

$$|r_{ij}(t)|^2 \approx 1 - \langle (\omega^{ij})^2 \rangle t^2, \quad (5.15)$$

che chiaramente è incompatibile con una decrescita esponenziale del tipo  $e^{-\frac{t}{\tau_D}}$ .

## 5.2 Un criterio di esistenza oggettiva

Zurek [10, VI.A] dà la seguente definizione operativa di *esistenza oggettiva*:

**Zurek:** “Quando un osservatore può determinare, in maniera consistente, lo stato di un sistema senza alterarlo, quello stato, secondo la nostra definizione operativa, si dirà *oggettivamente esistente*.”

In questa definizione si possono individuare due richieste. La prima, è la richiesta di una determinazione *consistente*: se due sperimentatori ripetono la stessa misura entro tempi sufficientemente brevi, i loro risultati devono concordare. In altre parole, gli stati oggettivamente esistenti, sono stati *stabili*. Chiaramente i “tempi sufficientemente brevi” devono essere alla portata di un osservatore umano: l’immediata ripetibilità è di per sé già garantita dagli assiomi della meccanica quantistica (v. par. 1.2). Non vi è alcun problema nel fatto che questa definizione contenga un elemento antropico: gli stati oggettivi che si tenta di descrivere sono un carattere *emergente* della teoria e, in quanto tale, necessariamente dipendente dalla natura dell’osservatore.

La seconda richiesta è che la determinazione non alteri lo stato del sistema. È abbastanza chiaro che per rendere operativo questo criterio sono necessari *due* osservatori, i quali possano confrontare le proprie misure e stabilire se l’intervento dell’altro abbia modificato o meno lo stato del sistema (questo è esattamente il ruolo del “record-keeper” nel gioco descritto in [10, VI.A] per illustrare questo criterio).

Effettivamente, la richiesta di consistenza è già di per sé sufficiente ad individuare gli stati preferenziali come gli unici potenzialmente in grado di soddisfare il criterio di esistenza oggettiva. Per vedere che anche la seconda richiesta può essere soddisfatta, consideriamo il seguente modello. Il sistema  $\mathcal{S}$  in uno stato generico  $|s\rangle = \sum_i c_i |s_i\rangle$  interagisce con l’ambiente  $\mathcal{E}$  nello stato  $|E_0\rangle$  secondo lo schema classico di decoerenza:

$$|s\rangle |E_0\rangle = \left( \sum_i c_i |s_i\rangle \right) |E_0\rangle \rightarrow \sum_i c_i |s_i\rangle |E_i\rangle = \sum_i c_i |s_i\rangle |e'_i\rangle |e''_i\rangle |e'''_i\rangle \dots$$

Nell’ultima uguaglianza abbiamo scritto lo stato finale dell’ambiente come prodotto di stati di diversi sottosistemi dell’ambiente, cosa che possiamo supporre valida se il sistema ha avuto modo di interagire con diversi sottosistemi reciprocamente non interagenti. Supponiamo ora che degli osservatori  $\mathcal{O}'$ ,  $\mathcal{O}''$ ,  $\mathcal{O}''' \dots$  siano in grado di effettuare misure sui diversi sottosistemi  $|e'_i\rangle$ ,  $|e''_i\rangle$ ,  $|e'''_i\rangle \dots$ . Ciò permette loro di determinare in modo univoco lo stato del sistema, senza dover interagire direttamente con quest’ultimo. Queste determinazioni sono autoconsistenti, in quanto gli stati  $|s_i\rangle$  non sono soggetti a decoerenza, nonchè interconsistenti in quanto gli stati  $|e'_i\rangle$  e  $|e''_j\rangle$ , con  $i \neq j$ , non sono correlati (se  $\mathcal{O}'$  determina  $|e'_i\rangle$ , allora  $\mathcal{O}''$  determina  $|e''_i\rangle$  con certezza). Per concretezza, supponiamo che  $|s_i\rangle$  siano degli stati localizzati di una sferetta di metallo, ed  $|e'_i\rangle$  il ket di un fotone riflesso dalla superficie della sfera posta in  $|s_i\rangle$ . Una misura dello stato del fotone consiste nell’intercettazione del fotone tramite un fotodiodo posto in un certo punto dello spazio.

## 5.3 Ruoli della decoerenza nell’emergenza del mondo classico

In meccanica classica si può sempre, in linea di principio, soddisfare al criterio di esistenza oggettiva di Zurek. Gli stati della meccanica classica descrivono una realtà oggettiva, indipendente dal nostro effettuare o meno misure sul sistema. Da questo punto di vista (che motiva il criterio di Zurek), gli stati preferenziali sono quelli che si avvicinano di più all’idealizzazione classica di stato.

Certamente, la richiesta di stabilità, come anche la possibilità di una determinazione non distruttiva, sono entrambe richieste essenziali per degli stati classici. Tuttavia, vi è un motivo più fondamentale, e più semplice, per associare gli stati non decoerenti agli stati classici: gli stati classici sono caratterizzati dall’assenza di sovrapposizioni coerenti fra di essi. Ad ogni istante si può legittimamente supporre che un sistema classico si trovi in uno ed uno solo di questi stati, senza necessariamente sapere in quale. Se è data una densità di probabilità nello spazio delle fasi, non vi sono mai termini d’interferenza nelle funzioni di probabilità delle osservabili del sistema. Tutte queste caratteristiche sono incorporate nell’operatore densità post-decoerenza (4.6), che mostra che un sistema soggetto a decoerenza è operativamente indistinguibile da un sistema classico.

