

Teoria della misura e analisi funzionale

Valerio Gherardi

11 febbraio 2024

Indice

1	Introduzione	4
1.1	Problemi Variazionali	4
1.2	Teoria della misura	6
1.3	Misura di Peano-Jordan	7
I	Misure e integrazione astratta	8
2	Misure astratte	8
2.1	Algebre e σ -algebre	8
2.2	Misure non negative	9
2.3	Completamento della misura	12
3	Misure esterne e premisure	14
3.1	Misure esterne e teorema di Carathéodory	14
3.2	Premisure e teorema di Hahn-Kolmogorov	15
4	Misura di Lebesgue	18
4.1	Definizione della misura di Lebesgue	18
4.2	Proprietà della misura di Lebesgue	20
4.3	Confronto con la misura di Peano-Jordan	23
4.4	Esempi e controesempi	23
4.5	Confronto fra integrale di Riemann e integrale di Lebesgue	26
4.6	Misura di Lebesgue-Stieltjes	28
5	Integrazione astratta	35
5.1	Funzioni misurabili	35
5.1.1	Definizione	35
5.1.2	Stabilità delle funzioni misurabili	37
5.1.3	Funzioni semplici	39
5.1.4	Misurabilità e insiemi di misura nulla	40
5.2	Integrazione di funzioni positive	43
5.3	Integrazione di funzioni complesse	48
5.4	Integrazione e insiemi di misura nulla	50
5.5	Teoremi sulle funzioni integrabili	53
5.6	Integrali dipendenti da parametri	55
5.7	Confronto fra nozioni di convergenza	57
5.8	Problemi	58
II	Sviluppi del formalismo	60

6	Spazi prodotto	60
6.1	Prodotti di σ -algebre	60
6.2	Misura prodotto	61
6.3	Teorema di Fubini-Tonelli	64
6.4	Completamento della misura prodotto	67
6.5	Funzioni di distribuzione	70
6.6	Convoluzioni	72
6.7	Controesempi al teorema di Fubini	73
7	Misure con segno e misure complesse	75
7.1	Definizioni	75
7.2	Misure con segno: decomposizione di Hahn	76
7.3	Teorema di Radon-Nikodym	81
8	Differenziabilità	87
8.1	Differenziazione di misure	87
8.1.1	Motivazione	87
8.1.2	Definizioni	88
8.1.3	Punti di Lebesgue	89
8.2	Funzioni non decrescenti	93
8.3	Funzioni a variazione limitata	94
8.4	Funzioni assolutamente continue	97
8.5	Teoremi del calcolo fondamentale	99
8.6	Collegamento con le misure di Lebesgue-Stieltjes	100
9	Funzioni convesse	101
9.1	Generalità	101
9.2	Disuguaglianza di Jensen	102
III	Spazi L^p	104
10	Spazi L^p	105
10.1	Disuguaglianze di Hölder e Minkowski	105
10.2	Completezza degli spazi L^p	106
10.3	Spazio $L^\infty(\mu)$	107
10.4	Caso $0 < p < 1$	109
10.5	Confronto fra spazi L^p	110
10.6	Spazi ℓ^p	111
10.7	Appendice: serie totalmente convergenti	113
11	Ulteriori proprietà degli spazi L^p	114
11.1	Teoremi di densità (caso generale)	114
11.1.1	Appendice: il Lemma di Urysohn	115
11.2	Separabilità di $L^p(\mathbb{R}^N)$	116
11.2.1	Non separabilità di $L^\infty(\mu)$	117
11.3	Convoluzioni	118
11.4	Regolarizzazione per convoluzioni. Densità di $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$	121
11.5	Duale di L^p	123
11.5.1	Caso $p = \infty$	127
11.5.2	Appendice: duale di uno spazio vettoriale normato	128
IV	Appendici	130

A	Teoria della probabilità	130
A.1	Funzioni di distribuzione	130
A.2	Valori attesi	130
A.3	Disuguaglianze	131
A.4	Generalizzazioni a vettori casuali	132
A.5	Indipendenza	133
A.6	Tipi di convergenza	135
A.7	Variabili casuali dipendenti da parametri	139
A.8	Funzione generatrice dei momenti	140
A.9	Applicazioni della funzione generatrice	141
A.10	Probabilità condizionale	143
B	Misure di Borel su \mathbb{R}	151
C	Integrali a valori in uno spazio di Banach separabile	152
D	Problemi	155
D.1	Misura di Peano-Jordan e integrale di Riemann	155
D.2	Misura di Lebesgue	162
D.3	Spazi L^p	162

1 Introduzione

1.1 Problemi Variazionali

Uno dei campi di applicazione dei metodi dell'analisi funzionale è quello dei problemi variazionali.

Esempio 1.1 (La catenaria). Consideriamo una corda omogenea di lunghezza ℓ e massa M , i cui estremi siano fissati nei punti $A = (0, h)$, $B = (x_B, h)$, sospesa nel campo gravitazionale. Il problema consiste nel determinare la configurazione di equilibrio della curva, che sarà tale da minimizzare l'energia potenziale:

$$U = \int dm gy.$$

La densità lineare della corda $\mu = \frac{M}{\ell}$ si suppone costante. Matematicamente, il problema consiste nel determinare il minimo¹, qualora esista unico, del funzionale:

$$U[y] = \mu g \int_0^{x_B} \sqrt{1 + y'(x)^2} y(x) dx,$$

nello spazio delle curve $y: [0, x_B] \rightarrow \mathbb{R}$ (sufficientemente regolari; ad esempio C^1) tali che:

$$y(0) = y(x_B) = h, \quad \ell = \int_0^{x_B} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx.$$

Possiamo astrarre dall'esempio precedente le caratteristiche principali di un problema di analisi variazionale. Gli ingredienti sono:

- Uno spazio di funzioni X con opportune condizioni di regolarità + condizioni al contorno.
- Un funzionale $\mathcal{F}: X \rightarrow [-\infty, \infty]$.

Il problema della ricerca dei minimi di \mathcal{F} si può impostare come segue. Si definisce:

$$\mu \equiv \inf_{x \in X} \mathcal{F}[x]$$

Per semplificare la discussione, supponiamo che valga $\mu \in \mathbb{R}$, ovvero che il funzionale sia inferiormente limitato (come nell'esempio della catenaria, in cui $y(x) \geq h - \ell$ in ogni caso). Formalmente, il problema si risolve come segue:

1. Si considera una successione minimizzante x_n tale che $\mathcal{F}[x_n] \rightarrow \mu$.
2. Supponendo che X sia compatto, esiste un $x \in X$ tale che $x_{n_k} \rightarrow x$ per qualche sottosuccessione n_k .
3. Supponendo che \mathcal{F} sia semicontinuo inferiormente, ovvero:

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}[\xi_k] \geq \mathcal{F}[\xi] = \mathcal{F}\left[\lim_{k \rightarrow \infty} \xi\right],$$

per ogni successione $\{\xi_k\} \subseteq X$ convergente, si ha necessariamente:

$$\mu \geq \mathcal{F}[x],$$

da cui segue, per definizione di μ , $\mathcal{F}[x] = \mu$.

Il punto "2" sottintende chiaramente il problema della definizione di una topologia su X , e questo è un problema assolutamente non banale.

Nel caso finito-dimensionale, $X \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$, la richiesta di compattezza si traduce nella semplice richiesta che X sia chiuso e limitato. Di fatto vale il seguente:

¹Più in generale, i punti stazionari.

²O, più in generale, uno spazio vettoriale L di dimensione finita, con la topologia indotta da una qualsiasi norma.

Teorema 1.2. *Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio vettoriale normato (reale o complesso). Allora le palle chiuse di X sono compatte se e solo se $\dim X < \infty$.*

Dimostrazione. Poichè ogni palla chiusa in X è omeomorfa alla palla unitaria B , è sufficiente dimostrare che questa non è compatta.

Supponiamo per chiarezza che X sia uno spazio vettoriale complesso. Se $\dim X = n < \infty$, fissata una base $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, l'applicazione lineare:

$$F\left(\sum_i \alpha_i x_i\right) \mapsto (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

che associa a un vettore $x \in X$ le sue coordinate in \mathbb{C}^n rispetto alla base scelta, è un omeomorfismo (poichè la norma su X è equivalente alla norma definita dalla base $\{x_i\}$). Poichè è lineare, essa è anche limitata, per cui $F(B)$ è un sottoinsieme chiuso e limitato di \mathbb{C}^n . Di conseguenza $F(B)$ è compatto e $B = F^{-1}(F(B))$ è compatto.

Supponiamo invece $\dim X = \infty$. Definiamo una successione $(y_n) \subset B$ come segue. Siano $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ vettori linearmente indipendenti in X e sia E_n l'involuppo lineare dei vettori $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Definiamo:

$$y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$$

e supponiamo di aver definito y_1, y_2, \dots, y_n in modo tale che:

$$\|y_k\| = 1, \quad y_k \in E_k, \quad \rho(y_k, E_{k-1}) > \frac{1}{2}$$

per $k = 2, 3, \dots, n$. Poichè i vettori $\{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$ sono linearmente indipendenti, $x_{n+1} \notin E_n$. Poichè E_n è chiuso, la distanza:

$$\rho(x_{n+1}, E_n) = \inf_{x \in E_n} \|x_{n+1} - x\| = \alpha > 0.$$

Se $x^* \in E_n$ è tale che $\rho(x_{n+1}, x^*) < 2\alpha$, poniamo:

$$y_{n+1} = \frac{x_n - x^*}{\|x_n - x^*\|}.$$

Allora $\|y_{n+1}\| = 1$, $y_{n+1} \in E_{n+1}$ e inoltre:

$$\begin{aligned} \rho(y_{n+1}, E_n) &= \inf_{x \in E_n} \left\| \frac{x_n - x^*}{\|x_n - x^*\|} - x \right\| \\ &= \frac{1}{\|x_n - x^*\|} \inf_{x \in E_n} \|x_n - x^* - x \|x_n - x^*\| \| \\ &= \frac{1}{\|x_n - x^*\|} \inf_{x \in E_n} \|x_n - x\| \\ &> \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Consideriamo ora la successione $(y_n) \subset B$ ottenuta in questo modo. Questa è tale che:

$$\|y_m - y_n\| > \frac{1}{2}$$

se $m > n$. Di conseguenza, ogni sottosuccessione di (y_n) non è di Cauchy e, a maggior ragione, non è convergente, il che prova che B non è compatta. \square

La compattezza di tutti gli insiemi chiusi e limitati è equivalente alla compattezza delle palle chiuse. Infatti, le palle chiuse sono (appunto) chiuse e limitate; d'altra parte se F è chiuso e limitato e $F \subseteq B$ con B palla chiusa, allora dalla compattezza di B segue quella di F (un sottoinsieme chiuso di un compatto è compatto). Dunque, in dimensione infinita, la caratterizzazione degli insiemi compatti di uno spazio normato è tipicamente molto più complicata che nel caso finito-dimensionale.

Il problema di ambientare i problemi variazionali in uno spazio compatto si traduce spesso nell'introduzione delle topologie "deboli" (ovvero, più deboli della topologia indotta da una norma naturalmente presente su X). Infatti, se un

insieme risulta compatto in una data topologia, esso è chiaramente compatto in tutte le topologie più deboli di questa. Tuttavia c'è un rovescio della medaglia: le funzioni continue (o semi-continue) rispetto alla topologia più forte, possono non esserlo rispetto a quella più debole! (vedi punto 3).

Implicito nel problema della compattezza, vi è il problema della chiusura dello spazio X su cui si imposta il calcolo variazionale³. Gli spazi di funzioni regolari sono tipicamente non chiusi⁴. Come vedremo, ciò comporta la seguente generalizzazione:

$$\text{funzioni regolari} \longrightarrow \text{funzioni integrabili.}$$

Un funzionale su uno spazio di funzioni è, in maniera alquanto generale, rappresentato da un integrale. L'esempio più elementare di integrale, cioè l'integrale di Riemann, è notoriamente poco maneggevole quando sono richieste operazioni di passaggio al limite. Ciò comporta la generalizzazione:

$$\text{integrale di Riemann} \longrightarrow \text{integrale di Lebesgue.}$$

1.2 Teoria della misura

Ci occuperemo prima della generalizzazione del concetto di integrale. Questo è chiaramente legato alla nozione di misura. In questa sezione esploriamo la nozione di misura su \mathbb{R}^n

Una misura "ragionevole", intesa come funzione positiva μ definita su una certa famiglia di sottoinsiemi di \mathbb{R}^n , deve chiaramente soddisfare le seguenti proprietà "intuitive":

1. Se $\{E_i\}$ è una collezione numerabile di insiemi misurabili a due a due disgiunti, allora:

$$\mu\left(\bigcup_i E_i\right) = \sum_i \mu(E_i).$$

2. Se E è misurabile e F è congruente ad E , allora F è misurabile e $\mu(F) = \mu(E)$.
3. La misura di un rettangolo $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ è quella che ci si aspetta:

$$\mu(R) = \prod_n (b_n - a_n).$$

Esistono molti controesempi che mostrano che la famiglia degli insiemi misurabili non può coincidere con $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, l'insieme delle parti di \mathbb{R}^n . Ne citiamo uno in particolare:

Esempio 1.3 (Insieme di Vitali). Definiamo su \mathbb{R} la seguente relazione di equivalenza:

$$x \sim y \quad \text{se} \quad x - y \in \mathbb{Q}.$$

Per ogni classe di equivalenza $\chi \in \mathbb{R}/\sim$ si scelga un $v(\chi) \in [0, 1] \cap \chi$ e sia

$$V = \{v(\chi) \mid \chi \in \mathbb{R}/\sim\}.$$

Mostriamo che, per qualunque misura che soddisfa i punti 1, 2, 3 di cui sopra, V non è misurabile. Sia q_n una denumerazione dei razionali compresi fra -1 e 1 e poniamo $V_n = V + q_n$. Se $x \in [0, 1]$, allora esiste un $q_n \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}$ tale che $x - q_n \in V$, ovvero $x \in V_n$. Questo è:

$$q_n = x - v([x]).$$

D'altra, poichè $V \subset [0, 1]$, si hanno le inclusioni:

$$[0, 1] \subseteq \bigcup_n V_n \subseteq [-1, 2].$$

Inoltre, se $n \neq m$, allora $V_n \cap V_m = \emptyset$. Sia infatti $x \in V_n \cap V_m$. Allora esistono $\chi_n, \chi_m \in \mathbb{R}/\sim$ tali che:

$$v(\chi_n) + q_n = v(\chi_m) + q_m.$$

³Ricordiamo che, in uno spazio topologico di Hausdorff, ogni sottoinsieme compatto è chiuso.

⁴Ad esempio, lo spazio delle funzioni $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, con la topologia indotta dalla norma L^2 , non è chiuso.

Ma allora:

$$v(\chi_n) - v(\chi_m) = q_m - q_n \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}.$$

Quindi $v(\chi_n) \sim v(\chi_m)$, ossia $\chi_n = \chi_m$, $q_n = q_m$ e quindi $n = m$.

Come si vedrà in seguito, dalla proprietà 1 segue la monotonia di μ . Dalle proprietà 1, 2, 3 si ha allora:

$$1 = \mu([0, 1]) \leq \mu\left(\bigcup_n V_n\right) = \sum_n \mu(V_n) = \sum_n \mu(V) \leq \mu([-1, 2]) = 3$$

cioè:

$$1 \leq \sum_n \mu(V) \leq 3.$$

Dalla prima disuguaglianza segue $\mu(V) > 0$. Ma allora la seconda disuguaglianza è contraddittoria. La contraddizione deriva dall'aver assunto che V sia misurabile.

1.3 Misura di Peano-Jordan

Sia R un rettangolo (aperto, chiuso o ibrido). Indichiamo con $|R|$ la misura "intuitiva" di R . Definiamo un plirettangolo $S \subseteq \mathbb{R}^n$ come un insieme rappresentabile come unione finita di rettangoli (aperti, chiusi, o ibridi). Si dimostra facilmente che l'insieme $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ dei polirettangoli in \mathbb{R}^n è chiuso rispetto alle operazioni di unione finita, intersezione finita, differenza e differenza simmetrica. Si possono dimostrare i seguenti lemmi:

Lemma 1.4. Per ogni plirettangolo S , esiste una collezione finita di rettangoli $\{R_k\}$ disgiunti tale che $S = \cup_k R_k$.

Lemma 1.5. Se $\{R_k\}, \{R'_k\}$ sono due collezioni finite di rettangoli disgiunti tali che $\cup_k R_k = \cup_k R'_k$, allora:

$$\sum_k |R_k| = \sum_k |R'_k|.$$

Quindi ha senso definire la misura di un polirettangolo S come:

$$m(S) = \sum_k |R_k|$$

dove $\{R_k\}$ è una qualsiasi collezione finita di rettangoli disgiunti tali che $S = \cup_k R_k$.

Teorema 1.6. Se \mathcal{E} è la collezione di tutti i plirettangoli di \mathbb{R}^n , allora $m: \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty)$ soddisfa le seguenti proprietà:

- 1) $m(\cup_i S_i) = \sum_i m(S_i)$ se $\{S_i\} \subset \mathcal{E}$ è una collezione finita di plirettangoli disgiunti.
- 2) $m(\emptyset) = 0$.
- 3) $m(R) = |R|$.
- 4) Se $P, S \in \mathcal{E}$, $P \subseteq S$, allora $m(P) \leq m(S)$.
- 5) $m(\cup_i S_i) \leq \sum_i m(S_i)$ se $\{S_i\} \subset \mathcal{E}$ è una collezione finita di plirettangoli.
- 6) Se $S \in \mathcal{E}$, allora $m(S+x) = m(S)$.