Saremmo dunque tentati di identificare gli stati non decoerenti del sistema con gli stati classici. Alla questione di quali stati *possano* essere considerati classici, la decoerenza fornisce una risposta precisa in termini operativi: questi sono gli unici caratterizzati dall’assenza di sovrapposizioni coerenti. Lo studio dei modelli di decoerenza sembra indicare che questa risposta si conforma bene alle nostre aspettative. Tuttavia

non siamo obbligati a concludere che, viceversa, tutti gli stati non decoerenti corrispondano a stati classici, in quanto la decoerenza non è in alcun modo in grado di garantire che ciascuno di questi stati possa essere osservato in pratica.

## 5.4 Misura con decoerenza - lo schema di Von Neumann rivisitato

Nel paragrafo 3.2 abbiamo argomentato che la sola interazione fra sistema e apparato non è sufficiente a stabilire quale sia l'osservabile misurata dall'apparato. La semplice creazione di correlazioni del tipo (3.1) non pone alcun vincolo su quali siano gli stati in cui può essere trovato l'apparato da un osservatore e, di conseguenza, neanche sull'osservabile del sistema che viene misurata.

La situazione ci appare in una luce diversa se includiamo, nella nostra descrizione, l'interazione dell'apparato con l'ambiente. Come si è già visto nell'ambito del modello semplicissimo del paragrafo 3.2, l'inclusione di un terzo sistema  $\mathcal{E}$  alla catena  $\mathcal{SA}$  è in grado di rimuovere l'ambiguità nella base preferenziale dell'apparato.

Innanzitutto, facciamo un elenco delle caratteristiche che possiamo ascrivere ad un buon apparato di misura. Al termine di una misura, lo sperimentatore può sempre assumere che il sistema si trovi in un autostato dell'osservabile misurata: ciò significa che le diverse alternative non interferiscono dopo la misura. Ad ogni autostato del sistema, è associato uno stato "puntatore" dell'apparato. Poiché gli stati puntatore sono correlati biunivocamente agli stati dell'osservabile misurata, essi devono soddisfare le stesse richieste, ovvero, l'apparato deve trovarsi, al termine della misura, in una sovrapposizione incoerente di stati. Inoltre, se lo sperimentatore osserva il puntatore in una certa posizione, egli può essere certo che, per tempi ragionevolmente lunghi, continuerà a osservare il puntatore nella stessa posizione. Ciò individua univocamente gli stati puntatore come gli stati classici dell'apparato. D'altra parte, gli stati puntatore devono soddisfare un ulteriore criterio: essi devono mantenere correlazioni stabili con gli autostati dell'osservabile misurata. È evidente che, affinché l'apparato possa funzionare, gli stati puntatore devono soddisfare *entrambi* questi criteri.

Dunque, in questo modello, l'apparato svolge l'importante ruolo di *distruggere le relazioni di fase fra i diversi autostati dell'osservabile misurata*. Schematizziamo nuovamente il processo di misura includendo, questa volta, anche l'interazione con l'ambiente. Indichiamo con  $\mathcal{S}$  il sistema,  $\mathcal{A}$  l'apparato ed  $\mathcal{E}$  l'ambiente. Come prima, l'evoluzione di  $\mathcal{SA}$  è data da un processo di Von Neumann; in questa fase, l'ambiente interagisce debolmente con l'apparato e il sistema. Abbiamo:

$$\left(\sum_i c_i |s_i\rangle\right) |a_0\rangle |e_0\rangle \rightarrow \left(\sum_i c_i |s_i\rangle |a_i\rangle\right) |e_0\rangle. \quad (5.16)$$

Stabilite le correlazioni (5.16), il sistema cessa di interagire con l'apparato e quest'ultimo interagisce con l'ambiente. Dopo un tempo di decoerenza:

$$\left(\sum_i c_i |s_i\rangle |a_i\rangle\right) |e_0\rangle \rightarrow \sum_i c_i |s_i\rangle |a_i\rangle |e_i\rangle. \quad (5.17)$$

Lo stato finale della coppia  $\mathcal{SA}$  è una sovrapposizione incoerente:

$$\rho_{\mathcal{SA}} = \sum_i |c_i|^2 |s_i\rangle \langle s_i| |a_i\rangle \langle a_i|. \quad (5.18)$$

L'operatore densità dello stato finale (5.18) è formalmente identico a quello di una miscela propria di stati, ovvero di una situazione in cui il complesso  $\mathcal{SA}$  si trova con certezza in uno degli stati  $|s_i\rangle |a_i\rangle$  con probabilità  $|c_i|^2$ . A questo stadio, e non prima, lo sperimentatore può assumere, senza incorrere in contraddizioni, che il sistema  $\mathcal{SA}$  si trovi in uno degli stati  $|s_i\rangle |a_i\rangle$  con probabilità  $p_i = |c_i|^2$  e dichiarare conclusa la misura.