Osservazione 1.7. Le proprietà (1)-(6) non sono indipendenti. Ad esempio, se $P \subseteq S$, allora, assumendo la (1), si ha:

$$m(S) = m(P \cup (S \setminus P)) = m(P) + m(S \setminus P) \geq m(P),$$

cioè la (3).

Esercizio 1.8. Supponiamo che $\mu: \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty)$ soddisfi (1) e (6). Allora $\mu = c \cdot m$, dove $c \geq 0$ è una costante.

Per le cose interessanti relative alla misura di PJ, si vedano i problemi.

Parte I

Misure e integrazione astratta

2 Misure astratte

2.1 Algebre e σ -algebre

Definizione 2.1. Sia X un insieme non vuoto. Una famiglia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ si dice un'algebra su X se:

- (1) $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$ implica $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{A}$.
- (2) $E \in \mathcal{A}$ implica $E^c \in \mathcal{A}$.

Definizione 2.2. Una famiglia $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ si dice una σ -algebra su X se:

- (1) $\cup_i E_i \in \mathcal{M}$ per ogni famiglia numerabile $\{E_i, i = 1, 2, \dots\} \subseteq \mathcal{M}$.
- (2) $E \in \mathcal{M}$ implica $E^c \in \mathcal{M}$.

Osservazione 2.3. Dalla definizione di algebra segue, per induzione, che \mathcal{A} è chiusa per unioni finite. Inoltre, scrivendo

$$E_1 \cap E_2 = (E_1^c \cup E_2^c)^c,$$

si ha che $E_1 \cap E_2 \in \mathcal{A}$ se $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$, sempre per induzione, \mathcal{A} è chiusa per intersezioni finite. Infine, scrivendo:

$$E_1 \setminus E_2 = E_1 \cap E_2^c,$$

si ha che $E_1 \setminus E_2 \in \mathcal{A}$ se $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$.

Osservazione 2.4. Una σ -algebra è in particolare un'algebra (se $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$, posto $E_{2n+1} = E_1, E_{2n} = E_2$ per $n = 1, 2, \dots$, si ha $E_1 \cup E_2 = \cup_n E_n \in \mathcal{M}$). Con dimostrazione pressochè identica al caso delle algebre, le σ -algebre sono chiuse rispetto all'intersezione numerabile e alla differenza.

Osservazione 2.5. Se l'algebra (o la σ -algebra) \mathcal{A} contiene almeno un elemento E , allora:

$$\begin{aligned} X &= E \cup E^c \in \mathcal{A} \\ \emptyset &= X^c \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

Per evitare banalità, in quanto segue assumeremo sempre che le algebre in esame contengano lo spazio ambiente (o equivalentemente l'insieme vuoto).

Osservazione 2.6. Sia \mathcal{A} un'algebra tale che, per ogni famiglia numerabile $\{E_i\} \subseteq \mathcal{A}$ disgiunta, $\cup_i E_i \in \mathcal{A}$. Allora \mathcal{A} è una σ -algebra. Infatti, se $\{F_i\} \subseteq \mathcal{A}$ è una famiglia numerabile arbitraria, posti $E_1 = F_1$ e:

$$E_i = F_i \setminus \left\{ \cup_{k=1}^{i-1} E_k \right\} \quad i \geq 2,$$

si ha:

$$\cup_i F_i = \cup_i E_i \in \mathcal{A},$$

per cui \mathcal{A} è chiusa per unioni numerabili.

Osservazione 2.7. Sia $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una collezione di (σ -)algebre. Allora:

$$\mathcal{A} = \cap_\alpha \mathcal{A}_\alpha$$

è una (σ -)algebra. Infatti, se $E, E_1, E_2 \in \mathcal{A}$, allora $E, E_1, E_2 \in \mathcal{A}_\alpha$ per ogni $\alpha \in A$. Di conseguenza, $E^c \in \mathcal{A}_\alpha$ e $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{A}_\alpha$ per ogni $\alpha \in A$, ovvero $E^c \in \mathcal{A}$ e $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{A}$ (la dimostrazione per il caso delle σ -algebre è identica).

Se $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ è una collezione di sottoinsiemi di X , poichè $\mathcal{P}(X)$ è una σ -algebra, possiamo definire la σ -algebra generata \mathcal{E} , $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, come la più piccola σ -algebra contenente \mathcal{E} :

$$\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \cap \{ \mathcal{M} \mid \mathcal{M} \supseteq \mathcal{E} \}.$$

Esempi di (σ -)algebre.

Esempio 2.8. Su ogni insieme X sono sempre definite due σ -algebre banali:

$$\mathcal{M}_1 = \{\emptyset, X\}, \quad \mathcal{M}_2 = \mathcal{P}(X).$$

Esempio 2.9. Sia X un insieme non numerabile. Sia

$$\mathcal{M} = \{E \subseteq X \mid E \text{ è numerabile oppure } E^c \text{ è numerabile}\}.$$

Allora \mathcal{M} è una σ -algebra. In effetti, \mathcal{M} è evidentemente chiusa per complementazione. Sia $\{E_i\}$ una famiglia numerabile in \mathcal{M} . Se gli E_i sono tutti numerabili, allora anche l'unione $E \equiv \cup_i E_i$ è numerabile, per cui $E \in \mathcal{M}$. Se invece esiste un E_k non numerabile, allora E_k^c è numerabile e:

$$E^c = \cap_i E_i^c \subseteq E_k^c$$

è numerabile, quindi $E \in \mathcal{M}$.

2.2 Misure non negative

Definizione 2.10. Sia \mathcal{M} una σ -algebra su un insieme X . Una misura non negativa μ su \mathcal{M} è una funzione $\mu: \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ numerabilmente additiva. Vale a dire, se $\{E_i\} \subset \mathcal{M}$ e $E_i \cap E_j = \emptyset$ per $i \neq j$, allora

$$\mu(\cup_i E_i) = \sum_i \mu(E_i). \quad (2.1)$$

Osservazione 2.11. Se esiste un elemento $E \in \mathcal{M}$ tale che $\mu(E) < \infty$, allora:

$$\mu(E) = \mu(E \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots) = \mu(E) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\emptyset),$$

da cui $\mu(\emptyset) = 0$. Perciò, in quanto segue, assumeremo sempre che valga $\mu(\emptyset) = 0$.

Osservazione 2.12. Dalla additività numerabile segue l'additività finita. Infatti, se $E_1, E_2, \dots, E_m \in \mathcal{M}$ sono disgiunti, allora:

$$\mu(\cup_{i=1}^m E_i) = \mu((\cup_{i=1}^m E_i) \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots) = \sum_{i=1}^m \mu(E_i) + \sum_{i=m+1}^{\infty} \mu(\emptyset) = \sum_{i=1}^m \mu(E_i).$$

Esempi di misure

Esempio 2.13. Sia $f: X \rightarrow [0, \infty]$ una funzione non negativa. Per $E \subset X$ sia⁵:

$$\mu(E) \equiv \sum_{x \in E} f(x).$$

Allora μ è una misura sulla σ -algebra $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$. Infatti, la μ è innanzitutto non banale poichè $\mu(\emptyset) = 0$; occorre dimostrare l'additività numerabile. Sia $\{E_i\}$ è una successione di sottoinsiemi di X disgiunti a coppie e sia $E = \cup_i E_i$. Per definizione:

$$\sum_{x \in E} f(x) = \sup_{E \supseteq F \text{ finito}} \sum_{x \in F} f(x).$$

⁵In generale, la somma di un insieme di numeri $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ non negativi, dove A è un insieme di indici arbitrario, è definita da:

$$\sum_{\alpha \in A} x_\alpha \equiv \sup_{A \supseteq F \text{ finito}} \sum_{\alpha \in F} x_\alpha.$$

Sia $F \subseteq E$ un insieme finito. Allora $F \subseteq E_{i_1} \cup E_{i_2} \cup \dots \cup E_{i_N}$ per alcuni i_1, \dots, i_N . Di conseguenza:

$$\begin{aligned} \sum_{x \in F} f(x) &= \sum_{k=1}^N \sum_{x \in F \cap E_{i_k}} f(x) \\ &\leq \sum_{k=1}^N \sum_{x \in E_{i_k}} f(x) \\ &= \sum_{k=1}^N \mu(E_{i_k}) \\ &\leq \sum_i \mu(E_i) \end{aligned}$$

Perciò:

$$\mu(\cup_i E_i) \leq \sum_i \mu(E_i).$$

Per mostrare la disuguaglianza opposta, fissiamo $N \in \mathbb{N}$ e siano $F_i \subseteq E_i$, $i = 1, 2, \dots, N$ insiemi finiti. Allora:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{x \in F_i} f(x) = \sum_{x \in \cup_i F_i} f(x) \leq \mu(E).$$

Ne segue:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \mu(E_i) &= \sum_{i=1}^N \sup_{E_i \supseteq F_i \text{ finito}} \sum_{x \in F_i} f(x) \\ &= \sup_{E_i \supseteq F_i \text{ finito}} \sum_{i=1}^N \sum_{x \in F_i} f(x) \\ &\leq \mu(E). \end{aligned}$$

Passando al limite $N \rightarrow \infty$ si ottiene:

$$\sum_i \mu(E_i) \leq \mu(E),$$

da cui segue l'additività di μ .

Vediamo alcuni casi particolari della μ così definita:

- $f \equiv 1$. Allora

$$\mu(E) = \text{Card}(E).$$

Questa misura è chiamata la “misura del contare”.

- $f \equiv \chi_{x_0}$. Allora:

$$\mu(E) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in E, \\ 0 & \text{se } x_0 \notin E. \end{cases}$$

Questa misura è chiamata “ δ di Dirac”.

Teoremi elementari

Osservazione 2.14. Negli enunciati che seguono, sottintenderemo sempre la σ -algebra \mathcal{M} e lo spazio X che entrano nella definizione di μ . In generale, la coppia (X, \mathcal{M}) è detta “spazio misurabile”, mentre la terna (X, \mathcal{M}, μ) è detta “spazio di misura”.

Proposizione 2.15 (Proprietà elementari delle misure non negative.). *Sia μ una misura non negativa. Tutti gli insiemi nell'enunciato che segue si sottointendono misurabili. Si ha:*

- (1) *Monotonia:* $\mu(E) \leq \mu(F)$ se $E \subseteq F$.
- (2) *Subadditività numerabile:* $\mu(\cup_i E_i) \leq \sum_i \mu(E_i)$.
- (3) *Continuità dal basso:* $\mu(\cup_i E_i) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(E_k)$ se $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$.
- (4) *Continuità dal basso:* $\mu(\cap_i E_i) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(E_k)$ se $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots$ e $\mu(E_1) < \infty$.

Dimostrazione. (1) Se $F \supseteq E$, allora:

$$\mu(F) = \mu((F \setminus E) \cup E) = \mu(F \setminus E) + \mu(E) \geq \mu(E).$$

(2) Poniamo $F_1 = E_1$ e

$$F_i = E_i \setminus (\cup_{k=1}^{i-1} E_k) \quad i \geq 2.$$

Allora $\cup_i F_i = \cup_i E_i$, $F_i \cap F_j = \emptyset$ per $i \neq j$ e:

$$\mu(\cup_i E_i) = \mu(\cup_i F_i) = \sum_i \mu(F_i) \leq \sum_i \mu(E_i)$$

dato che $\mu(F_i) \leq \mu(E_i)$ per il punto (1).

(3) Poniamo $F_1 = E_1$ e

$$F_i = E_i \setminus E_{i-1} \quad i \geq 2.$$

Allora $\cup_i F_i = \cup_i E_i$ e:

$$\mu(\cup_i E_i) = \mu(\cup_i F_i) = \sum_i \mu(F_i).$$

Ma:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \mu(F_i) &= \underbrace{\mu(E_1) + \mu(E_2 \setminus E_1)}_{=\mu(E_2)} + \overbrace{\mu(E_3 \setminus E_2)}^{=\mu(E_3)} + \dots + \mu(E_N \setminus E_{N-1}) \\ &= \mu(E_N), \end{aligned}$$

per cui:

$$\mu(\cup_i E_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \mu(F_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(E_N).$$

(4) Poniamo $F_i = E_i \setminus E_{i+1}$ per $i = 1, 2, \dots$. Abbiamo $E_1 \setminus \cap_i E_i = \cup_i F_i$, $F_i \cap F_j = \emptyset$ per $i \neq j$ e:

$$\mu(E_1 \setminus (\cap_i E_i)) = \sum_i \mu(F_i).$$

Poichè $\mu(E_1) < \infty$, si ha anche:

$$\mu(E_1 \setminus \cap_i E_i) \leq \mu(E_1) < \infty.$$

Perciò, da:

$$\mu(E_1) = \mu(E_1 \setminus \cap_i E_i) + \mu(\cap_i E_i),$$

segue

$$\begin{aligned} \mu(\cap_i E_i) &= \mu(E_1) - \mu(E_1 \setminus (\cap_i E_i)) \\ &= \mu(E_1) - \sum_i \mu(F_i). \end{aligned}$$

Ma (poichè $\mu(E_i)$ è finito per ogni i):

$$\mu(F_i) = \mu(E_i) - \mu(E_{i+1}).$$

Di conseguenza:

$$\begin{aligned}\mu(\cap_i E_i) &= \mu(E_1) - \sum_i \{\mu(E_i) - \mu(E_{i+1})\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\mu(E_1) - \sum_{i=1}^N \{\mu(E_i) - \mu(E_{i+1})\} \right] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(E_N),\end{aligned}$$

come volevasi dimostrare. □

Osservazione 2.16. L'ipotesi $\mu(E_1) < \infty$ (o più in generale $\mu(E_k) < \infty$ per qualche k) nell'enunciato del punto (4) è necessaria. Consideriamo infatti $X = \mathbb{N}$ con la misura del contare e sia $E_i = \{n \geq i\}$. Allora $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots$, $\cap_i E_i = \emptyset$ ma:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(E_k) = \infty \neq 0 = \mu(\emptyset) = \mu(\cap_i E_i).$$

2.3 Completamento della misura

Definizione 2.17. Sia (X, \mathcal{M}, μ) uno spazio di misura. La misura μ si dice completa se:

$$F \subseteq E, E \in \mathcal{M} \text{ e } \mu(E) = 0 \implies F \in \mathcal{M}$$

e, conseguentemente, $\mu(F) = 0$.

Teorema 2.18. Sia (X, \mathcal{M}, μ) uno spazio di misura. Siano:

$$\begin{aligned}\mathcal{N} &= \{N \in \mathcal{M} \mid \mu(N) = 0\}, \\ \overline{\mathcal{M}} &= \{E \cup F \mid E \in \mathcal{M}, F \subseteq N \text{ per qualche } N \in \mathcal{N}\}.\end{aligned}$$

Allora:

- (1) $\overline{\mathcal{M}}$ è una σ -algebra.
- (2) Esiste un'unica misura non negativa $\bar{\mu}$ completa su $\overline{\mathcal{M}}$ tale che:

$$\bar{\mu}(E) = \mu(E) \quad \forall E \in \mathcal{M}.$$

Dimostrazione. (1) Chiaramente $\emptyset \in \overline{\mathcal{M}}$. Se $\{G_i\} \subset \overline{\mathcal{M}}$, posto $G_i = E_i \cup F_i$ con $E_i \in \mathcal{M}$ e $F_i \subseteq N_i \in \mathcal{N}$, si ha:

$$\cup_i G_i = \cup_i (E_i \cup F_i) = (\cup_i E_i) \cup (\cup_i F_i).$$

Poichè $\cup_i E_i \in \mathcal{M}$, $\cup_i F_i \subseteq \cup_i N_i \in \mathcal{N}$, si ha $\cup_i G_i \in \overline{\mathcal{M}}$.

Se $G \in \overline{\mathcal{M}}$ e $G = E \cup F$, con $E \in \mathcal{M}$ e $F \subseteq N \in \mathcal{N}$, possiamo supporre che valga

$$E \cap N = \emptyset.$$

Infatti, se così non fosse, posto $N' = N \setminus E$, e $F' = F \setminus E$ abbiamo:

$$G = E \cup F', \quad E \cap N' = \emptyset, \quad F' \subseteq N' \in \mathcal{N}.$$

In tal caso abbiamo

$$G^c = (E \cup N)^c \cup (N \setminus F),$$

per cui $G^c \in \overline{\mathcal{M}}$.

(2) Sia dato $G \in \overline{\mathcal{M}}$. Supponiamo che sia:

$$G = E \cup F = E' \cup F',$$

con E, E', F e F' come nella definizione di $\overline{\mathcal{M}}$. Allora:

$$\mu(E) = \mu(E').$$

Infatti, usando la monotonia e la subadditività di μ , otteniamo:

$$\mu(E) \leq \mu(E \cup N) = \mu(E' \cup N') \leq \mu(E') + \mu(N') = \mu(E'),$$

e similmente $\mu(E') \leq \mu(E)$. Di conseguenza, possiamo porre:

$$\bar{\mu}(G) \equiv \mu(E) \quad G = E \cup F \in \overline{\mathcal{M}}.$$

Se $E \in \mathcal{M}$, allora $E = E \cup \emptyset \in \overline{\mathcal{M}}$ e $\bar{\mu}(E) = \mu(E)$, quindi $\bar{\mu}$ è un'estensione di μ . Se $\{G_i = E_i \cup F_i\} \subset \overline{\mathcal{M}}$, dove $G_i \cap G_j = \emptyset$ per $i \neq j$, allora:

$$\begin{aligned} \bar{\mu}(\cup_i G_i) &= \bar{\mu}((\cup_i E_i) \cup (\cup_i F_i)) \\ &= \mu(\cup_i E_i) \\ &= \sum_i \mu(E_i) \\ &= \sum_i \bar{\mu}(G_i) \end{aligned}$$

per cui $\bar{\mu}$ è effettivamente una misura.