Notiamo che, sebbene l'operatore densità (5.18) possa, in linea di principio, ammettere diverse scritture diagonali, l'unica rappresentazione in cui gli stati del sistema e dell'apparato sono biunivocamente correlati è quella dell'equazione (5.18). Di fatti, se  $|\alpha\rangle$  è uno stato arbitrario dell'apparato, come si è visto al termine del paragrafo 2.2.1, la probabilità condizionata allo stato  $|\alpha\rangle$  è

$$\begin{aligned} \rho_{\mathcal{S}|\alpha} &= \sum_i w_i |s_i\rangle \langle s_i| \\ w_i &= \frac{p_i |\langle \alpha | a_i \rangle|^2}{\sum_j p_j |\langle \alpha | a_j \rangle|^2}. \end{aligned} \quad (5.19)$$



Questa rappresenta uno stato puro se e soltanto se  $w_i = 1$  per qualche  $i$ , che è in generale vero se e soltanto se  $|\alpha\rangle = |a_i\rangle$ <sup>10</sup>. La probabilità condizionata di uno stato  $|\sigma\rangle$  del sistema, è in generale  $\Pr(\sigma|\alpha) = 1$  se e solo se  $|\sigma\rangle = |s_i\rangle$  e  $|\alpha\rangle = |a_i\rangle$ .

Gli stati puntatore  $\{|a_i\rangle\}$  che appaiono nello stato finale (5.18) sono pertanto gli stati non decoerenti dell'interazione apparato-ambiente. Ciò fornisce il criterio oggettivo per stabilire quale sia l'osservabile del sistema misurata dall'apparato e risolve il problema della base preferenziale.

**Il collasso apparente del vettore di stato.** Si potrebbe essere tentati di concludere, erroneamente, che ciò costituisca una dimostrazione della regola di Born e del postulato del collasso. Del resto l'operatore densità (5.18) è identico a quello di una miscela propria, per cui le due situazioni sono sperimentalmente indistinguibili (tramite misure locali sul complesso sistema-apparato). Tuttavia, è fondamentale comprendere che, nell'interpretazione dell'operatore densità, la regola di Born è assunta *a priori*. Di conseguenza, la conclusione che la regola di Born segua dalla (5.18) è circolare. La conclusione corretta è che, dopo un tempo di decoerenza, lo sperimentatore può *assumere* che il collasso in uno degli stati  $|s_i\rangle |a_i\rangle$  sia già avvenuto. Ciò non può dar luogo a contraddizioni, poichè le diverse alternative non interferiscono dopo un tempo di decoerenza. Per questo motivo, ci si riferisce allo stato finale (5.18) come a un *collasso apparente* del vettore di stato.

## 6 Decoerenza collisionale e localizzazione

In questa sezione consideriamo un tipo di decoerenza particolarmente rilevante, la decoerenza collisionale.

La decoerenza collisionale è dovuta agli urti di un sistema macroscopico con le particelle ambientali. La conseguenza della decoerenza collisionale è la localizzazione, ovvero l'emergenza di stati localizzati come stati preferenziali selezionati dall'interazione con l'ambiente.

Discuteremo la decoerenza collisionale nell'ambito di un modello (paragrafo 6.1), dovuto a E. Joos e H. D. Zeh [2] e analizzato in modo rigoroso da K. Hornberger e J. E. Sipe [3]. L'analisi del modello porta a stabilire la master equation per l'operatore densità (paragrafo 6.2). Lo studio della master equation permette di effettuare stime numeriche sui tempi di localizzazione dovuti alla diffusione di particelle ambientali in condizioni di laboratorio tipiche.

### 6.1 Un modello di decoerenza collisionale

Il modello che consideriamo consiste di una particella di massa  $M$  immersa in un gas di  $N$  particelle di massa  $m \ll M$ , in equilibrio termico a temperatura  $T$  in un volume  $V$ . La particella massiva interagisce con le particelle del gas tramite un potenziale  $U(\mathbf{R} - \mathbf{r})$  a corto raggio, il quale dipende dalle sole posizioni relative dei centri di massa delle due particelle. Di conseguenza è sufficiente considerare questi gradi di libertà<sup>11</sup>. Lo stato iniziale del sistema particella-gas è dato da:

$$\rho(0) = \rho_M(0) \otimes \rho_{\mathcal{E}} \quad (6.1)$$

dove  $\rho_{\mathcal{E}}$  è la densità canonica del gas. Inoltre si suppone il gas sufficientemente diluito, in modo da poter trascurare le interazioni fra le particelle leggere e gli effetti dovuti all'indistinguibilità. Sotto queste ipotesi, la densità canonica è esprimibile come prodotto di densità di particella singola:

$$\rho_{\mathcal{E}} = \rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \cdots \otimes \rho_N, \quad (6.2)$$

dove:

$$\rho_i \propto \exp \left[ -\frac{\beta \hat{\mathbf{p}}_i^2}{2m} \right]. \quad (6.3)$$

L'analisi presentata da Hornberger e Sipe [3, II] si articola essenzialmente in quattro passaggi:

<sup>10</sup>Evidentemente si possono avere delle correlazioni "accidentali". Supponiamo ad esempio di avere  $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$ ,  $p_3 = p_4 = \dots = 0$ . Se  $|\alpha\rangle = \frac{|a_1\rangle + |a_3\rangle}{\sqrt{2}}$ , allora  $\Pr(s_1|\alpha) = 1$ .