Supponiamo che $G_1 \subseteq G$ e $\bar{\mu}(G) = 0$. Posto $G = E \cup F$, dove $E \in \mathcal{M}$ e $F \subseteq N \in \mathcal{N}$, abbiamo allora $\mu(E) = 0$. Se $G_1 \subseteq G$, abbiamo allora:

$$G_1 = G_1 \cap (E \cup F) = \emptyset \cup (G_1 \cap (E \cup F)).$$

Ma:

$$G_1 \cap (E \cup F) \subseteq E \cup N \in \mathcal{N}.$$

Di conseguenza $G_1 \in \bar{\mu}$, ovvero $\bar{\mu}$ è completa.

Supponiamo ora che $\nu: \overline{\mathcal{M}} \rightarrow [0, \infty]$ sia una misura completa tale che $\nu|_{\mathcal{M}} = \mu$. Se $G = E \cup F \in \overline{\mathcal{M}}$, dove $E \in \mathcal{M}$, $F \subseteq N \in \mathcal{N}$, allora $\nu(N) = 0$, per cui $F \in \overline{\mathcal{M}}$ e $\nu(F) = 0$. Quindi:

$$\bar{\mu}(G) = \mu(E) = \nu(E) \leq \nu(G) \leq \nu(E) + \nu(F) = \nu(E) = \mu(E) = \bar{\mu}(G).$$

Quindi $\bar{\mu}(G) = \nu(G)$. □

Osservazione 2.19. Notiamo che se $\nu: \mathcal{M}' \rightarrow [0, \infty]$ è una qualsiasi misura completa che estende $\mu: \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ (vale a dire, $E \in \mathcal{M}$ implica $E \in \mathcal{M}'$ e $\mu(E) = \nu(E)$), allora ν estende anche $\bar{\mu}$. Infatti, dato $G = E \cup F \in \overline{\mathcal{M}}$, con $E \in \mathcal{M}$ e $F \subseteq N \in \mathcal{N}$, poichè $\nu(N) = \mu(N) = 0$, si ha $F \in \mathcal{M}'$ e $\nu(F) = 0$. Inoltre $G = E \cup F \in \mathcal{M}'$ e $\bar{\mu}(G) = \mu(E) = \nu(E) = \nu(E \cup F) = \nu(G)$. In altre parole, $\bar{\mu}$ è l'estensione completa minimale di μ .

3 Misure esterne e premisure

3.1 Misure esterne e teorema di Carathéodory

Definizione 3.1. Sia X un insieme. Una funzione $\mu^*: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ si dice una misura esterna su X se:

- (0) $\mu(\emptyset) = 0$
- (1) $\mu(A) \leq \mu(B)$ se $A \subseteq B$
- (2) $\mu(\cup_i A_i) \leq \sum_i \mu(A_i)$

Proposizione 3.2. Sia $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una collezione di sottoinsiemi di X tale che $\emptyset \in \mathcal{E}$ e $X \in \mathcal{E}$. Sia $\rho: \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$ una funzione tale che $\rho(\emptyset) = 0$. Allora $\mu^*: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{E}$ definita da:

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_i \rho(E_i) \mid A \subseteq \cup_i E_i, E_i \in \mathcal{E} \right\}$$

è una misura esterna su X .

Dimostrazione. L'unico punto non banale da dimostrare è la subaddittività. Questa si dimostra come nel caso concreto della misura di Lebesgue (Problema D.12), usando l'assioma della scelta numerabile e il teorema di Tonelli per le serie di numeri non negativi (con i rettangoli R sostituiti dagli insiemi elementari $E \in \mathcal{E}$). \square

Definizione 3.3 (Misurabilità alla Carathéodory). Sia $\mu^*: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ una misura esterna su X . Un insieme $A \subseteq X$ si dice μ^* -misurabile se, per ogni $E \subseteq X$ si ha:

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c). \quad (3.1)$$

Se A è μ^* -misurabile, definiamo la misura di A come $\mu(A) \equiv \mu^*(A)$.

Osservazione 3.4. Notiamo che la disuguaglianza:

$$\mu^*(E) = \mu^*((E \cap A) \cup (E \cap A^c)) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

vale per ogni insieme $A \subseteq X$. La definizione (3.1) dice che l'insieme A "taglia bene" tutti gli insiemi $E \subseteq X$.

Teorema 3.5 (Teorema di Carathéodory). Sia μ^* una misura esterna su X e sia \mathcal{M} la collezione degli insiemi μ^* -misurabili. Allora \mathcal{M} è una σ -algebra su X e $\mu \equiv \mu^*|_{\mathcal{M}}$ è una misura completa.

Dimostrazione. Mostriamo innanzitutto che \mathcal{M} è una σ -algebra. Chiaramente $\emptyset \in \mathcal{M}$, per cui \mathcal{M} è non vuota. La definizione (3.1) è simmetrica rispetto ad A e A^c , per cui \mathcal{M} è chiusa rispetto alla complementazione. Dobbiamo far vedere che \mathcal{M} è chiusa rispetto all'unione numerabile.

Siano $A, B \in \mathcal{M}$. Se $E \subseteq X$, allora:

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \\ &= \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) + \mu^*(E \cap A^c \cap B) + \mu^*(E \cap A^c \cap B^c) \\ &= \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) + \mu^*(E \cap A^c \cap B) + \mu^*(E \cap (A \cup B)^c). \end{aligned}$$

Ma:

$$E \cap (A \cup B) = (E \cap A \cap B) \cup (E \cap A \cap B^c) \cup (E \cap A^c \cap B),$$

per cui, dalla subaddittività di μ^* , si ha:

$$\mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) + \mu^*(E \cap A^c \cap B) \geq \mu^*(E \cap (A \cup B)).$$

Ne segue che:

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap (A \cup B)^c).$$

Ciò, insieme all'osservazione 3.4, mostra che $A \cup B \in \mathcal{M}$. Di conseguenza, \mathcal{M} è un'algebra.

Sia ora $\{A_i\} \subseteq \mathcal{M}$, con $A_i \cap A_j = \emptyset$ per $i \neq j$, e sia $A = \cup_i A_i$. Posto:

$$B_n = \bigcup_{i=1}^n A_i,$$

poichè $A_{n+1} \in \mathcal{M}$, si ha:

$$\begin{aligned} \mu^*(E \cap B_{n+1}) &= \mu^*(E \cap B_{n+1} \cap A_{n+1}) + \mu^*(E \cap B_{n+1} \cap A_{n+1}^c) \\ &= \mu^*(E \cap A_{n+1}) + \mu^*(E \cap B_n) \end{aligned}$$

Poichè $\mu^*(E \cap B_1) = \mu^*(E \cap A_1)$, segue per induzione che:

$$\mu^*(E \cap B_n) = \sum_{i=1}^n \mu^*(E \cap A_i).$$

Poichè $B_n \in \mathcal{M}$ e $B_n^c \supseteq A^c$, si ha:

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap B_n^c) \\ &\geq \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap A^c) \\ &= \sum_{i=1}^n \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \cap A^c). \end{aligned}$$

Prendendo il limite per $n \rightarrow \infty$ e usando la subaddittività di μ^* , troviamo:

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &\geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \cap A^c) \\ &\geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c), \end{aligned}$$

da cui, di nuovo per l'Osservazione 3.4, concludiamo che $A = \cup_i A_i \in \mathcal{M}$. Dunque \mathcal{M} è un'algebra chiusa per unioni numerabili disgiunte e quindi, per l'Osservazione 2.6, è una σ -algebra.

Prendendo $E = \cup_i A_i$ nella disuguaglianza precedente, troviamo:

$$\mu^*(\cup_i A_i) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i),$$

da cui segue, per la subaddittività di μ^* , che $\mu \equiv \mu^*|_{\mathcal{M}}$ è numerabilmente additiva. Poichè $\mu(\emptyset) = \mu^*(\emptyset) = 0$ per definizione, μ è una misura. Per concludere, dobbiamo dimostrare che μ è completa.

Se $F \subseteq N$, con $N \in \mathcal{M}$ e $\mu(N) = 0$, allora dalla monotonia di μ^* si ha $\mu^*(F) = 0$. Se $E \subseteq X$, allora $\mu^*(E \cap F) = 0$, per cui:

$$\mu^*(E \cap F) + \mu^*(E \cap F^c) \leq \mu^*(E)$$

e, ancora una volta dall'Osservazione 3.4, si ha:

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap F) + \mu^*(E \cap F^c).$$

Quindi $F \in \mathcal{M}$, ovvero μ è completa. Il teorema è dimostrato. □

3.2 Premisure e teorema di Hahn-Kolmogorov

Definizione 3.6. Sia \mathcal{A} un'algebra su X . Una premisura $\mu_0: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ è una funzione non negativa tale che se $\{A_i\} \subseteq \mathcal{A}$, $\cup_i A_i \in \mathcal{A}$ e $A_i \cap A_j = \emptyset$ per $i \neq j$, allora:

$$\mu_0(\cup_i A_i) = \sum_i \mu_0(A_i). \tag{3.2}$$

Osservazione 3.7. Come nel caso delle misure, possiamo escludere il caso banale $\mu_0 \equiv \infty$ richiedendo che $\mu_0(\emptyset) = 0$. Per queste premisure (le sole che consideriamo), possiamo applicare la Proposizione 3.2 per generare una misura esterna μ^* :

Definizione 3.8. La misura esterna μ^* associata alla premisura μ_0 è la funzione $\mu^*: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ definita da:

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_i \mu_0(A_i) \mid E \subseteq \cup_i A_i, A_i \in \mathcal{A} \right\}.$$

Teorema 3.9 (Hahn-Kolmogorov). *Sia $\mu_0: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ una premisura su X , μ^* la misura esterna associata a μ_0 . Sia \mathcal{M} la σ -algebra degli insiemi μ^* -misurabili e $\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}}$ la misura associata a μ^* . Allora*

- (1) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$ e $\mu|_{\mathcal{A}} = \mu_0$.
- (2) Se $\nu: \mathcal{M}' \rightarrow [0, \infty]$ è un'altra misura che estende μ_0 , allora

$$\nu(E) \leq \mu(E), \quad \forall E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{M}'.$$

Se, inoltre, $\mu(E) < \infty$, allora:

$$\nu(E) = \mu(E).$$

In particolare, se μ_0 è σ -finita, allora $\nu(E) = \mu(E)$ per ogni $E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$.

Osservazione 3.10. Con la frase “ μ_0 è σ -finita” si intende dire che esiste una successione $\{A_i\} \subseteq \mathcal{A}$ tale che $X = \cup_i A_i$ e $\mu_0(A_i) < \infty$ per ogni i . Notiamo che da $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}, \mathcal{M}'$ segue $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}, \mathcal{M}'$, dove $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ è la σ -algebra generata da \mathcal{A} . In particolare, gli enunciati del punto (2) valgono con $E \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Dimostrazione. (1) Siano $A \in \mathcal{A}$ e $E \subseteq X$. Data $\{A_i\} \subseteq \mathcal{A}$, $E \subseteq \cup_i A_i$ definiamo $\{A'_i = A_i \cap A\} \subseteq \mathcal{A}$, $\{A''_i = A_i \cap A^c\} \subseteq \mathcal{A}$. Poichè $E \cap A \subseteq \cup_i A'_i$ e $E \cap A^c \subseteq \cup_i A''_i$, si ha:

$$\begin{aligned} \sum_i \mu_0(A_i) &= \sum_i \mu_0(A'_i \cup A''_i) \\ &= \sum_i \mu_0(A'_i) + \sum_i \mu_0(A''_i) \\ &\geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c). \end{aligned}$$

Di conseguenza:

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

L'altro verso della disuguaglianza segue dalla subadditività di μ^* , per cui:

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

Essendo $E \subseteq X$ arbitrario, si ha che $A \in \mathcal{M}$, ossia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$ e, poichè \mathcal{M} è una σ -algebra, $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}$. Dobbiamo dimostrare che $\mu|_{\mathcal{A}} = \mu_0$.

Poichè $A \subseteq A$, si ha chiaramente:

$$\mu^*(A) \leq \mu_0(A).$$

Per mostrare la disuguaglianza opposta, sia $\{A_i\} \subseteq \mathcal{A}$ un ricoprimento di A . Poniamo $B_1 = A_1 \cap A$, $B_i = (A_i \setminus \{B_{i-1}\}) \cap A$ per $i \geq 2$. Allora $A = \cup_i B_i$ e:

$$\mu_0(A) = \sum_i \mu_0(B_i) \leq \sum_i \mu_0(A_i).$$

Di conseguenza.

$$\mu_0(A) \leq \mu^*(A).$$

Poichè $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$, $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu|_{\mathcal{A}}$ e l'enunciato segue.

- (2) Sia $E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$ e sia $\{A_i\} \subseteq \mathcal{A}$ un ricoprimento di E . Poichè $A_i \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$, per il punto (1) si ha:

$$\nu(E) \leq \nu(\cup_i A_i) \leq \sum_i \nu(A_i) = \sum_i \mu_0(A_i) = \sum_i \mu(A_i),$$

da cui:

$$\nu(E) \leq \mu^*(E) = \mu(E).$$

Supponiamo ora $\mu(E) < \infty$. Allora, fissato $\varepsilon > 0$, esiste un ricoprimento $\{A_i\} \subseteq \mathcal{A}$ di E tale che:

$$\sum_i \mu_0(A_i) \leq \mu^*(E) + \varepsilon = \mu(E) + \varepsilon.$$

Di conseguenza, posto $A = \cup_i A_i$, si ha:

$$\mu(A) \leq \sum_i \mu(A_i) = \sum_i \mu_0(A_i) \leq \mu(E) + \varepsilon,$$

da cui, poichè $\mu(E) < \infty$:

$$0 \leq \mu(A) - \mu(E) = \mu(A \setminus E) \leq \varepsilon.$$

Per la continuità dal basso di ν e μ , abbiamo:

$$\nu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_0\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \mu(A),$$

per cui

$$0 < \nu(A) - \mu(E) < \varepsilon.$$

Perciò:

$$\mu(E) \leq \mu(A) = \nu(A) = \nu(A \setminus E) + \nu(E).$$

Poichè $\nu \leq \mu$, si ha:

$$\mu(E) \leq \mu(A \setminus E) + \nu(E) \leq \nu(E) + \varepsilon.$$

Poichè ε è arbitrario, ciò implica:

$$\mu(E) = \nu(E).$$

Se, infine, μ_0 è σ -finita e $\{X_n\} \subseteq \mathcal{A}$ è una collezione numerabile disgiunta tale che:

$$X = \cup_n X_n, \quad \mu_0(X_n) < \infty,$$

preso $E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$, poichè:

$$\mu(E \cap X_n) \leq \mu(X_n) = \mu_0(X_n) < \infty,$$

si ha

$$\mu(E) = \sum_n \mu(E \cap X_n) = \sum_n \nu(E \cap X_n) = \nu(E).$$

□

4 Misura di Lebesgue

4.1 Definizione della misura di Lebesgue

Definizione 4.1. Un sottoinsieme $P \subseteq \mathbb{R}^N$ si dice un polirettangolo se è un'unione di rettangoli (aperti, chiusi o ibridi). In particolare, consideriamo \emptyset (un'unione vuota di rettangoli) un polirettangolo.

Lemma 4.2. Sia X un insieme e sia \mathcal{E} una famiglia di sottoinsiemi di X tali che:

(i) $E, F \in \mathcal{E}$ implica $E \cap F \in \mathcal{E}$

(ii) Se $E \in \mathcal{E}$, allora $X \setminus E$ è un'unione finita e disgiunta di elementi di \mathcal{E} .

Allora la famiglia \mathcal{A} costituita dalle unioni finite e disgiunte di elementi di \mathcal{E} è un'algebra.

Dimostrazione. Per definizione, $\emptyset \in \mathcal{A}$ (l'unione vuota di elementi di \mathcal{E}). Se $A \in \mathcal{A}$, allora:

$$A = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n,$$

dove $E_i \in \mathcal{E}$ e $E_i \cap E_j = \emptyset$ per $i \neq j$. Quindi:

$$X \setminus A = (X \setminus E_1) \cap (X \setminus E_2) \cap \dots \cap (X \setminus E_n).$$

Ma, per ipotesi:

$$X \setminus E_i = \bigcup_{j_i=1}^{m_i} F_{ij_i},$$

dove $F_{ij} \in \mathcal{E}$ e $F_{ij} \cap F_{ik} = \emptyset$ per $j \neq k$. Quindi:

$$X \setminus A = \bigcup_{j_1=1}^{m_1} \bigcup_{j_2=1}^{m_2} \dots \bigcup_{j_n=1}^{m_n} F_{1j_1} \cap F_{2j_2} \cap \dots \cap F_{nj_n}.$$

Ciascun membro dell'unione appartiene a \mathcal{E} e, inoltre, l'unione è disgiunta. Quindi, se $A \in \mathcal{A}$, allora $X \setminus A \in \mathcal{A}$. Se ora:

$$B = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_m \in \mathcal{A},$$

dove $F_i \in \mathcal{E}$ e $F_i \cap F_j = \emptyset$ per $i \neq j$, allora:

$$A \cap B = \bigcap_{i=1}^n \bigcap_{j=1}^m E_i \cap F_j.$$

Gli insiemi $E_i \cap F_j$ appartengono a \mathcal{E} e sono mutuamente disgiunti, per cui $E_i \cap F_j \in \mathcal{A}$. A questo punto, segue facilmente che:

$$A \cup B = X \setminus [(X \setminus A) \cap (X \setminus B)] \in \mathcal{A},$$

per cui \mathcal{A} è effettivamente un'algebra. □

Corollario 4.3. Se P è un polirettangolo, allora esistono dei rettangoli R_1, R_2, \dots, R_n disgiunti tali che $P = \bigcup_{i=1}^n R_i$.