<sup>11</sup>Non si tiene conto di spin, orientazione delle molecole, eccitazioni interne ecc.

1. Studio della decoerenza in seguito ad un singolo urto con una particella leggera localizzata.
2. Calcolo esplicito del fattore di decoerenza per un urto con uno stato gaussiano di minima indeterminazione.
3. Decomposizione della densità canonica in una combinazione convessa di stati gaussiani.
4. Calcolo della variazione dell'elemento di matrice in un intervallo di tempo discreto.

Rimandiamo il lettore interessato all'analisi all'articolo di Hornberger e Sipe. Ci limitiamo qui a enunciare il risultato fondamentale (6.4), ovvero la master-equation dell'operatore densità.

## 6.2 Studio della master equation

Sotto le ipotesi sopra discusse, si trova che l'elemento di matrice  $\langle \mathbf{R}_1 | \rho_M(t) | \mathbf{R}_2 \rangle = \rho_M(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, t)$  soddisfa, per tempi brevi rispetto all'evoluzione libera (data dall'hamiltoniano  $H^0$  in assenza dell'interazione con l'ambiente), l'equazione differenziale:

$$\frac{\partial \rho_M}{\partial t}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, t) = -F(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) \rho_M(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, t), \quad (6.4)$$

$$F(\mathbf{R}) = \int_0^\infty \frac{n}{m} \nu(q) q dq \int \frac{d\mathbf{n}_1 d\mathbf{n}_2}{4\pi} (1 - e^{iq(\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2) \cdot \mathbf{R}/\hbar}) |f(q\mathbf{n}_2 \leftarrow q\mathbf{n}_1)|^2, \quad (6.5)$$

$$\nu(q) = 4\pi q^2 \left( \frac{\beta}{2\pi m} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\beta^2 q^2}{2m}}. \quad (6.6)$$

Nell'espressione precedente  $n = \frac{N}{V}$  è la densità numerica del gas,  $d\mathbf{n}$  un elemento di angolo solido in direzione  $\mathbf{n}$  e  $\nu(q)$  la distribuzione del modulo dell'impulso di una particella del gas. Inoltre  $f(q\mathbf{n}_2 \leftarrow q\mathbf{n}_1)$  è l'ampiezza di diffusione del processo  $q\mathbf{n}_1 \rightarrow q\mathbf{n}_2$  secondo il potenziale (di particella singola)  $U(\mathbf{r})$ , legata alla sezione d'urto differenziale tramite<sup>12</sup>:

$$|f(q\mathbf{n}_2 \leftarrow q\mathbf{n}_1)|^2 = \frac{d\sigma}{d\Omega}(q, \widehat{\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2}). \quad (6.7)$$

Ne segue che, per tempi sufficientemente brevi,  $\rho_M(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, t)$  ha un andamento esponenziale:

$$\rho_M(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, t) = \exp[-F(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)t] \rho_M(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, 0), \quad (6.8)$$

per cui  $F(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)$  definisce un *tasso di decoerenza*, e il tempo di decoerenza è

$$\tau_D(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = \frac{1}{F(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)}. \quad (6.9)$$

Il tasso di decoerenza è reale: per dimostrarlo, notiamo innanzitutto che se  $g(\mathbf{n})$  è una funzione definita sulla sfera unitaria allora  $\int d\mathbf{n} g(\mathbf{n}) = \int d\mathbf{n} g(-\mathbf{n})$ , come si dimostra facilmente utilizzando coordinate polari. Scrivendo l'esponenziale nell'integrale (6.5) nella forma

$$e^{iq(\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2) \cdot \mathbf{R}/\hbar} = \cos q \frac{(\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2) \cdot \mathbf{R}}{\hbar} + i \sin q \frac{(\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2) \cdot \mathbf{R}}{\hbar},$$

notiamo che il termine  $\sin(\cdot)$  è dispari rispetto alle operazioni  $\mathbf{n}_1 \rightarrow -\mathbf{n}_1$ ,  $\mathbf{n}_2 \rightarrow -\mathbf{n}_2$ . Inoltre l'ampiezza di diffusione è pari rispetto a questa operazione, poichè il potenziale sfericamente simmetrico che consideriamo è invariante per parità. Di conseguenza, la parte immaginaria dell'integrale (6.5) è nulla.

Consideriamo i due casi particolari in cui la distanza  $|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2|$  sia molto maggiore (minore) della lunghezza d'onda termica  $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}}$ , corrispondente all'impulso termico  $p = \frac{h}{\lambda} = \sqrt{2\pi mkT}$ . Nel primo caso,  $|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2| \gg \lambda$ , il fattore  $e^{iq(\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2) \cdot \mathbf{R}/\hbar}$  nell'integrale (6.5) oscilla rapidamente per tutti i valori di  $q$

<sup>12</sup>Assumiamo qui che il potenziale di interazione  $U$  sia sfericamente simmetrico, di modo che l'ampiezza di diffusione (e quindi la sezione d'urto differenziale) dipenda unicamente dal modulo dell'impulso e dall'angolo di diffusione.

per cui la distribuzione degli impulsi  $\nu(q)$  è sensibilmente diversa da zero, per cui si può porre l'integrale derivante da questo singolo termine uguale a zero. Di conseguenza:

$$F(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) \stackrel{|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2| \gg \lambda}{=} \int_0^\infty \frac{n}{m} \nu(q) q dq \int \frac{d\mathbf{n}_1 d\mathbf{n}_2}{4\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega}(q, \widehat{\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2}),$$

dove abbiamo usato la (6.7). Svolgendo l'integrale in  $d\mathbf{n}_2$  troviamo:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) &\stackrel{|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2| \gg \lambda}{=} \int_0^\infty \frac{n}{m} \nu(q) q dq \int \frac{d\mathbf{n}_1}{4\pi} \sigma(q) \\ &= \int_0^\infty \frac{nq}{m} \sigma(q) \nu(q) dq, \end{aligned} \quad (6.10)$$

dove abbiamo usato il fatto che la sezione d'urto differenziale non dipende dalla direzione iniziale ma soltanto dall'angolo  $\widehat{\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2}$  (vedi Nota 12), per cui la sezione d'urto totale dipende solo dal modulo  $q$ . Infine, riconoscendo che  $\frac{n\nu(q)q}{m} dq$  è il modulo della densità di flusso delle particelle con impulsi fra  $q$  e  $q + dq$ , vediamo che  $\frac{n\nu(q)q}{m} \sigma(q) dq = d\Gamma(q)$  è il tasso di diffusione di queste particelle e l'ultimo integrale in (6.10) è semplicemente:

$$F(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) = \Gamma, \quad (6.11)$$

il tasso di diffusione totale (ovvero il numero di urti per unità di tempo della particella pesante). La (6.11) ha un significato fisico evidente: nel limite di onde corte,  $\lambda \ll |\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|$ , un singolo urto è sufficiente a risolvere la posizione della particella massiva, per cui il tempo di decoerenza è semplicemente il tempo tipico di collisione.

Consideriamo invece il limite di onde lunghe, ossia  $\lambda \gg |\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|$ . In questo caso, l'esponenziale nell'integrale (6.5) si può sviluppare in serie di potenze:

$$1 - e^{iq(\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2) \cdot (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)/\hbar} = -i \frac{q(\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2) \cdot (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)}{\hbar} + \frac{q^2}{2\hbar^2} [(\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2) \cdot (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)]^2 + \dots \quad (6.12)$$

L'integrale derivante dal primo termine dello sviluppo è identicamente nullo. Quanto al secondo termine, notiamo che poichè la sezione d'urto differenziale è invariante per rotazioni, il tasso di diffusione non dipende dall'orientazione di  $\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2$ , ma soltanto dal modulo  $|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2|$ . Di conseguenza, possiamo sostituire il termine  $[(\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2) \cdot (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)]^2$  con una media rispetto alle possibili direzioni di  $\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2$ . Questa media è data da:

$$\overline{[(\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2) \cdot (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)]^2} = |\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2|^2 |\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2|^2 \int \frac{d\hat{\mathbf{R}}_{12}}{4\pi} (\hat{\mathbf{n}}_{12} \cdot \hat{\mathbf{R}}_{12})^2 = |\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2|^2 \frac{2}{3} (1 - \cos(\widehat{\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2})). \quad (6.13)$$

Sostituendo nell'integrale (6.5), troviamo:

$$F(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) \stackrel{|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2| \ll \lambda}{=} |\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|^2 \int_0^\infty \frac{nq}{m} \nu(q) \frac{q^2}{\hbar^2} dq \int \frac{d\mathbf{n}_1 d\mathbf{n}_2}{4\pi} \frac{1}{3} (1 - \cos(\widehat{\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2})) \frac{d\sigma}{d\Omega}(q, \widehat{\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2}).$$

In analogia al caso precedente, possiamo considerare l'integrale doppio in  $d\mathbf{n}_1 d\mathbf{n}_2$  come una sezione d'urto efficace:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{eff}}(q) &= \int \frac{d\mathbf{n}_1 d\mathbf{n}_2}{4\pi} \frac{1}{3} (1 - \cos(\widehat{\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2})) \frac{d\sigma}{d\Omega}(q, \widehat{\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2}) \\ &= \frac{2\pi}{3} \int_{-1}^1 d \cos \theta_{12} (1 - \cos \theta_{12}) \frac{d\sigma}{d\Omega}(q, \theta_{12}). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Per cui:

$$F(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) \stackrel{|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2| \ll \lambda}{=} |\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|^2 \int_0^\infty \frac{nq}{m} \nu(q) \frac{q^2}{\hbar^2} \sigma_{\text{eff}}(q) dq. \quad (6.15)$$

L'integrale nella (6.15), che ha le dimensioni  $L^{-2}T^{-1}$ , prende il nome di *costante di diffusione*  $\Lambda$  e contiene i dettagli dell'interazione con l'ambiente. In termini della costante di diffusione, possiamo scrivere il tasso di decoerenza nella forma semplice:

$$F(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) \stackrel{|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2| \ll \lambda}{=} \Lambda |\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2|^2. \quad (6.16)$$

Come si vede, nel limite di onde lunghe, il tempo di decoerenza dipende dalla distanza  $|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2|$ :

$$\tau_D(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) \stackrel{|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2| \ll \lambda}{=} \frac{1}{\Lambda |\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2|^2}, \quad (6.17)$$

a differenza del limite di onde corte in cui il tempo di decoerenza è costante (vedi (6.11)).