Dimostrazione. Se P è un'unione finita di rettangoli, allora P appartiene all'algebra generata dalla famiglia elementare \mathcal{R} dei rettangoli. Quindi P è un'unione finita disgiunta di alcuni rettangoli in \mathcal{R} . □

Lemma 4.4. Se P è un polirettangolo, $P = \bigcup_{i=1}^n R_i = \bigcup_{j=1}^m S_j$, dove R_i e S_j sono rettangoli ed entrambe le unioni sono disgiunte, allora:

$$\sum_{i=1}^n |R_i| = \sum_{j=1}^m |S_j|.$$

Teorema 4.5. La famiglia \mathcal{A} dei polirettangoli di \mathbb{R}^N è un'algebra. La funzione $\lambda_0: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$:

$$\lambda_0(P) = \sum_{i=1}^n |R_i|, \quad P = \bigcup_{i=1}^n R_i, \quad R_i \cap R_j = \emptyset \text{ se } i \neq j \quad (4.1)$$

è una premisura.

Dimostrazione. I lemmi 4.3 e 4.2 (con \mathcal{E} la famiglia dei rettangoli in \mathbb{R}^N) mostrano che \mathcal{A} è un'algebra, mentre il Lemma 4.4 mostra che λ_0 è una funzione ben definita su \mathcal{A} .

Supponiamo che P_1, P_2, \dots siano polirettangoli disgiunti e che $P = \cup_i P_i$ sia anch'esso un polirettangolo. Occorre dimostrare che:

$$\lambda_0(P) = \sum_i \lambda_0(P_i).$$

Notiamo che non è restrittivo supporre che ogni P_i sia un rettangolo. In tal caso, osserviamo che da:

$$\bigcup_{i=1}^n P_i \subseteq P,$$

segue:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_0(P_i) \leq \lambda_0(P)$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$, cosicchè:

$$\sum_i \lambda_0(P_i) \leq \lambda_0(P),$$

per cui è sufficiente dimostrare la disuguaglianza opposta. Distinguiamo i seguenti tre casi:

Caso 1: P è un rettangolo limitato.

Notiamo che:

$$\lambda_0(P) = |P| = |\bar{P}| = \lambda_0(\bar{P}).$$

Siano R_1, R_2, \dots dei rettangoli aperti tali che:

$$P_i \subseteq R_i, \quad \lambda_0(R_i) < \lambda_0(P_i) + 2^{-i}\varepsilon.$$

Poichè \bar{P} è compatto e $\bar{P} \subseteq \cup_i R_i$, possiamo assumere:

$$\bar{P} \subseteq R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_n,$$

da cui:

$$\lambda_0(\bar{P}) \leq \lambda_0(R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_n).$$

Notiamo che se Q_1, Q_2 sono polirettangoli, allora dalla definizione di λ_0 segue:

$$\begin{aligned} \lambda_0(Q_1 \cup Q_2) &= \lambda_0((Q_1 \cap Q_2) \cup (Q_1 \setminus Q_2) \cup (Q_2 \setminus Q_1)) \\ &= \lambda_0(Q_1 \cap Q_2) + \lambda_0(Q_1 \setminus Q_2) + \lambda_0(Q_2 \setminus Q_1) \\ &\leq 2\lambda_0(Q_1 \cap Q_2) + \lambda_0(Q_1 \setminus Q_2) + \lambda_0(Q_2 \setminus Q_1) \\ &= \lambda_0(Q_1) + \lambda_0(Q_2). \end{aligned}$$

Per induzione si ottiene quindi:

$$\lambda_0(\bar{P}) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_0(R_i) \leq \sum_i \lambda_0(R_i) = \sum_i \lambda_0(P_i) + \varepsilon,$$

da cui, essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario, segue:

$$\lambda_0(P) = \lambda_0(\bar{P}) \leq \sum_i \lambda_0(P_i)$$

e ciò dimostra la tesi nel caso in esame.

Caso 2: P è un rettangolo.

Se P ha interno vuoto, allora ogni P_i ha interno vuoto, per cui:

$$\lambda_0(P) = 0 = \sum_i \lambda_0(P_i),$$

mentre se P è limitato siamo nel caso 1.

Se P è illimitato e ha parte interna non vuota, allora $\lambda_0(P) = \infty$. Posto $C_n = [-n, n]^N$, si ha:

$$\begin{aligned}\lambda_0(P) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_0(P \cap C_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_0(\cup_i (P_i \cap C_n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i \lambda_0(P_i \cap C_n) \\ &\leq \sum_i \lambda_0(P_i)\end{aligned}$$

per cui:

$$\sum_i \lambda_0(P_i) = \infty = \lambda_0(P)$$

e il teorema è dimostrato per un rettangolo.

Caso 3: P è un polirettangolo.

Scriviamo $P = \cup_{j=1}^m R_j$, dove R_j sono rettangoli disgiunti. Dai casi precedenti otteniamo:

$$\lambda_0(P) = \sum_{j=1}^m \lambda_0(R_j) = \sum_{j=1}^m \lambda_0(\cup_i R_j \cap P_i) = \sum_{j=1}^m \sum_i \lambda_0(R_j \cap P_i) = \sum_i \lambda_0(P_i).$$

□

Corollario 4.6 (Esistenza e unicità della misura di Lebesgue.). *Esiste una misura completa $\lambda: \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ tale che $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ e $\lambda|_{\mathcal{A}} = \lambda_0$. Inoltre, se $\mu: \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ è una qualsiasi misura che estende λ_0 , allora λ e μ coincidono su $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{M}$.*

Dimostrazione. Segue immediatamente dal Teorema di Hahn-Kolmogorov (si noti che λ_0 è σ -finita, in quanto $\mathbb{R}^N = \cup_n [-n, n]^N$). □

4.2 Proprietà della misura di Lebesgue

Teorema 4.7. *La misura di Lebesgue $\lambda: \mathcal{L}(\mathbb{R}^N) \rightarrow [0, \infty]$ gode delle seguenti proprietà:*

- (i) λ è completa.
- (ii) $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ è boreliana (cioè contiene tutti gli insiemi aperti di \mathbb{R}^N).
- (iii) λ è regolare dall'esterno:

$$\lambda(E) = \inf_{E \subseteq A \text{ aperto}} \lambda(A) \quad (4.2)$$

- (iv) λ è regolare dall'interno:

$$\lambda(E) = \sup_{E \supseteq K \text{ compatto}} \lambda(K) \quad (4.3)$$

- (v) $\lambda(K) < \infty$ per ogni compatto K .

Dimostrazione. (i) Segue automaticamente dalla definizione di λ e dal Teorema di Hahn-Kolmogorov.

(ii) Basta notare che ogni aperto A in \mathbb{R}^N è dato da un'unione numerabile di scatole aperte.

(iii) Il caso $\lambda(E) = \infty$ è banale; supponiamo $\lambda(E) < \infty$. Si ha:

$$\lambda(E) = \lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_i |R_i| \mid E \subseteq \cup_i R_i, R_i \text{ rettangoli} \right\}.$$

Per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un ricoprimento aperto $\{R_i\}$ di E tale che:

$$\sum_i \lambda(R_i) < \lambda(E) + \varepsilon.$$

Quindi l'aperto $A = \cup_i R_i$ è tale che:

$$\lambda(A) \leq \sum_i \lambda(R_i) < \lambda(E) + \varepsilon$$

e, poichè ε è arbitrario, segue la (4.2). □

(iv) Supponiamo dapprima che E sia limitato. Allora la chiusura \bar{E} è compatta e quindi misurabile per il punto (ii). Dato $\varepsilon > 0$, per il punto (iii), esiste un aperto A tale che:

$$A \supseteq \bar{E} \setminus E, \quad \lambda(A) < \lambda(\bar{E} \setminus E) + \varepsilon.$$

Poichè $A \setminus E \supseteq \bar{E} \setminus E$ si ha:

$$\lambda(A) = \lambda(A \cap E) + \lambda(A \setminus E) \geq \lambda(A \cap E) + \lambda(\bar{E} \setminus E),$$

da cui:

$$\lambda(A \cap E) \leq \lambda(A) - \lambda(\bar{E} \setminus E) < \varepsilon.$$

Posto $K = \bar{E} \setminus A$, si ha che K è compatto e, poichè $A \supseteq \bar{E} \setminus E$:

$$K \subseteq \bar{E} \setminus (\bar{E} \setminus E) = E.$$

Inoltre:

$$E = (E \setminus A) \cup (E \cap A) \subseteq K \cup (E \cap A),$$

per cui:

$$\lambda(E) \leq \lambda(K) + \lambda(E \cap A) \leq \lambda(K) + \varepsilon.$$

Poichè $\varepsilon > 0$ è arbitrario, si ha la tesi nel caso in cui E è limitato.

Se E non è limitato, possiamo scrivere:

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$$

dove gli E_i sono limitati e disgiunti. Fissato $\varepsilon > 0$, per ogni i esiste un $K_i \subseteq E_i$ compatto tale che:

$$\lambda(E_i) < \lambda(K_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Dunque, posto $K^{(n)} = \bigcup_{i=1}^n K_i$, per ogni N si ha:

$$\lambda(K^{(n)}) = \sum_{i=1}^n \lambda(K_i) \geq \sum_{i=1}^n \lambda(E_i) - \varepsilon.$$

Se $\lambda(E) = \infty$, allora la somma a destra tende a ∞ e, poichè $K^{(n)} \subseteq E$, si ha:

$$\sup \{ \lambda(K) \mid K \subseteq E \text{ compatto} \} = \infty = \lambda(E).$$

Se $\lambda(E) < \infty$, allora esiste n tale che:

$$\sum_{i=1}^n \lambda(E_i) > \lambda(E) - \varepsilon$$

e quindi:

$$\lambda(K^{(n)}) \geq \lambda(E) - 2\varepsilon,$$

e la tesi segue dall'arbitrarietà di ε .

(v) Se K è compatto, allora $K \subseteq [-n, n]^N$ per n sufficientemente grande. Quindi $\lambda(K) < \infty$.

Corollario 4.8. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme. Allora $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ se e solo se $E = B \cup N$, dove B è boreliano e N è un insieme di misura nulla.*

Osservazione 4.9. Si osservi che il Corollario afferma esattamente che $(\mathcal{L}(\mathbb{R}^N), \lambda)$ è il completamento di $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)})$. Infatti, data la regolarità esterna di λ , se N ha misura nulla, allora esiste una famiglia di aperti $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots \supseteq N$ tali che:

$$0 = \mu(N) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)}(E_n) = \lambda|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)}(\bigcap_n E_n),$$

dove $\bigcap_n E_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Quindi si ha: $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N) = \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)}$ e $\lambda = \overline{\lambda|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)}}$ (si confronti con le definizioni nel Teorema 2.18).

Dimostrazione. Se $E = B \cup N$ con B e N come nell'enunciato, chiaramente $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$. Viceversa, supponiamo $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ e, per adesso, limitato. Per il teorema precedente, per ogni n esistono $K_n \subseteq E \subseteq G_n$, con K_n compatto e G_n aperto, tali che:

$$\begin{aligned} \lambda(G_n) &< \lambda(E) + \frac{1}{2n}, \\ \lambda(K_n) &> \lambda(E) - \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

Poichè $\lambda(K_n) \leq \lambda(E) < \infty$, dalle precedenti segue:

$$\lambda(G_n) - \lambda(K_n) < \frac{1}{n}.$$

Posti $F_\sigma = \bigcup_n K_n$ e $G_\delta = \bigcap_n G_n$, si ha $F_\sigma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, $G_\delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ e:

$$\lambda(G_\delta \setminus F_\sigma) = 0.$$

Inoltre $E = F_\sigma \cup (E \setminus F_\sigma)$ e:

$$\lambda(E \setminus F_\sigma) \leq \lambda(G_\delta \setminus F_\sigma) = 0,$$

il che mostra la tesi per insiemi E limitati. Nel caso generale, possiamo sempre scrivere $E = \bigcup_n E_n$, con tutti gli E_n limitati. Se $E_n = B_n \cup N_n$ come nell'enunciato, allora $E = B \cup N$, dove $B = \bigcup_n B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ e $N = \bigcup_n N_n$ ha misura nulla. \square

Corollario 4.10. *Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^N$ limitato è misurabile secondo Lebesgue se e solo se:*

$$\sup_{E \supseteq K \text{ compatto}} \lambda(K) = \inf_{E \subseteq A \text{ aperto}} \lambda(A).$$

Dimostrazione. Il “solo se” segue dalla regolarità di λ . Per il “se”, si scelgano $K_i \subseteq E \subseteq A_i$ tali che:

$$\lambda(A_i) - \lambda(K_i) < \frac{1}{i}.$$

Posti $G_\delta = \bigcap_i A_i$, $F_\sigma = \bigcup_i K_i$, si ha $E = F_\sigma \cup (E \setminus F_\sigma)$ e:

$$\lambda(E \setminus F_\sigma) \leq \lambda(G_\delta \setminus F_\sigma) = 0.$$

Per la proposizione precedente, E è Lebesgue-misurabile. \square

Teorema 4.11. *La misura di Lebesgue è invariante per traslazioni: se $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ e $x \in \mathbb{R}^N$, allora $E + x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ e*

$$\lambda(E + x) = \lambda(E).$$

Dimostrazione. La proprietà è banalmente vera per i rettangoli. Poichè $y \mapsto y + x$ è un omeomorfismo, E è boreliano se e soltanto se $E + x$ è boreliano e, dalla definizione di $\lambda(E)$ come misura esterna, si vede che $\lambda(E + x) = \lambda(E)$. Allo stesso modo, se N ha misura di Lebesgue nulla, $N + x$ ha misura di Lebesgue nulla. Se F è misurabile secondo Lebesgue, allora $F = E \cup N$, dove E è boreliano e N ha misura nulla. Quindi:

$$F + x = (E + x) \cup (N + x)$$

è misurabile secondo Lebesgue e:

$$\lambda(F + x) = \lambda(E + x) = \lambda(E) = \lambda(F).$$

\square

4.3 Confronto con la misura di Peano-Jordan

In questo e nel seguente paragrafo indichiamo con m la “misura” di Peano-Jordan e con λ la misura di Lebesgue. Il confronto fra le due nozioni segue immediatamente dalla seguente osservazione: se $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme limitato, allora:

$$\begin{aligned} m_*(E) &= \sup \{m(P), P \subseteq E, P \text{ polirettangolo chiuso}\}, \\ m^*(E) &= \inf \{m(S), E \subseteq S, S \text{ polirettangolo aperto}\}. \end{aligned}$$

Effettivamente, per ogni polirettangolo $P \subseteq E$, fissato $\varepsilon > 0$, esiste sempre un polirettangolo chiuso $P' \subseteq P$ tale che $m(P') > m(P) - \varepsilon$, per cui non vi è perdita di generalità nel limitarsi, per il sup, ai polirettangoli chiusi.

Teorema 4.12. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme limitato. Allora:*

$$m_*(E) \leq \sup_{K \subseteq E \text{ compatto}} \lambda(K) \leq \inf_{E \subseteq A \text{ aperto}} \lambda(A) \leq m^*(E).$$

In particolare, se E è PJ-misurabile, allora è anche Lebesgue-misurabile e $m(E) = \lambda(E)$.

4.4 Esempi e controesempi

Esempio 4.13. Sia $\mathbb{Q} = \{q_n, n = 1, 2, \dots\}$. Fissato $\varepsilon > 0$ sia:

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(q_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right).$$

Allora A è aperto, denso in \mathbb{R} e $\lambda(A) \leq \varepsilon$. Inoltre $\mathbb{R} \setminus A$ ha misura infinita e interno vuoto.

Ciò mostra che un aperto denso in \mathbb{R} può avere misura arbitrariamente piccola e, inoltre, che un insieme di misura non nulla non ha necessariamente un interno non vuoto.

Problema 4.14. Trovare un $E \subseteq [0, 1]$ misurabile tale che E e $[0, 1] \setminus E$ hanno entrambi misura positiva e non contengono intervalli aperti.

Esercizio 4.15. Se $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è limitato, allora E è PJ-misurabile se e solo se E è Lebesgue-misurabile e $\lambda(\partial E) = 0$.

Soluzione. Se E è PJ-misurabile, allora è anche Lebesgue misurabile. Inoltre la sua frontiera è PJ-misurabile e $m(\partial E) = 0$ (vedi Problema D.9), quindi $\lambda(\partial E) = m(\partial E) = 0$. D'altra parte, se $\lambda(\partial E) = 0$, fissato $\varepsilon > 0$ esiste un aperto $A \supseteq \partial E$ tale che $\lambda(A) < \varepsilon$. Possiamo scrivere A come unione numerabile di rettangoli aperti e, poichè ∂E è compatto, un numero finito di questi rettangoli ricopre A . La loro unione è un polirettangolo $\partial E \subseteq P \subseteq A$. Di conseguenza:

$$m^*(\partial E) \leq m(P) = \lambda(P) \leq \lambda(A) < \varepsilon.$$

Dunque $\lambda^*(\partial E) = 0$ e E è PJ-misurabile.

Esempio 4.16 (Insieme di Cantor). Consideriamo la successione:

$$\begin{aligned} C_0 &= [0, 1], \\ C_1 &= \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \\ C_2 &= \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] \\ &\vdots \end{aligned}$$

L'insieme di Cantor definito da $C \equiv \bigcap_n C_n$ gode di alcune proprietà notevoli. Innanzitutto ha misura nulla, dato che per ogni n :

$$\lambda(C) \leq \lambda(C_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Dal punto di vista topologico, esso è compatto, ha interno vuoto e non ha punti isolati.

La compattezza è evidente, mentre il fatto che abbia interno vuoto segue da $\lambda(C) = 0$. Per vedere che non ha punti isolati, si noti che se $x \in C$, allora $x \in C_n$ per ogni n . Dato $\varepsilon > 0$, se $3^{-n} < \varepsilon$ allora $x \in C_n$, per cui x entra in un intervallo di lunghezza 3^{-n} . In questo insieme vi sono almeno due punti di C (i suoi estremi) e questi distano da x meno di ε . Ne concludiamo che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $x' \in C$, $x' \neq x$, tale che $|x' - x| < \varepsilon$, ovvero C non contiene punti isolati.

Problema 4.17. Dimostrare che ogni sottoinsieme di \mathbb{R} di misura esterna positiva contiene un sottoinsieme non misurabile.

Soluzione. La costruzione che segue è simile a quella dell'insieme di Vitali. Sia $\mathbb{Q} = (q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una denumerazione dei razionali. Definiamo la relazione di equivalenza:

$$x \sim y \quad \text{se } x - y \in \mathbb{Q},$$

scegliamo (assioma della scelta!) un $x \in [x]$ da ogni classe di equivalenza $[x]$ e poniamo:

$$E = \bigcup_{[x]} \{x\}.$$

Se $n \neq m$, allora:

$$(E + q_n) \cap (E + q_m) = \emptyset.$$

Infatti, se $a \in (E + q_n) \cap (E + q_m)$, allora $a = x + q_n$ e $a = y + q_m$ per qualche $x \in E$ e $y \in E$. Ne segue che $x \sim a \sim y$, cioè $x \sim y$ e, per costruzione di E , $x = y$. Pertanto

$$q_m - q_n = x - y = 0,$$

ovvero $n = m$.

Notiamo che $\bigcup_n (E + q_n) = \mathbb{R}$. Infatti, se $a \in \mathbb{R}$, allora $a \in [x]$ per qualche classe di equivalenza $[x]$. Se $x \in E$ e $x \in [x]$, allora $a - x = q_n$ per qualche n , per cui $a = x + q_n \in E + q_n$.

Sia ora $A \subset \mathbb{R}$, e supponiamo che ogni sottoinsieme di A (in particolare A) sia misurabile. Allora:

$$A_n = A \cap (E + q_n)$$

è misurabile per ogni n , $A = \bigcup_n A_n$ e:

$$\lambda(A) = \bigcup_n \lambda(A_n),$$

dato che gli $E + q_n$ sono disgiunti.

Fissiamo ora $n \in \mathbb{N}$ e sia $K \subseteq A_n$ un compatto. Sia H l'unione degli insiemi $K + r$, dove $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Allora H è limitato, per cui $\lambda(H) < \infty$. Poichè $K \subseteq E + q_n$, gli insiemi $K + r$ sono mutuamente disgiunti, per cui:

$$\lambda(H) = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]} \lambda(K + r) = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]} \lambda(K)$$

e poichè $\lambda(H) < \infty$, si ha $\lambda(K) = 0$. Ne segue che $\lambda(A_n) = 0$ e quindi $\lambda(A) = 0$.

Problema 4.18. Trovare una successione decrescente di insiemi $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tale che $\lambda^*(A_1) < \infty$ e:

$$\lambda^*(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) < \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda^*(A_k)$$

Soluzione. Poichè la misura di Lebesgue è continua dall'alto, gli A_k devono essere necessariamente non misurabili. Sia V l'insieme di Vitali (vedi Esempio 1.3), poniamo $\mathbb{Q} \cap [0, 1] = (q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e sia $V_k = V + q_k$ e $A_m = \bigcup_{k=m}^{\infty} V_k$. Come si è già visto, i V_k sono a due a due disgiunti. Se $x \in A_1$, allora esiste un'unico k tale che $x \in V_k$. Di conseguenza $x \notin V_{k+p}$ per ogni $p = 1, 2, \dots$, cioè $x \notin A_{k+1}$. Ne segue che:

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m = \emptyset.$$

D'altra parte da $[0, 1] \subseteq \bigcup_k V_k$ (v. Esempio 1.3), segue $\lambda^*(V_k) = \lambda^*(V) > 0$. Poichè $V_k \subseteq A_k$, si ha

$$\lambda^*(A_k) \geq \lambda^*(V) > 0$$

per ogni k . In conclusione:

$$0 = \lambda^*(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) < \lambda^*(V) \leq \lambda^*(A_k)$$

e, passando al limite $k \rightarrow \infty$:

$$\lambda^*(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) < \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda^*(A_k),$$

come voluto.

Esempio 4.19 (Funzione di Cantor-Vitali). Sia $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$ l'insieme di Cantor. In questo esempio costruiamo una funzione $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ con le seguenti proprietà:

1. f è continua.
2. f è non decrescente con $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.
3. $f'(x)$ esiste ed è uguale a zero per quasi ogni $x \in [0, 1]$.
4. $f(C) = [0, 1]$.

proprietà mostra, in particolare, che C ha la cardinalità di $[0, 1]$ e f porta un esempio di una funzione che manda un insieme di misura nulla in un insieme di misura 1.

Definiamo una successione di funzioni $f_n: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ come segue:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= x \\ f_1(x) &= \begin{cases} \frac{3}{2}x & x \in [0, \frac{1}{3}] \\ \frac{1}{2} & x \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2}(x - \frac{2}{3}) & x \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases} \\ &\vdots \end{aligned}$$

In generale, f_n è una spezzata continua, localmente costante in $[0, 1] \setminus C_n$ e con pendenza $(\frac{3}{2})^n$ in C_n . In particolare, ogni f_n è monotona crescente, localmente costante in $[0, 1] \setminus C_n$ e tale che $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$. Si ha inoltre:

$$|f_n(x) - f_{n+k}(x)| \leq \frac{1}{2^n}$$

per ogni $x \in [0, 1]$. Di conseguenza, f_n converge uniformemente a una f continua e non decrescente, tale che $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$.

Se $x \in [0, 1] \setminus C_n$, allora f_m è costante in un intorno di x per ogni $m \geq n$. Di conseguenza, f è costante nello stesso intorno e $f'(x) = 0$. Poichè $\bigcup_n ([0, 1] \setminus C_n) = [0, 1] \setminus C$ ha misura 1, $f'(x)$ esiste ed è uguale a zero quasi ovunque.

Mostriamo ora che $f(C) = [0, 1]$. Poichè $f(I \setminus C_n) = f_n(I \setminus C_n)$ è un insieme finito, per cui $f(I \setminus C_n)$ ha misura nulla per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi:

$$f(I \setminus C) = \bigcup_n f(I \setminus C_n),$$

ha misura nulla. Ora, poichè f è continua e $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, si ha $f([0, 1]) = [0, 1]$, per cui:

$$[0, 1] \setminus f(C) = f([0, 1]) \setminus f(C) \subseteq f([0, 1] \setminus C).$$

Quindi $[0, 1] \setminus f(C)$ ha misura nulla. Ma $f(C)$ è compatto, per cui $[0, 1] \setminus f(C)$ è aperto. Di conseguenza $[0, 1] \setminus f(C) = \emptyset$, ovvero $f(C) = [0, 1]$.

Diamo una dimostrazione alternativa di $f(C) = [0, 1]$. Scelto $y \in [0, 1]$, esiste per costruzione una successione x_n tale che $x_n \in C_n$ e $f_n(x_n) = y$. Da questa possiamo estrarre una sottosuccessione x_{n_k} convergente a qualche $x_0 \in [0, 1]$. Mostriamo che $x_0 \in C$. Infatti, se $\xi \in I \setminus C = \bigcup_n (I \setminus C_n)$, allora $\xi \in I \setminus C_n$ per qualche n . Ma $I \setminus C_n$ è aperto, per cui esiste un intorno $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset I \setminus C_n \subseteq I \setminus C_{n+1} \subseteq \dots$. Ne segue che $|x_{n_k} - \xi| \geq \varepsilon$ definitivamente, per cui x_{n_k} non può convergere a ξ .

Dunque $x_0 \in C$. Ma allora:

$$\begin{aligned} |f(x_0) - y| &= |f(x_0) - f_{n_k}(x_{n_k})| \\ &\leq |f(x_0) - f(x_{n_k})| + |f(x_{n_k}) - f_{n_k}(x_{n_k})| \\ &\leq |f(x_0) - f(x_{n_k})| + \sup_{[0,1]} |f - f_{n_k}| \end{aligned}$$

Poichè f è continua e $f_n \rightarrow f$ uniformemente, l'ultimo membro tende a zero per $k \rightarrow \infty$, per cui $f(x_0) = y$ e, poichè $y \in [0, 1]$ è arbitrario, $f(C) = [0, 1]$.

Esempio 4.20 (Esempio di un insieme Lebesgue-misurabile non boreliano). Definiamo $F: [0, 1] \rightarrow [0, 2]$ tramite:

$$F(x) = x + f(x), \quad x \in [0, 1],$$

dove f è la funzione di Cantor-Vitali. La F è continua e quindi, poichè $F(0) = 0$, $F(1) = 2$ suriettiva. Inoltre è strettamente crescente, con inversa continua (dato che $[0, 1]$ è compatto). Mostriamo che $\lambda(F(C)) = 1$.

Possiamo scrivere

$$[0, 1] \setminus C_n = \bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} I_i^{(n)},$$

dove gli $I_i^{(n)} = (a_i^{(n)}, b_i^{(n)})$ sono intervalli disgiunti. Ora:

$$\lambda(F(I_i^{(n)})) = F(b_i^{(n)}) - F(a_i^{(n)}) = b_i^{(n)} - a_i^{(n)} = \lambda(I_i^{(n)}),$$

per cui, poichè F è iniettiva:

$$\lambda(F([0, 1] \setminus C_n)) = \sum_{i=1}^{2^{n-1}} \lambda(F(I_i^{(n)})) = \sum_{i=1}^{2^{n-1}} \lambda(I_i^{(n)}) = \lambda([0, 1] \setminus C_n).$$

Ora,

$$[0, 1] \setminus C = \bigcup_n [0, 1] \setminus C_n,$$

per cui:

$$F([0, 1] \setminus C) = \bigcup_n F([0, 1] \setminus C_n)$$

e

$$\lambda(F([0, 1] \setminus C)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(F([0, 1] \setminus C_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda([0, 1] \setminus C_n) = \lambda([0, 1] \setminus C) = 1.$$

D'altra parte, poichè F è iniettiva:

$$[0, 2] = F([0, 1] \setminus C) \cup F(C),$$

dove l'unione è disgiunta. Ne segue che $\lambda(F(C)) = 1$.

Sia ora $S \subseteq F(C)$ un insieme non misurabile. Allora $E = F^{-1}(S) \subseteq C$ è Lebesgue-misurabile con misura di Lebesgue nulla. Ora, F^{-1} è continua, per cui se $G \subseteq [0, 1]$ è boreliano, allora $F(G) = (F^{-1})^{-1}(G)$ è boreliano. Poichè $F(E) = S$ non è Lebesgue misurabile (e quindi nemmeno boreliano), si ha che E non è boreliano.

4.5 Confronto fra integrale di Riemann e integrale di Lebesgue

Teorema 4.21. *Sia $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata. Allora f è integrabile secondo Riemann se e solo se è Lebesgue-misurabile e:*

$$\lambda(\{x | f \text{ è discontinua in } x\}) = 0.$$

In tal caso, gli integrali di Riemann e Lebesgue coincidono.

Dimostrazione. Per ogni partizione $\mathcal{P} = \{t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_N = 1\}$ dell'intervallo $[0, 1]$ poniamo:

$$l_{\mathcal{P}}(x) = \sum_{i=0}^{N-1} m_i \chi_{(t_i, t_{i+1}]}(x),$$

$$u_{\mathcal{P}}(x) = \sum_{i=0}^{N-1} M_i \chi_{(t_i, t_{i+1}]}(x),$$

dove:

$$m_i = \inf_{x \in [t_i, t_{i+1}]} f(x),$$

$$M_i = \sup_{x \in [t_i, t_{i+1}]} f(x).$$

Le somme inferiori e superiori di f rispetto alla partizione \mathcal{P} sono date rispettivamente da:

$$L(f, \mathcal{P}) = \int_{[0,1]} l_{\mathcal{P}}(x) dx,$$

$$U(f, \mathcal{P}) = \int_{[0,1]} u_{\mathcal{P}}(x) dx,$$

dove i membri destri sono integrali di Lebesgue.

Notiamo che

$$l_{\mathcal{P}} \leq f \leq u_{\mathcal{P}}.$$

e se $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$ è un raffinamento di \mathcal{P} , allora:

$$l_{\mathcal{P}} \leq l_{\mathcal{Q}} \leq u_{\mathcal{Q}} \leq u_{\mathcal{P}}.$$

Ora, per definizione di integrale inferiore e superiore di f

$$L(f) = \sup_{\mathcal{P}} L(\mathcal{P}, f)$$

$$U(f) = \inf_{\mathcal{P}} U(\mathcal{P}, f)$$

esiste una successione di partizioni $(\mathcal{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tale che

$$L(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} L(\mathcal{P}_n, f)$$

$$U(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} U(\mathcal{P}_n, f)$$

e, senza perdita di generalità, possiamo supporre $|\mathcal{P}_n| \leq \frac{1}{n}$. Se poniamo:

$$l_n = l_{\mathcal{P}_n}, \quad u_n = u_{\mathcal{P}_n},$$

poichè:

$$l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq f \leq \dots \leq u_2 \leq u_1,$$

allora esistono i limiti puntuali:

$$l(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} l_n(x)$$

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x)$$

e, poichè ogni l_n e u_n è misurabile, l ed u sono misurabili. Poichè queste sono inoltre limitate, possiamo applicare il teorema della convergenza dominata per concludere:

$$L(f) = \int_{[0,1]} l(x) dx,$$

$$U(f) = \int_{[0,1]} u(x) dx.$$

Poniamo:

$$N = \cup_n \mathcal{P}_n$$

ha misura nulla. Notiamo che, se $x \notin N$, allora f è continua in x se e soltanto se $u(x) = l(x)$ ⁶.

Ora, per costruzione:

$$l \leq f \leq u.$$

⁶Ciò mostra in particolare che l'insieme dei punti in cui una $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata è continua è misurabile.

Se f è integrabile secondo Riemann, allora $U(f) = L(f)$, per cui:

$$\int_{[0,1]} \{u(x) - l(x)\} dx = 0.$$

Poichè $u - l \geq 0$, ne segue che:

$$u(x) - l(x) = 0 \quad \text{q.o.}$$

e quindi

$$f(x) - l(x) = 0 \quad \text{q.o.}$$

Di conseguenza, f è misurabile secondo Lebesgue, continua quasi ovunque e:

$$\int_{[0,1]} f(x) dx = L(f)$$

dove il membro destro non è altro che l'integrale di Riemann.

Viceversa, se f è misurabile secondo Lebesgue e continua quasi ovunque, allora $u(x) = l(x)$ quasi ovunque, il che implica $U(f) = L(f)$, ovvero che f è integrabile secondo Riemann e, poichè $l \leq f \leq u$, che l'integrale di Lebesgue di f coincide con $L(f)$ che, di nuovo, è proprio l'integrale di Riemann di f . \square

Osservazione 4.22. È facile vedere che un $E \subset \mathbb{R}^n$ limitato è misurabile secondo Peano-Jordan se e soltanto se la sua funzione caratteristica χ_E è integrabile secondo Riemann. Ma χ_E è Lebesgue-misurabile se e solo se E è Lebesgue-misurabile, e i punti di discontinuità di χ_E sono esattamente i punti della frontiera topologica $\partial E = \overline{E} \setminus E^\circ$. Dal teorema precedente segue quindi che un insieme limitato è misurabile secondo Peano-Jordan se e solo se è misurabile secondo Lebesgue e la sua frontiera topologica ha misura di Lebesgue nulla.

4.6 Misura di Lebesgue-Stieltjes

Sia $\mu: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty)$ una misura boreliana finita. Allora $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ definita da:

$$F(x) = \mu((-\infty, x])$$

è una funzione non decrescente e continua a destra, in quanto, per ogni successione $x_n \downarrow x$ si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu((-\infty, x_n]) = \mu(\cap_n (-\infty, x_n]) = \mu((-\infty, x]) = F(x).$$

La F è detta funzione di distribuzione della misura μ .