### 6.3 Stime numeriche

Possiamo utilizzare i risultati del paragrafo precedente per effettuare delle semplici stime numeriche dei tempi di decoerenza dovuti alle collisioni con molecole d'aria in condizioni da laboratorio<sup>13</sup>.

Consideriamo una particella massiva di raggio  $a$  e supponiamo che la sezione d'urto differenziale che appare nella (6.5) sia semplicemente la sezione d'urto geometrica,  $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a^2}{4}$ . Allora il fattore di decoerenza, nel limite di onde corte, è (vedi la (6.10)):

$$\begin{aligned} F(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) \stackrel{|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2| \gg \lambda}{=} & \frac{na^2}{4m} \int_0^\infty q\nu(q) dq \\ = & \frac{na^2}{4m} \sqrt{\frac{8}{\pi} mkT}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Nel limite di onde lunghe si ha invece dalla (6.14)  $\sigma_{\text{eff}} = \frac{\pi a^2}{3}$  e:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) \stackrel{|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2| \ll \lambda}{=} & |\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|^2 \frac{\pi a^2}{3} \frac{n}{m\hbar^2} \int_0^\infty q^3 \nu(q) dq \\ = & \frac{8}{3\hbar^2} n (2\pi m)^{\frac{1}{2}} a^2 (kT)^{\frac{3}{2}} |\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|^2. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Se sostituiamo  $n = \frac{p}{kT}$ , dove  $p$  è la pressione del gas, otteniamo:

$$F(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) \stackrel{|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2| \gg \lambda}{=} \frac{pa^2}{\sqrt{2\pi mkT}} \quad (6.20)$$

$$F(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) \stackrel{|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2| \ll \lambda}{=} \frac{8pa^2 \sqrt{2\pi mkT}}{3\hbar^2} |\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|^2 \quad (6.21)$$

Notiamo che la (6.20) ha un significato intuitivo, in quanto  $pa^2$  è proporzionale all'impulso scambiato per unità di tempo, mentre  $\sqrt{2\pi mkT}$  è proporzionale all'impulso scambiato in un urto singolo. Di conseguenza,  $\frac{pa^2}{\sqrt{2\pi mkT}}$  è proporzionale al numero d'urti per unità di tempo  $\Gamma$ , e il fattore di proporzionalità risulta essere 1. Se esprimiamo i parametri che appaiono nelle (6.20) e (6.21) in unità comode:

$$F(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) \stackrel{|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2| \gg \lambda}{=} 1.541 \cdot 10^{24} \times \left(\frac{p}{1 \text{ atm}}\right) \left(\frac{T}{300^\circ \text{K}}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{1 \text{ u.m.a.}}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{a}{1 \text{ cm}}\right)^2 \text{ s}^{-1} \quad (6.22)$$

$$F(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) \stackrel{|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2| \ll \lambda}{=} 1.597 \cdot 10^{42} \times \left(\frac{p}{1 \text{ atm}}\right) \left(\frac{T}{300^\circ \text{K}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{1 \text{ u.m.a.}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{a}{1 \text{ cm}}\right)^2 \left(\frac{|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|}{1 \text{ cm}}\right)^2 \text{ s}^{-1} \quad (6.23)$$

<sup>13</sup>Ulteriori stime sui tempi di decoerenza collisionale (ad esempio dovuta alla diffusione di fotoni termici) si possono trovare in [5, 3.4.1]. Inoltre, in [5, 9.3.1] si può trovare un'interessante applicazione in ambito neurologico della teoria sopra esposta.

possiamo ottenere facilmente delle stime dei tempi di decoerenza in condizioni standard. Prendiamo come esempio la decoerenza collisionale dovuta a un gas di molecole d'ossigeno  $O_2$ ; per questa molecola si ha:

$$m_{O_2} = 32 \text{ u.m.a.} = 2.657 \cdot 10^{-23} \text{ g.} \quad (6.24)$$

Con:

$$h = 6.626 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{s}, \quad kT(T = 300 \text{ °K}) = 4.141 \cdot 10^{-14} \text{ erg} \quad (6.25)$$

abbiamo, a temperatura ambiente, una lunghezza d'onda termica pari a:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}} = 1.782 \cdot 10^{-9} \text{ cm} = 0.252 \text{ \AA}. \quad (6.26)$$