Viceversa risulta che, data una funzione a valori reali non decrescente e continua a destra f , esiste un'unica misura boreliana μ tale che

$$\begin{aligned} \mu((a, b]) &= f(b) - f(a), \\ \mu((a, \infty)) &= f(\infty) - f(a), \\ \mu(\mathbb{R}) &= f(\infty) - f(-\infty). \end{aligned}$$

Se $-\infty < f(-\infty) < f(\infty) < \infty$, la misura μ è finita e $F = f - f(-\infty)$ è la funzione di distribuzione di μ .

Sia $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ la famiglia di insiemi ottenuti come unione di un numero finito (incluso l'unione vuota) di intervalli elementari disgiunti della forma:

$$\begin{aligned} (a, b] & \quad (-\infty \leq a \leq b < +\infty), \\ (a, \infty) & \quad (-\infty \leq a < \infty). \end{aligned}$$

Notiamo che, se $-\infty \leq a < b < +\infty$, $-\infty \leq c < d < +\infty$ allora

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \setminus (a, b] &= (-\infty, a] \cup (b, \infty) \\ \mathbb{R} \setminus (a, \infty) &= (-\infty, a] \\ (a, b] \cap (c, d] &= (\max\{a, c\}, \min\{b, d\}] \\ (a, b] \cap (c, \infty) &= (\max\{a, c\}, b] \\ (a, \infty) \cap (c, \infty) &= (\max\{a, c\}, \infty) \end{aligned}$$

Dal Lemma 4.2 segue che \mathcal{A} è un'algebra.

Se $E \in \mathcal{A}$, allora $E = \cup_k I_k \in \mathcal{A}$, dove gli I_k sono intervalli disgiunti. Mostriamo che il numero:

$$\mu_0(E) = \sum_k \mu_0(I_k)$$

non dipende dalla partizione di E (la misura degli intervalli elementari è stata definita sopra). Infatti, se $E = \cup_{k=1}^N I_k = \cup_{i=1}^M J_i$, dove anche gli intervalli elementari J_i sono disgiunti, allora:

$$\begin{aligned} I_k &= \cup_{i=1}^M (I_k \cap J_i) = \cup_{i=1}^M L_{ki}, \\ J_i &= \cup_{k=1}^N (I_k \cap J_i) = \cup_{k=1}^N L_{ki} \end{aligned}$$

dove gli $L_{ki} = I_k \cap J_i$ sono intervalli elementari disgiunti. Scrivendo $L_{ki} = (a_{ki}, b_{ki}]$ (oppure (a_{ki}, b_{ki}) se $b_{ki} = \infty$), possiamo sempre ordinare gli L_{ki} in modo tale che $b_{ki} \leq a_{k,i+1}$. Poichè I_k è connesso, dev'essere $b_{ki} = a_{k,i+1}$, per $i = 1, 2, \dots, M-1$, e per cui:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M \mu_0(L_{ki}) &= \sum_{i=1}^M \{-f(a_{ki}) + f(b_{ki})\} \\ &= -f(a_{k1}) + \underbrace{f(b_{k1}) - f(a_{k2})}_{=0} + \underbrace{f(b_{k2}) - f(a_{k3})}_{=0} + \dots \\ &= -f(a_{k1}) + f(b_{kM}) \\ &= \mu_0(I_k). \end{aligned}$$

Similmente si vede che:

$$\sum_{k=1}^N \mu_0(L_{ki}) = \mu_0(J_i).$$

Di conseguenza:

$$\sum_{i=1}^M \mu_0(J_i) = \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N \mu_0(L_{ki}) = \sum_{k=1}^N \mu_0(I_k),$$

come volevasi dimostrare. In particolare, si vede che μ_0 così definita coincide per gli intervalli elementari con la definizione precedente, per cui la nostra notazione è consistente.

Dunque, $E \mapsto \mu_0(E)$ è una funzione ben definita su \mathcal{A} . Vogliamo far vedere che μ_0 è una premisura, ovvero, se $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{A}$ sono disgiunti e $E = \cup_i E_i \in \mathcal{A}$, allora

$$\mu_0(E) = \sum_i \mu_0(E_i).$$

La dimostrazione procede in modo simile a quella della Proposizione 4.5, per la premisura di Lebesgue (che coincide con la misura di Lebesgue-Stieltjes per $f(x) = x$).

Notiamo innanzitutto che se l'unione $\cup_i E_i$ è finita (ovvero se $E_i = \emptyset$ definitivamente), allora la tesi segue immediatamente scegliendo una qualsiasi partizione disgiunta $I_k^{(i)}$ per ciascun E_i e notando che $\{I_k^{(i)}, k, i\}$ è una partizione disgiunta di E .

Di qui segue la monotonia di μ_0 : se $E \subseteq F$, $E, F \in \mathcal{A}$, allora:

$$\mu_0(E) = \mu_0((E \setminus F) \cup F) = \mu_0(E \setminus F) + \mu_0(F) \geq \mu_0(F).$$

Supponiamo ora che l'unione sia numerabile (non necessariamente finita). Per ogni $N \in \mathbb{N}$ si ha:

$$\sum_{i=1}^N \mu_0(E_i) = \mu_0(\cup_{i=1}^N E_i) \leq \mu_0(E),$$

da cui:

$$\sum_i \mu_0(E_i) \leq \mu_0(E).$$

Per dimostrare la disuguaglianza opposta, notiamo innanzitutto che non è restrittivo supporre che ogni $E_i = (a_i, b_i]$ sia un intervallo.

Supponiamo prima che $E = (a, b]$, sia un intervallo limitato e fissiamo $\varepsilon > 0$. Poichè f è continua a destra, esiste $a < a_1 \leq b$ tale che

$$f(a_1) - f(a) < \frac{\varepsilon}{2},$$

vale a dire:

$$\mu_0((a, b]) - \mu_0((a_1, b]) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Per ogni $E_i = (a_i, b_i]$ esiste un $\delta_i > 0$ tale che:

$$f(b_i + \delta_i) - f(b_i) < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}},$$

vale a dire:

$$\mu_0((a_i, b_i + \delta_i]) - \mu_0((a_i, b_i]) < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}.$$

Notiamo ora che:

$$\{(a_i, b_i + \delta_i)\}$$

è un ricoprimento aperto del compatto:

$$K = [a_1, b],$$

per cui esiste un sottoricoprimento finito, diciamo $(a_1, b_1 + \delta_1), \dots, (a_n, b_n + \delta_n)$, vale a dire

$$(a_1, b] \subseteq [a_1, b] \subseteq \cup_{i=1}^n (a_i, b_i + \delta_i) \subseteq \cup_{i=1}^n (a_i, b_i] + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Notando ora che la μ_0 è finitamente subadditiva, si ha:

$$\mu_0((a_1, b]) \leq \sum_{i=1}^n \mu_0((a_i, b_i + \delta_i]) \leq \sum_i \mu_0((a_i, b_i + \delta_i]) \leq \sum_i \mu_0((a_i, b_i]) + \frac{\varepsilon}{2},$$

per cui

$$\mu_0((a, b]) < \mu_0((a_1, b]) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_i \mu_0((a_i, b_i]) + \varepsilon,$$

da cui segue la tesi nel caso in cui $E = (a, b]$ è un intervallo limitato.

Se ora E è un intervallo della forma (a, ∞) con $-\infty < a$, allora:

$$\mu_0((a, \infty)) = f(\infty) - f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) - f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_0((a, n]).$$

Notiamo che:

$$(a, n] = \cup_i [(a, n] \cap E_i).$$

Per quanto visto sopra:

$$\mu_0((a, n]) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0((a, n] \cap E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(E_i),$$

da cui:

$$\mu_0((a, \infty)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(E_i).$$

I casi $E = (-\infty, a]$, $(-\infty, \infty)$ si trattano in modo identico.

Se ora $E \in \mathcal{A}$ è generico, scriviamo:

$$E = \cup_{k=1}^N I_k,$$

dove gli I_k sono disgiunti. Notiamo che:

$$I_k = \cup_i (I_k \cap E_i),$$

$$E_i = \cup_{k=1}^N (I_k \cap E_i)$$

dove gli $I_k \cap E_i$ sono disgiunti. Dai casi precedenti abbiamo:

$$\mu_0(E) = \sum_{k=1}^N \mu_0(I_k) = \sum_{k=1}^N \sum_i \mu_0(I_k \cap E_i) = \sum_i \sum_{k=1}^N \mu_0(I_k \cap E_i) = \sum_i \mu_0(E_i),$$

e il teorema è dimostrato.

A questo punto, tramite il Teorema di Hahn-Kolmogorov, otteniamo una misura μ che estende la premisura μ_0 a una σ -algebra contenente \mathcal{A} , unica sulla σ -algebra $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ generata da \mathcal{A} . Poichè \mathcal{A} genera i boreliani, otteniamo in particolare un'unica misura su $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ che estende μ_0 . Questa è la misura di Lebesgue-Stieltjes.

Generalizzazione al caso multidimensionale Quanto fatto sopra si può generalizzare al caso multidimensionale come segue. Consideriamo dapprima una misura boreliana finita \mathbb{R}^n , sia questa μ . Alla misura possiamo associare una funzione di distribuzione:

$$F(\mathbf{x}) = \mu((-\infty, \mathbf{x}]),$$

dove la notazione:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n).$$

In modo simile al caso unidimensionale, la funzione di distribuzione è non decrescente e continua a destra in ciascuna variabile x_i . Se $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$, con ogni $\delta_i \geq 0$, allora:

$$\mu((-\infty, \mathbf{x} + \boldsymbol{\delta}]) - \mu((-\infty, \mathbf{x}]) = \sum_{k=1}^n \left\{ \mu\left(-\infty, \mathbf{x} + \sum_{i=1}^k \mathbf{e}_i \delta_i\right) - \mu\left(-\infty, \mathbf{x} + \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{e}_i \delta_i\right) \right\} \leq 0,$$

ovvero, in termini della funzione di distribuzione:

$$\sum_{k=1}^n \{F(x_1 + \delta_1, x_2 + \delta_2, \dots, x_k + \delta_k, x_{k+1}, \dots, x_n) - F(x_1 + \delta_1, x_2 + \delta_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)\} \geq 0.$$

In termini della funzione di distribuzione, possiamo scrivere la misura del multi-intervallo $(\mathbf{a} - \boldsymbol{\delta}, \mathbf{a}]$ come:

$$\mu((\mathbf{a} - \boldsymbol{\delta}, \mathbf{a}]) = \sum_{\{t_i=0,1\}} (-1)^{\sum_i t_i} F(a_1 - t_1 \delta_1, a_2 - t_2 \delta_2, \dots, a_n - t_n \delta_n).$$

Viceversa, sia data una funzione F non decrescente e continua a destra in ciascun argomento, e tale che:

$$\sum_{\{t_i=0,1\}} (-1)^{\sum_i t_i} F(a_1 - t_1 \delta_1, a_2 - t_2 \delta_2, \dots, a_n - t_n \delta_n) \geq 0$$

per ogni $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ e $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n > 0$. Allora, con una costruzione simile a quella per il caso multidimensionale, si può vedere che la F è la funzione di distribuzione di un'unica misura boreliana su \mathbb{R}^n , tale che la misura degli intervalli sia data da:

$$\int_{(\mathbf{a}-\boldsymbol{\delta}, \mathbf{a}]} dF(\mathbf{x}) = \sum_{\{t_i=0,1\}} (-1)^{\sum_i t_i} F(a_1 - t_1 \delta_1, a_2 - t_2 \delta_2, \dots, a_n - t_n \delta_n).$$

Un caso particolarmente interessante è quello dato da una F della forma:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_1(x_1)F_2(x_2) \cdots F_n(x_n),$$

dove le F_n sono funzioni di distribuzione in una variabile. Si verifica facilmente che la F è una funzione di distribuzione. Un caso particolare del teorema che segue mostra che la corrispondente misura di Stieltjes $dF(\mathbf{x})$ è essenzialmente il prodotto delle misure $dF_1(x_1)dF_2(x_2) \cdots dF_n(x_n)$ sul $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = [\mathcal{B}(\mathbb{R})]^{n7}$.

Teorema 4.23. *Siano α , β e γ le misure di Stieltjes relative alle funzioni di distribuzione $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $G: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ e $F \cdot G: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$ rispettivamente. Se $E = E_1 \times E_2$, dove $E_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ e $E_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, allora:*

$$\gamma(E) = \alpha(E_1)\beta(E_2).$$

⁷Vedi Rudin W., "Real and Complex Analysis", pag. 176, es. 7.

Dimostrazione. Per la dimostrazione useremo la seguente:

Proposizione 4.24. *La misura di Lebesgue-Stieltjes è regolare.*

Dimostrazione. Regolarità esterna. Sia dato un intervallo $(\mathbf{a}, \mathbf{b}] \subseteq \mathbb{R}^n$. Fissato $\varepsilon > 0$, poichè F è continua a destra, esiste un $\delta > 0$ tale che:

$$\mu((\mathbf{a}, \mathbf{b} + \delta]) - \mu((\mathbf{a}, \mathbf{b}]) < \varepsilon$$

e quindi, a maggior ragione:

$$\mu((\mathbf{a}, \mathbf{b} + \delta)) - \mu((\mathbf{a}, \mathbf{b})) < \varepsilon.$$

Sia ora $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme di Borel. Per il teorema di Hahn-Kolmogorov, la misura di E coincide con la misura esterna:

$$\mu(E) = \inf \left\{ \sum_i \mu(A_i) \mid E \subseteq \cup_i A_i \right\},$$

dove ogni A_i è un'unione finita di intervalli elementari della forma $(\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Fissato $\varepsilon > 0$, scegliamo un ricoprimento A_i tale che:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) < \mu(E) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Per ogni $i = 1, 2, \dots$ esiste allora un aperto G_i tale che $A_i \subseteq G_i$ e

$$\mu(G_i) \leq \mu(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Di conseguenza:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_i) < \mu(E) + \varepsilon$$

e quindi l'aperto $G = \cup_i G_i$ è tale che:

$$\mu(G) < \mu(E) + \varepsilon,$$

il che prova la regolarità esterna.

Regolarità interna. Segue dalla regolarità esterna come nella dimostrazione del Teorema 4.7. \square

Notiamo ora che la tesi è vera per gli intervalli elementari: se $(\mathbf{a} - \delta, \mathbf{a}] = \left(\mathbf{a}^{(1)} - \delta^{(1)}, \mathbf{a}^{(1)} \right] \times \left(\mathbf{a}^{(2)} - \delta^{(2)}, \mathbf{a}^{(2)} \right]$, dove $(\mathbf{a}^{(1)} - \delta^{(1)}, \mathbf{a}^{(1)}) \in \mathbb{R}^n$ e $(\mathbf{a}^{(2)} - \delta^{(2)}, \mathbf{a}^{(2)}) \in \mathbb{R}^m$, allora:

$$\begin{aligned} \gamma((\mathbf{a} - \delta, \mathbf{a}]) &= \sum_{\{t_i^{(1)}, t_j^{(2)} = 0, 1\}} (-1)^{\sum_i t_i^{(1)} + \sum_j t_j^{(2)}} F(\mathbf{a}^{(1)} - \mathbf{t}^{(1)} \cdot \delta^{(1)}) G(\mathbf{a}^{(2)} - \mathbf{t}^{(2)} \cdot \delta^{(2)}) \\ &= \sum_{\{t_i^{(1)} = 0, 1\}} (-1)^{\sum_i t_i^{(1)}} F(\mathbf{a}^{(1)} - \mathbf{t}^{(1)} \cdot \delta^{(1)}) \sum_{\{t_j^{(2)} = 0, 1\}} (-1)^{\sum_j t_j^{(2)}} G(\mathbf{a}^{(2)} - \mathbf{t}^{(2)} \cdot \delta^{(2)}) \\ &= \alpha\left(\left(\mathbf{a}^{(1)} - \delta^{(1)}, \mathbf{a}^{(1)}\right)\right) \beta\left(\left(\mathbf{a}^{(2)} - \delta^{(2)}, \mathbf{a}^{(2)}\right)\right). \end{aligned}$$

Da ciò si può vedere che è vera anche per intervalli arbitrari. Ad esempio, nel caso di un intervallo aperto (\mathbf{a}, \mathbf{b}) , se $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$, allora:

$$\gamma((\mathbf{a}, \mathbf{b})) = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma\left(\left(\mathbf{a}, \mathbf{b} - \frac{\mathbf{1}}{n}\right)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha\left(\left(\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{b}^{(1)} - \frac{\mathbf{1}^{(1)}}{n}\right)\right) \beta\left(\left(\mathbf{a}^{(2)}, \mathbf{b}^{(2)} - \frac{\mathbf{1}^{(2)}}{n}\right)\right) = \alpha\left(\left(\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{b}^{(1)}\right)\right) \beta\left(\left(\mathbf{a}^{(2)}, \mathbf{b}^{(2)}\right)\right).$$

Supponiamo ora che E sia un aperto della forma $E = E_1 \times E_2$. Possiamo scrivere E_1 come unione numerabile:

$$E_1 = \cup_{k=1}^{\infty} \left(\mathbf{a}_k^{(1)}, \mathbf{b}_k^{(1)} \right).$$

Poniamo:

$$\begin{aligned} B_1 &= (\mathbf{a}_1^{(1)}, \mathbf{b}_1^{(1)}) \\ B_2 &= (\mathbf{a}_2^{(1)}, \mathbf{b}_2^{(1)}) \setminus I_1 \\ B_3 &= (\mathbf{a}_3^{(1)}, \mathbf{b}_3^{(1)}) \setminus (I_1 \cup I_2) \\ &\vdots \end{aligned}$$

e notiamo che ogni B_j è un'unione finita di intervalli disgiunti della forma $(\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{b}^{(1)})$, $(\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{b}^{(1)})$, oppure $[\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{b}^{(1)})$. Ne segue che E_1 è un'unione disgiunta di intervalli:

$$E_1 = \cup_{i=1}^{\infty} I_i^{(1)}$$

e similmente:

$$E_2 = \cup_{j=1}^{\infty} I_j^{(2)}.$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \mu((\cup_{i=1}^{\infty} I_i^{(1)}) \times (\cup_{j=1}^{\infty} I_j^{(2)})) \\ &= \sum_{i,j} \mu(I_i^{(1)} \times I_j^{(2)}) \\ &= \sum_{i,j} \mu_1(I_i^{(1)}) \mu_2(I_j^{(2)}) \\ &= \sum_i \mu_1(I_i^{(1)}) \sum_j \mu_2(I_j^{(2)}) \\ &= \mu_1(E_1) \mu_2(E_2). \end{aligned}$$

Quindi la tesi vale per gli aperti.

Supponiamo ora che $E = E_1 \times E_2$ sia un prodotto di compatti. Se $E_1 \times E_2 \subseteq A$, con A aperto, esistono due aperti $A_1 \supseteq E_1$ e $A_2 \supseteq E_2$ tali che $A_1 \times A_2 \subseteq A$ (Teorema di Wallace). Di conseguenza:

$$\mu(A) \geq \mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \mu_2(A_2) \geq \mu_1(E_1) \mu_2(E_2)$$

e, prendendo l'inf su tutti gli aperti contenenti $E_1 \times E_2$ si trova:

$$\mu(E_1 \times E_2) \geq \mu_1(E_1) \mu_2(E_2).$$

D'altra parte, se $E_1 \subseteq A_1$ e $E_2 \subseteq A_2$, con A_1 e A_2 aperti, allora $E_1 \times E_2 \subseteq A_1 \times A_2$, per cui:

$$\mu(E_1 \times E_2) \leq \mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \mu_2(A_2)$$

e prendendo l'inf su tutti gli aperti A_1 e A_2 si trova:

$$\mu(E_1 \times E_2) \leq \mu_1(E_1) \mu_2(E_2).$$

Per concludere, supponiamo che $E = E_1 \times E_2$ sia un prodotto di boreliani. Se $K_i \subseteq E_i \subseteq V_i$, con K_i compatto e V_i aperto, allora:

$$\mu_1(K_1) \mu_2(K_2) = \mu(K_1 \times K_2) \leq \mu(E_1 \times E_2) \leq \mu(V_1 \times V_2) = \mu_1(V_1) \mu_2(V_2).$$

Prendendo l'inf su tutti gli aperti e il sup su tutti i compatti si ottiene la tesi. \square

Corollario 4.25. *Nella notazione del teorema precedente, siano f e g funzioni boreliane su \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m , tali che $f \in L^1(\alpha)$, $g \in L^1(\beta)$. Allora $f \cdot g \in L^1(\gamma)$ e:*

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} (f \cdot g)(\mathbf{z}) d(F \cdot G)(\mathbf{z}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) dF(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^m} g(\mathbf{y}) dG(\mathbf{y}). \quad (4.4)$$

Dimostrazione. Il teorema precedente, insieme alla bilinearità in f e g di entrambi i membri dell'uguaglianza, mostrano che l'uguaglianza (4.4) è valida per f e g funzioni semplici.

Se f e g sono funzioni positive, f_n e g_n sono funzioni semplici monotonaemente convergenti a f e g , allora il teorema della convergenza monotona mostra che:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n+m}} (f \cdot g)(\mathbf{z}) d(F \cdot G)(\mathbf{z}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{n+m}} (f_n \cdot g_n)(\mathbf{z}) d(F \cdot G)(\mathbf{z}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_n(\mathbf{x}) dF(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^m} g_n(\mathbf{y}) dG(\mathbf{y}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) dF(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^m} g(\mathbf{y}) dG(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Da qui segue immediatamente che se $f \in L^1(\alpha)$ e $g \in L^1(\beta)$, allora $f \cdot g \in L^1(\gamma)$ e vale la (4.4). □

5 Integrazione astratta

5.1 Funzioni misurabili

5.1.1 Definizione

Definizione 5.1. Siano (X, \mathcal{M}) e (Y, \mathcal{N}) spazi misurabili. Una funzione $f: X \rightarrow Y$ si dice misurabile se per ogni $E \in \mathcal{N}$ si ha $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$.

Osservazione 5.2. In contesti particolari, parleremo di funzioni misurabili sottointendendo le σ -algebre dello spazio X e Y . In specifico:

1. $f: X \rightarrow Y$ con Y spazio topologico (in particolare $Y = \mathbb{R}^n$). In questo caso, salvo specificazione contraria, $\mathcal{N} = \mathcal{B}(Y)$ è la σ -algebra di Borel.
2. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow Y$. In questo caso, $\mathcal{M} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ è la σ -algebra di Lebesgue. Se invece $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, allora f si dirà Borel-misurabile. Notiamo che le funzioni Borel-misurabili sono anche Lebesgue-misurabili, ma non è vero il viceversa (v. Esercizio 5.10).
3. $f: X \rightarrow [0, \infty]$, $[0, \infty]$ è la semiretta estesa. In questo caso $\mathcal{N} = \mathcal{B}([0, \infty])$ è la σ -algebra di “Borel” della retta estesa che definiremo a breve.

Osservazione 5.3. È qui opportuno annotare alcune semplici proprietà della funzione fra insiemi $f^{-1}: \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$. Queste sono (l'insieme di indici A non è necessariamente numerabile):

1. $f^{-1}(\cup_{\alpha \in A} E_\alpha) = \cup_{\alpha \in A} f^{-1}(E_\alpha)$.
2. $f^{-1}(\cap_{\alpha \in A} E_\alpha) = \cap_{\alpha \in A} f^{-1}(E_\alpha)$.
3. $f^{-1}(Y \setminus E) = X \setminus f^{-1}(E)$.
4. $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Definizione 5.4. Sia \mathcal{M} una σ -algebra su X . Un sistema di generatori \mathcal{E} di \mathcal{M} è una collezione $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{M}$ tale che $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{E})$ è la σ -algebra generata da \mathcal{E} (v. Osservazione 2.7).

Teorema 5.5. Siano (X, \mathcal{M}) e (Y, \mathcal{N}) spazi misurabili e $f: X \rightarrow Y$ una funzione. Sia \mathcal{E} un sistema di generatori di \mathcal{N} . Allora f è misurabile se e solo se:

$$f^{-1}(E) \in \mathcal{M} \quad \forall E \in \mathcal{E}.$$

Dimostrazione. Poichè $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{N}$, se f è misurabile allora $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$ per ogni $E \in \mathcal{E}$. Viceversa, definiamo la famiglia:

$$\mathcal{N}_f = \{E \subseteq Y \mid f^{-1}(E) \in \mathcal{M}\}.$$

Chiaramente $\emptyset \in \mathcal{N}_f$. Se $E \in \mathcal{N}_f$, allora:

$$f^{-1}(Y \setminus E) = X \setminus f^{-1}(E) \in \mathcal{M},$$

per cui $Y \setminus E \in \mathcal{N}_f$. Se $\{E_i, i = 1, 2, \dots\} \subseteq \mathcal{N}_f$, allora:

$$f^{-1}(\cup_i E_i) = \cup_i f^{-1}(E_i) \in \mathcal{M},$$

per cui $\cup_i E_i \in \mathcal{N}_f$. Quindi \mathcal{N}_f è una σ -algebra. Ma, per ipotesi, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{N}_f$ e, poichè \mathcal{E} è un sistema di generatori per \mathcal{N} , $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}_f$. Dunque f è misurabile. \square

Corollario 5.6. Se X e Y sono spazi topologici, $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{B}(X)$, $\mathcal{N} = \mathcal{B}(Y)$ e $f: X \rightarrow Y$ è continua, allora f è misurabile. In particolare, le funzioni continue $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sono Lebesgue-misurabili.

Dimostrazione. Infatti gli aperti di Y sono un sistema di generatori per la σ -algebra di Borel su Y e, per definizione di continuità $f^{-1}(A)$ è aperto in X (e quindi misurabile) per ogni A aperto in Y . \square

Esercizio 5.7. Siano $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Verificare le seguenti affermazioni:

- (a) Se f e g sono Borel-misurabili, allora $f \circ g$ e $g \circ f$ sono Borel-misurabili.
- (b) Se f è Borel-misurabile e g è Lebesgue misurabile, allora $f \circ g$ è Lebesgue misurabile.

Problema 5.8. Trovare una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e una funzione $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue misurabile tale che $g \circ f$ non è Lebesgue-misurabile.

Proposizione 5.9. Sia data una funzione $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (i) f è misurabile.
- (ii) $f^{-1}((a, +\infty))$ è misurabile per ogni $a \in \mathbb{R}$.
- (iii) $f^{-1}([a, +\infty))$ è misurabile per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Grazie al Teorema (5.5), basta far vedere che $\mathcal{E} = \{(a, +\infty), a \in \mathbb{R}\}$ e $\mathcal{F} = \{[a, +\infty), a \in \mathbb{R}\}$ sono entrambi sistemi di generatori per la σ -algebra di Borel su \mathbb{R} .

Mostriamo ad esempio che \mathcal{E} genera $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Dato un intervallo aperto arbitrario (a, b) , si ha:

$$\begin{aligned} \{b\} &= [\mathbb{R} \setminus (b, \infty)] \cap \left[\bigcap_n \left(b - \frac{1}{n}, +\infty \right) \right] \\ (a, b) &= (a, +\infty) \setminus [(b, +\infty) \cup \{b\}], \end{aligned}$$

Dunque, una σ -algebra contenente \mathcal{E} contiene anche gli intervalli aperti, e quindi gli aperti in generale. Ma $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ è la più piccola σ -algebra contenente gli aperti, per cui è anche la più piccola σ -algebra contenente \mathcal{E} , cioè \mathcal{E} genera $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ e abbiamo finito. La dimostrazione per la famiglia \mathcal{F} è analoga. \square

Esercizio 5.10 (I boreliani della retta estesa). Sia $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ la retta estesa. Si ponga:

$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \{E \subseteq \overline{\mathbb{R}}, E \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

Dimostrare le seguenti affermazioni:

- (i) $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ è una σ -algebra contenente tutti gli insiemi di Borel di \mathbb{R} .
- (ii) $\mathcal{E} = \{(a, +\infty], a \in \mathbb{R}\}$ è un sistema di generatori di $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$.
- (iii) Una funzione $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ è misurabile se e solo se $f^{-1}(\{\pm\infty\}) \in \mathcal{M}$ e $\chi_{f^{-1}(\mathbb{R})} f$ è misurabile.

Esiste una topologia su $\overline{\mathbb{R}}$ che induce la topologia euclidea su \mathbb{R} e tale che $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ è la σ -algebra dei boreliani di $\overline{\mathbb{R}}$?

Soluzione 5.11. (i) Chiaramente $\overline{\mathbb{R}} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, per cui la $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ è non vuota. Se $E \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, allora:

$$(\overline{\mathbb{R}} \setminus E) \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} \setminus (E \cap \mathbb{R}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

per cui $\overline{\mathbb{R}} \setminus E \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. Se $\{E_i\} \subseteq \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, allora:

$$\mathbb{R} \cap (\cup_i E_i) = \cup_i (\mathbb{R} \cap E_i) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

per cui $\cup_i E_i \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. Dunque $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ è una σ -algebra.

(ii) Notiamo che $E \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ se e solo se $E = E_0 \cup F$, dove $E_0 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ e F è uno dei seguenti insiemi:

$$\emptyset, \quad \{+\infty\}, \quad \{-\infty\}, \quad \{-\infty, +\infty\},$$

che sono in particolare misurabili. Possiamo formare, tramite unioni e intersezioni numerabili e complementazioni di insiemi contenuti in \mathcal{E} tutti gli aperti di \mathbb{R} e i quattro insiemi F qui sopra. Quindi, la più piccola σ -algebra contenente \mathcal{E} contiene $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ e gli insiemi F e, di conseguenza, contiene $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. Poichè quest'ultima è una σ -algebra, segue che questa è la σ -algebra generata da \mathcal{E} .

(iii) Poniamo $g = \chi_{f^{-1}(\mathbb{R})} \cdot f$. Supponiamo che f sia misurabile. Se $E \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, possiamo distinguere i seguenti casi:

- $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ con $0 \notin E$. Allora $g^{-1}(E) = f^{-1}(E)$ è misurabile.
 - $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ con $0 \in E$. Allora $g^{-1}(E) = f^{-1}(E) \cup f^{-1}(\{-\infty, +\infty\})$ è misurabile.
 - $E = E_0 \cup F$, con $E_0 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ e $F = \{\pm\infty\}$ o $F = \{-\infty, +\infty\}$. Allora $g^{-1}(E) = g^{-1}(E_0)$ è misurabile per i due punti precedenti.
- Dunque g è misurabile.

Viceversa, supponiamo che g sia misurabile e che gli insiemi $f^{-1}(\{\pm\infty\})$ siano misurabili. Preso $E \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, poniamo $E = E_0 \cup F$ e $E_0 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ e F uno degli insiemi:

$$\emptyset, \quad \{+\infty\}, \quad \{-\infty\}, \quad \{-\infty, +\infty\}.$$

Allora $f^{-1}(E) = f^{-1}(E_0) \cup f^{-1}(F)$. L'insieme $f^{-1}(F)$ è, per le ipotesi su fatte f , misurabile. Inoltre, se $0 \notin E_0$, allora $f^{-1}(E_0) = g^{-1}(E_0)$, mentre se $0 \in E_0$, allora $f^{-1}(E_0) = g^{-1}(E_0) \setminus f^{-1}(\{-\infty, +\infty\})$. In entrambi casi $f^{-1}(E_0)$ è misurabile e, di conseguenza, f è misurabile.

Per rispondere all'ultima domanda, consideriamo un'omeomorfismo ϕ_0 dell'intervallo $(-1, 1)$ con la retta reale \mathbb{R} . Estendiamo ϕ_0 a una $\phi: [-1, 1] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tramite:

$$\phi(x) = \begin{cases} \phi_0(x) & x \in (-1, 1) \\ -\infty & x = -1 \\ +\infty & x = 1 \end{cases}$$

e definiamo una topologia τ su $\overline{\mathbb{R}}$ dichiarando che ϕ è un omeomorfismo, vale a dire che $E \in \tau$ è aperto in $\overline{\mathbb{R}}$ se e solo se $\phi^{-1}(E)$ è aperto in $[0, 1]$. Evidentemente la topologia di sottospazio indotta su \mathbb{R} coincide con la topologia euclidea. In particolare, gli aperti A in $\overline{\mathbb{R}}$ sono tali che $A \cap \mathbb{R}$ è aperto in \mathbb{R} , e quindi boreliano. Quindi $\tau \subseteq \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$.

D'altra parte, gli insiemi F del punto (ii) sono chiusi. La σ -algebra generata da τ contiene pertanto i boreliani ordinari $E_0 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ e i chiusi F , pertanto contiene la σ -algebra $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. Poichè $\tau \subseteq \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, segue che $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ è la σ -algebra generata dalla topologia τ .

5.1.2 Stabilità delle funzioni misurabili

Proposizione 5.12. *La composizione di funzioni misurabili è misurabile.*

Dimostrazione. Siano $f: (X, \mathcal{M}) \rightarrow (Y, \mathcal{N})$ e $g: (Y, \mathcal{N}) \rightarrow (Z, \mathcal{O})$ funzioni misurabili e sia $h \equiv g \circ f: X \rightarrow Z$. Se $E \in \mathcal{O}$ è misurabile, allora $g^{-1}(E) \in \mathcal{N}$ è misurabile e $h^{-1}(E) = f^{-1}(g^{-1}(E)) \in \mathcal{M}$ è misurabile. Quindi h è misurabile. \square

Proposizione 5.13. *Siano $f_i: X \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$, funzioni misurabili. Allora $f \equiv (f_1, f_2, \dots, f_n): X \rightarrow \mathbb{R}^n$ è misurabile.*

Dimostrazione. Poichè i rettangoli aperti generano la σ -algebra dei boreliani su \mathbb{R}^n , è sufficiente dimostrare che $f^{-1}(R)$ è misurabile se R è un rettangolo aperto. Se $R = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$, con I_i intervalli aperti di \mathbb{R} , allora:

$$f^{-1}(R) = f_1^{-1}(I_1) \cap f_2^{-1}(I_2) \cap \dots \cap f_n^{-1}(I_n).$$

Poichè le f_i sono misurabili, ciascun membro dell'intersezione è misurabile, per cui $f^{-1}(R)$ è misurabile, come volevasi dimostrare. \square

Corollario 5.14. (i) *Siano $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ misurabili. Allora la somma $f + g$ e il prodotto $f \cdot g$ sono misurabili.*

(ii) *Siano $f, g: X \rightarrow [0, \infty]$ misurabili. Allora la somma $f + g$ e il prodotto $f \cdot g$ sono misurabili.*

Dimostrazione. (i) Siano $\phi, \psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni:

$$\phi(x, y) = x + y, \quad \psi(x, y) = xy$$

e sia $F = (f, g): X \rightarrow \mathbb{R}^2$. Per la proposizione precedente, F è misurabile. Inoltre:

$$f + g = \phi \circ F, \quad f \cdot g = \psi \circ F.$$

Poichè ϕ e ψ sono continue, le composizioni $f + g$ e $f \cdot g$ sono misurabili, come volevasi dimostrare.