Consideriamo una particella di raggio  $a = 1 \mu\text{m}$  (dell'ordine di grandezza di una cellula). Nel limite di onde corte e a pressione atmosferica, abbiamo:

$$F(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) \stackrel{|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2| \gg \lambda}{=} 2.72 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}, \quad (6.27)$$

mentre nel limite di onde lunghe, con  $|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2| = 10^{-2} \text{ \AA}$ :

$$F(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) \stackrel{|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2| \ll \lambda}{=} 9.04 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}. \quad (6.28)$$

Questo corrisponde ai tempi di decoerenza:

$$\begin{aligned} \tau_D(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) &\stackrel{|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2| \gg \lambda}{=} 3.7 \cdot 10^{-16} \text{ s} \\ \tau_D(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) &\stackrel{|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2| \ll \lambda}{=} 1.1 \cdot 10^{-15} \text{ s} \end{aligned} \quad (6.29)$$

Per confronto, consideriamo il tempo tipico di allargamento di un pacchetto gaussiano

$$\psi(x, t = 0) = \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{x^2}{2\sigma^2} \right] \quad (6.30)$$

secondo l'equazione di Schrödinger. Questo evolve in

$$\psi(x, t) = \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma(t)} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{x^2}{2\sigma(t)^2} \right]$$

con

$$\sigma(t) = \sigma \sqrt{1 + \frac{h^2 t^2}{M^2 \sigma^4}}, \quad (6.31)$$

per cui il tempo di allargamento è dato da:

$$\tau_S = \frac{M\sigma^2}{h}. \quad (6.32)$$

Per un oggetto di estensione  $a = 1 \mu\text{m}$ , una massa tipica potrebbe essere  $M = \frac{1 \text{ g}}{\text{cm}^3} a^3 = 10^{-12} \text{ g}$ , per cui, ponendo  $\sigma = 10^{-2} \text{ \AA}$  si ha:

$$\tau_S \approx 10^{-5} \text{ s}, \quad (6.33)$$

svariati ordini di grandezza superiore ai tempi di decoerenza (6.29).

Questo semplice esempio mostra che la decoerenza collisionale è estremamente efficace per oggetti mesoscopici in condizioni standard.

## 7 Osservazioni conclusive

### 7.1 Il ruolo negativo della decoerenza

In questa dissertazione si è tentato di descrivere le restrizioni, poste dall'interazione con l'ambiente, sulle possibili osservazioni sperimentali di un individuo dotato di una risoluzione temporale limitata. Riguardo l'essenza del fenomeno della decoerenza, riteniamo non vi sia nulla da aggiungere all'equazione:

$$\left( \sum_i c_i |s_i\rangle \right) |E_0\rangle \rightarrow \sum_i c_i |s_i\rangle |E_i\rangle.$$

Essa contiene tanto il carattere globale del fenomeno, ossia la delocalizzazione delle sovrapposizioni di stati nell'ambiente, quanto quello locale, cioè la perdita delle relazioni di fase tra i diversi stati del sistema. In quest'ultima sezione, vogliamo fare il punto delle principali implicazioni della decoerenza.

Possiamo riassumere la lezione della decoerenza in poche, semplici proposizioni. Il primo insegnamento che possiamo trarne è il seguente:

**I.** *Non abbiamo bisogno di postulare nessun “taglio” fra mondo classico e mondo quantistico.*

I paradossi, derivanti da un'applicazione erronea della meccanica quantistica ai sistemi macroscopici, scompaiono non appena si tenga propriamente conto dell'interazione con l'ambiente. Il principio di sovrapposizione, il “principio positivo fondamentale della meccanica quantistica” [4, § 2], è effettivamente invalidato, per sistemi macroscopici, dalla meccanica quantistica stessa. Questo è il contenuto delle regole di superselezione indotte dall'ambiente.

Inoltre, non vi è alcun bisogno di cambiare radicalmente la concezione di “mondo classico”, salvo per il fatto di riconoscere in quest'ultimo un carattere emergente dal substrato quantistico. Di fatto, il collasso apparente del vettore di stato, indotto dalla decoerenza, garantisce la possibilità di assumere, ad ogni istante, l'esistenza di uno stato classico ben definito, e questo è quanto è necessario per parlare consistentemente di meccanica classica. Il gatto di Schrödinger è sempre *o vivo o morto*, mai in una sovrapposizione di stati.

**II.** *La meccanica quantistica è di per sé in grado di definire le osservabili classiche.*

Questo è un altro punto di forza della teoria della decoerenza, che non si limita a postulare l'esistenza di un insieme di stati particolarmente robusti rispetto all'entanglement con l'ambiente, ma è in grado di predire *quali* siano questi stati. Così, siamo ora in grado di comprendere l'onnipresenza dell'osservabile classica “posizione” come una conseguenza del fatto che i potenziali di interazione sono tipicamente funzione di questa osservabile.

Si è anche visto come la selezione degli stati preferenziali sia rilevante nei confronti del problema della misura, in quanto pone dei vincoli precisi su come un apparato debba essere costruito affinché possa funzionare. Alla base di queste conclusioni vi sono due premesse: la premessa maggiore è che l'apparato possa essere descritto in termini quantomeccanici, mentre la premessa minore è che il meccanismo con cui l'apparato acquisisce informazione circa il sistema sia l'entanglement.

Queste prime due proposizioni sono del tutto qualitative: esse affermano che la meccanica quantistica contiene la meccanica classica, e non vi è in ciò nulla di contraddittorio<sup>14</sup>. La terza proposizione è invece di tipo quantitativo e giustifica l'applicazione a priori della meccanica classica al mondo macroscopico:

**III.** *La decoerenza è un processo estremamente efficace.*

Il rapporto fra meccanica classica e meccanica quantistica è, in un certo senso, simile al rapporto fra termodinamica e meccanica statistica.

I principi della termodinamica non contengono, di per sé, alcun riferimento alle dimensioni del sistema descritto. La meccanica statistica mostra che le fluttuazioni delle variabili estensive esistono, e sono dell'ordine di  $\sqrt{N}$ , dove  $N$  caratterizza le dimensioni del sistema. D'altra parte, molti esperimenti sono caratterizzati da un potere risolutivo costante, che per variabili estensive corrisponde ad una risoluzione proporzionale a  $N$ . Per tale classe di esperimenti, le leggi della termodinamica costituiscono un modello esatto. È per questo che la termodinamica non ha bisogno di fare riferimento alle dimensioni del sistema.

Allo stesso modo, le leggi di Newton non fanno riferimento alle dimensioni del sistema. La meccanica quantistica mostra che le sovrapposizioni di stati classici possono esistere per un tempo di decoerenza. Inoltre, come si è potuto intravedere dalla discussione sulla decoerenza collisionale, il tempo di decoerenza è, per sistemi macroscopici, talmente breve che si può semplicemente porre uguale a zero. Quando questo è possibile, le leggi di Newton costituiscono un modello esatto. Se, da una parte, ciò è altamente auspicabile, in quanto giustifica la meccanica classica come teoria *de facto* dei sistemi macroscopici, dall'altra ciò rende il compito dello sperimentatore nel campo della decoerenza tremendamente arduo.<sup>15</sup>

---

<sup>14</sup>La parola “contiene” dev'essere, certamente, contestualizzata. I limiti (meccanica quantistica)→(meccanica classica) da una parte, (meccanica relativistica)→(meccanica classica) dall'altra, hanno un significato totalmente differente. Nel secondo caso possiamo, senza ambiguità, identificare il limite con una semplice operazione matematica:  $\frac{v}{c} \rightarrow 0$ . Nel primo caso, invece, il limite richiede necessariamente un'interpretazione. Dev'essere così, dato che la descrizione *cinematica* dei sistemi quantistici (lo spazio di Hilbert) è affatto diversa dalla descrizione classica (lo spazio delle fasi).

<sup>15</sup>Con ciò non si intende dire che non vi sia stato, dalle prime formalizzazioni della teoria della decoerenza fino ad oggi, nessun progresso in campo sperimentale. Il lettore interessato ad una rassegna dei principali esperimenti sulla decoerenza può consultare [5, Cap. 6].

Possiamo ora riconoscere il ruolo essenzialmente negativo della decoerenza nei confronti dell'emergenza del classico. Essa definisce la realtà classica riducendo l'insieme degli stati effettivamente osservabili per un dato sistema, ovvero rendendo impossibile l'osservazione di interferenze fra tali stati. Ciò è, in ultima analisi, una conseguenza del fondamentale dualismo che caratterizza le leggi della Natura: le interazioni sono locali; gli stati sono non-locali. Non sembra esagerato affermare che l'intuizione di questa conseguenza ha costituito un passo importante per la comprensione della meccanica quantistica e del suo carattere universale. La decoerenza è la controparte negativa del principio di sovrapposizione, necessaria per l'esistenza del mondo classico così come ci appare.

## Riferimenti bibliografici

- [1] Cucchietti F. M., Paz J. P., Zurek W. H., “Gaussian decoherence from random spin environments”, *Phys. Rev. A* **72**, 052113 (2005).
- [2] Joos E., Zeh H. D., “The emergence of classical properties through interaction with the environment”, *Z. Phys. B: Condens. Matter* **59**, 223-243 (1985).
- [3] Hornberger K., Sipe J. E., “Collisional decoherence reexamined”, *Phys. Rev. A* **68**, 012105 (2003).
- [4] Landau L. D., Lifšits E. M., *Fisica Teorica, III: Meccanica quantistica. Teoria non relativistica*, Editori Riuniti, 1976.
- [5] Schlosshauer M., *Decoherence and the quantum-to-classical transition*, Springer-Verlag, 2007.
- [6] Zeh H. D., “On the interpretation of measurement in quantum theory”, *Found. Phys.* **1**, 69-76 (1970).
- [7] Zurek W. H., “Pointer basis of quantum apparatus: Into what mixture does the wave packet collapse?”, *Phys. Rev. D* **24**, 1516-1525 (1981).
- [8] Zurek W. H., “Environment-induced superselection rules”, *Phys. Rev. D* **26**, 1862-1880 (1982).
- [9] Zurek W. H., “Preferred states, predictability, classicality, and the environment-induced decoherence”, *Prog. Theor. Phys.* **89**, 281-312 (1993).
- [10] Zurek W. H., “Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical”, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 715-775 (2003).