(ii) Per l'Esercizio 5.10, gli insiemi $f^{-1}(\{\infty\})$, $g^{-1}(\{\infty\})$ sono misurabili e le funzioni $\chi_{f^{-1}(\mathbb{R})}f$ e $\chi_{g^{-1}(\mathbb{R})}g$ sono misurabili. Di conseguenza, sono misurabili gli insiemi:

$$\begin{aligned} (f + g)^{-1}(\{\infty\}) &= f^{-1}(\infty) \cup g^{-1}(\infty) \\ (f \cdot g)^{-1}(\{\infty\}) &= [f^{-1}(\infty) \cap (X \setminus g^{-1}(0))] \cup [g^{-1}(\infty) \cap (X \setminus f^{-1}(0))]. \end{aligned}$$

Inoltre, per il punto (i), notando le identità:

$$\begin{aligned} \chi_{(f+g)^{-1}(\mathbb{R})}(f + g) &= \chi_{f^{-1}(\mathbb{R}) \setminus g^{-1}(\infty)}f + \chi_{g^{-1}(\mathbb{R}) \setminus f^{-1}(\infty)}g \\ \chi_{(f \cdot g)^{-1}(\mathbb{R})}f \cdot g &= (\chi_{f^{-1}(\mathbb{R})}f) \cdot (\chi_{g^{-1}(\mathbb{R})}g) \end{aligned}$$

si ha che i membri a sinistra sono misurabili. Quindi, di nuovo per l'Esercizio 5.10, le funzioni $f + g$ e $f \cdot g$ sono misurabili. \square

Definizione 5.15. Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}$ una successione di punti nella retta estesa. Si definiscono:

$$\begin{aligned}\limsup_n a_n &\equiv \inf_{k \geq 1} \sup_{n \geq k} a_n \\ \liminf_n a_n &\equiv \sup_{k \geq 1} \inf_{n \geq k} a_n\end{aligned}$$

Osservazione 5.16. Notiamo che:

$$\inf_{n \geq k} a_n = -\sup_{n \geq k} (-a_n)$$

e quindi:

$$\liminf_n a_n \equiv \sup_{k \geq 1} \left[-\sup_{n \geq k} (-a_n) \right] = -\inf_{k \geq 1} \sup_{n \geq k} (-a_n) = -\limsup_n (-a_n).$$

Lemma 5.17. *I limiti superiore e inferiore godono delle seguenti proprietà.*

- (i) $\liminf_n a_n = \lim_k \inf_{n \geq k} a_n$, $\limsup_n a_n = \lim_k \sup_{n \geq k} a_n$.
- (ii) $\liminf_n a_n \leq \limsup_n a_n$.
- (iii) Se $a_n \leq \beta$ definitivamente, allora $\limsup_n a_n \leq \beta$.
- (iv) Se $\alpha \leq a_n$ definitivamente, allora $\alpha \leq \liminf_n a_n$.
- (v) La successione (a_n) converge ad $a \in \overline{\mathbb{R}}$ se e solo se:

$$\limsup_n a_n = \liminf_n a_n = a.$$

Dimostrazione. Poniamo:

$$\alpha_k = \inf_{n \geq k} a_n, \quad \beta_k = \sup_{n \geq k} a_n.$$

Per la (i), basta notare che le successioni α_k e β_k sono monotone. La (ii) è allora ovvia dal fatto che $\alpha_k \leq \beta_k$. La (iii) e la (iv) seguono da $\beta_k \leq \beta$ e $\alpha \leq \alpha_k$ rispettivamente (le quali sono valide definitivamente). Per la (v), si noti che:

$$\alpha_k \leq a_k \leq \beta_k.$$

Se

$$\liminf_n a_n = \limsup_n a_n = a,$$

allora $a_k \rightarrow a$. Per il viceversa, supponiamo che $a_k \rightarrow a$. Se $a = \infty$, allora anche $\beta_k \rightarrow \infty = a$. Inoltre, per ogni $M > 0$, $a_k \geq M$ definitivamente, per cui $\lim_k \alpha_k \geq M$ e, poichè M è arbitrario $\alpha_k \rightarrow \infty = a$. Il caso $a = -\infty$ si tratta in modo simmetrico. Se infine $a \in \mathbb{R}$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che:

$$|a_k - a| < \varepsilon$$

per $k \geq N_\varepsilon$. Di conseguenza:

$$|\alpha_k - a| \leq \varepsilon \quad |\beta_k - a| \leq \varepsilon$$

per $k \geq N_\varepsilon$, il che mostra che $\alpha_k \rightarrow a$ e $\beta_k \rightarrow a$, come volevasi dimostrare. \square

Proposizione 5.18. *Sia $(f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}})_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili. Allora le seguenti funzioni:*

$$\begin{aligned}g_1 &= \sup_n f_n, \\ g_2 &= \inf_n f_n \\ g_3 &= \limsup_n f_n \\ g_4 &= \liminf_n f_n\end{aligned}$$

sono misurabili.

Dimostrazione. Per ogni $a \in \mathbb{R}$, si ha:

$$g_1^{-1}((a, +\infty]) = \cup_{n=1}^{\infty} \{x \in X | f_n(x) > a\} \in \mathcal{M}.$$

Quindi, per l'Esercizio 5.10, g_1 è misurabile. Inoltre:

$$g_2 = -\sup_n(-f_n)$$

è misurabile. Perciò:

$$g_3 = \inf_k \underbrace{\sup_{n \geq k} f_n}_{\text{misurabile}}$$

è misurabile e:

$$g_4 = -\limsup_n(-f_n)$$

è misurabile. □

Corollario 5.19. Sia $(f_n: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}})_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili e convergenti puntualmente a una $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Allora f è misurabile.

Corollario 5.20. Siano $f, g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ misurabili. Allora:

- (i) $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$ sono misurabili.
- (ii) $f^+ \equiv \max\{f, 0\}$ e $f^- \equiv \max\{-f, 0\}$ sono misurabili.
- (iii) $|f| = f^+ + f^-$ è misurabile.

Osservazione 5.21. Chiaramente $f = f^+ - f^-$; le funzioni f^+ e f^- sono dette parte positiva e negativa di f , rispettivamente. Se $f = h - g$, con $h \geq 0$ e $g \geq 0$, allora:

$$h = f + g \geq f,$$

per cui

$$h = \max\{h, 0\} \geq \max\{f, 0\} = f^+$$

e

$$g = h - f \geq f^+ - f = f^-.$$

5.1.3 Funzioni semplici

Definizione 5.22. Una funzione $s: X \rightarrow \mathbb{R}$ si dice semplice se è misurabile e $s(X) = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ è un insieme finito (notiamo che escludiamo esplicitamente i valori $\pm\infty$ per le funzioni semplici). Tale funzione si può scrivere nella forma canonica:

$$s = a_1\chi_{E_1} + a_2\chi_{E_2} + \dots + a_n\chi_{E_n},$$

dove gli insiemi $E_i = s^{-1}(\{a_i\})$ sono misurabili, disgiunti e $\cup_i E_i = X$.

Osservazione 5.23. Se $s, t: X \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni semplici, allora la loro somma $s + t$ e il loro prodotto è ancora una funzione semplice.

Teorema 5.24. Sia $f: X \rightarrow [0, \infty]$ una funzione misurabile. Allora esiste una successione $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di funzioni semplici tale che:

- (i) $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq f$.
- (ii) $\lim_n s_n(x) \rightarrow f(x)$ per ogni $x \in X$.
- (iii) $s_n|_E \rightarrow f|_E$ uniformemente se f è limitata in E .

Dimostrazione. L'idea della dimostrazione è il nocciolo della teoria dell'integrazione secondo Lebesgue, che procede partizionando il codominio (piuttosto che il dominio) delle funzioni misurabili.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo gli insiemi:

$$E_n^k = \left\{ x \in X \mid \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} \right\}, \quad k = 0, 1, \dots, 2^{2^n} - 1$$

$$F_n = \{x \in X \mid f(x) \geq 2^n\}.$$

Notiamo che $(\cup_{k=1}^{2^n-1} E_n^k) \cup F_n = X$ (una tale partizione dell'intervallo $[0, 2^n]$ è detta diadica). Poniamo:

$$s_n(x) = \begin{cases} \frac{k}{2^n} & x \in E_n^k \\ 2^n & x \in F_n \end{cases}$$

Chiaramente, $s_n \leq f$ per ogni n . Inoltre $s_n(X)$ è finito e poichè f è misurabile le funzioni s_n sono semplici. Inoltre, notando che la $n+1$ -esima partizione di X è un raffinamento della partizione n -esima, non è difficile vedere che $s_n \leq s_{n+1}$ per ogni n . Notiamo ora che, se $f(x) < \infty$, allora $x \in E_n^k$ definitivamente. Di conseguenza:

$$|s_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^n},$$

e quindi $s_n(x) \rightarrow f(x)$. In particolare, se f è limitata in E , allora $s_n \rightarrow f$ uniformemente in E . Se invece $f(x) = \infty$, allora $x \in F_n$ per ogni n , $s_n(x) = 2^n \rightarrow \infty = f(x)$. Il teorema è dimostrato. \square

5.1.4 Misurabilità e insiemi di misura nulla

Definizione 5.25. Sia (X, \mathcal{M}, μ) uno spazio di misura. Diremo che una proprietà puntuale $P(x)$ vale quasi ovunque $[\mu]$ se esiste un insieme $N \in \mathcal{M}$, con $\mu(N) = 0$ tale che $P(x)$ è vera per ogni $x \in X \setminus N$.

Osservazione 5.26. Spesso l'insieme

$$\mathcal{P} = \{x | P(x) \text{ è vera}\}$$

è misurabile. In tal caso, dire che $P(x)$ è vera quasi ovunque equivale a dire che $X \setminus \mathcal{P}$ ha misura nulla. Infatti, se $X \setminus \mathcal{P}$ ha misura nulla, posto $N = X \setminus \mathcal{P}$ si vede che $P(x)$ è vera quasi ovunque. Viceversa, se $P(x)$ è vera quasi ovunque e $N \in \mathcal{M}$ è tale che $\mu(N) = 0$ e $P(x)$ è vera in $X \setminus N$, allora $X \setminus N \subseteq \mathcal{P}$, per cui $X \setminus \mathcal{P} \subseteq N$ ha misura nulla. In questo modo si vede, tra l'altro, che se la misura μ è completa, le due formulazioni sono del tutto equivalenti.

D'altra parte, nel caso in cui la misura μ non è completa, la nostra formulazione è più generale e le proposizioni che seguono ne mostrano l'utilità.

Proposizione 5.27. *Le seguenti affermazioni sono vere se e solo se la misura μ è completa:*

- (i) *Se $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ è misurabile e $f = g$ q.o., allora g è misurabile*
- (ii) *Se $f_n: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ è una successione di funzioni misurabili e $f_n(x) \rightarrow f(x)$ q.o., allora f è misurabile.*

Dimostrazione. (i) Supponiamo che μ sia completa e sia $N \in \mathcal{M}$, $\mu(N) = 0$, tale che

$$f(x) = g(x) \quad \text{se } x \in X \setminus N.$$

Se $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ è misurabile, allora:

$$\begin{aligned} g^{-1}(E) &= [g^{-1}(E) \cap (X \setminus N)] \cup [g^{-1}(E) \cap N] \\ &= [f^{-1}(E) \cap (X \setminus N)] \cup [g^{-1}(E) \cap N]. \end{aligned}$$

Poichè f è misurabile e μ è completa, entrambi questi insiemi sono misurabili. Quindi g è misurabile e la (i) è vera.

Viceversa, supponiamo che μ non sia completa, vale a dire, esistono $N_0 \subseteq N$, $N \in \mathcal{M}$ e $\mu(N) = 0$ ma $N_0 \notin \mathcal{M}$. Poniamo $f \equiv 1$ e

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in N_0, \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Se $x \in X \setminus N \subseteq X \setminus N_0$, allora $f(x) = g(x)$. D'altra parte $g^{-1}(\{0\}) = N_0$ non è misurabile e la (i) è falsa.

- (ii) Supponiamo che μ sia completa e sia $N \in \mathcal{M}$, $\mu(N) = 0$, tale che:

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \text{se } x \in X \setminus N.$$

Definiamo una successione $g_n: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tramite:

$$g_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{se } x \in X \setminus N \\ f(x) & \text{se } x \in N. \end{cases}$$

Poichè $g_n(x) = f_n(x)$ q.o., per il punto (i) g_n è misurabile. Poichè $g_n(x) \rightarrow f(x)$ ovunque, f è misurabile per il Corollario 5.19.

Viceversa, supponiamo che μ non sia completa e sia $N_0 \subseteq N$, $N \in \mathcal{M}$ e $\mu(N) = 0$ ma $N_0 \notin \mathcal{M}$. Poniamo $g_n \equiv 1$ e

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \in X \setminus N_0, \\ 0 & x \in N_0. \end{cases}$$

Chiaramente $g_n \rightarrow g$ quasi ovunque, le g_n sono misurabili ma g non è misurabile, dato che $g^{-1}(\{0\}) = N_0 \notin \mathcal{M}$. \square

Proposizione 5.28. *Sia $f: X \rightarrow Y$ misurabile e $N \subseteq X$ un insieme misurabile. Sia $g(x) = f(x)$ per $x \in X \setminus N$ e $g(N) = \{q\}$ dove il singoletto $\{q\}$ è misurabile. Allora g è misurabile.*

Osservazione 5.29. In altri termini, possiamo sempre ridefinire f su un insieme misurabile arbitrario (in particolare un insieme N di misura nulla), a prescindere dalle questioni di completezza. Notiamo che qui facciamo diverse assunzioni. La g si assume uguale alla f su un insieme di misura piena misurabile e $g(N)$ si assume uguale a un punto e misurabile. Si confronti con l'assunzione più debole della proposizione precedente in cui $g = f$ q.o. rispetto a una misura completa.

Dimostrazione. Sia dato $E \subseteq Y$ misurabile. Se $q \notin E$ allora:

$$g^{-1}(E) = g^{-1}(E) \setminus N = f^{-1}(E) \setminus N$$

è misurabile. Se $q \in E$, allora $E \setminus \{q\}$ è misurabile, quindi $g^{-1}(E \setminus \{q\})$ è misurabile e:

$$\begin{aligned} g^{-1}(E) &= g^{-1}(E \setminus \{q\}) \cup g^{-1}(\{q\}) \\ &= g^{-1}(E \setminus \{q\}) \cup N \cup [g^{-1}(\{q\}) \setminus N] \\ &= g^{-1}(E \setminus \{q\}) \cup N \cup [f^{-1}(\{q\}) \setminus N] \end{aligned}$$

è misurabile. \square

Osservazione 5.30. Notiamo che se $g(N)$ non è un punto, allora la g non è necessariamente misurabile. Supponiamo infatti $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{M} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$. Se $f \equiv 1$ e

$$g(1) = 0, \quad g(2) = \frac{1}{2}, \quad g(3) = g(4) = 1,$$

allora g non è misurabile, in quanto $g^{-1}(0) = \{1\} \notin \mathcal{M}$. Se in particolare definiamo la misura:

$$\begin{aligned} \mu(\emptyset) &= \mu(\{1, 2\}) = 0, \\ \mu(\{3, 4\}) &= \mu(\{1, 2, 3, 4\}) = 1. \end{aligned}$$

vediamo che $f = g$ quasi ovunque, ma g non è misurabile.

Proposizione 5.31. *Sia (X, \mathcal{M}, μ) uno spazio di misura e $(X, \overline{\mathcal{M}}, \overline{\mu})$ il suo completamento. Se $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ è $\overline{\mathcal{M}}$ -misurabile allora esiste una $g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, \mathcal{M} -misurabile, tale che:*

$$f(x) = g(x) \quad q.o. [\mu]$$

Osservazione 5.32. Se $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $\mu = \lambda|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}$ e $\overline{\mu} = \lambda$ (si confronti con l'Osservazione 4.9), il teorema precedente afferma che ogni funzione Lebesgue misurabile è uguale quasi ovunque $[\lambda]$ ad una funzione boreliana. Ciò implica, in particolare, che se $[f] \in L^p(\mathbb{R}^n)$ esiste una $f \in [f]$ boreliana.

Dimostrazione. Sia $\mathbb{Q} = (q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un'enumerazione dei razionali e sia:

$$E_n = (q_n, \infty].$$

Se $a \in \mathbb{R}$, $a < q_{n_k}$ e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} q_{n_k} = a,$$

allora:

$$\cup_k E_{n_k} = (a, \infty].$$

Confrontando con l'Esercizio 5.10, si vede che $\{E_n\}$ è un sistema di generatori per la σ -algebra della retta estesa $\overline{\mathbb{R}}$.

Sia:

$$F_n = f^{-1}(E_n) \in \overline{\mathcal{M}}.$$

Allora:

$$F_n = B_n \cup N_n^0,$$

dove $B_n \in \mathcal{M}$ e $N_n^0 \subseteq N_n$ con $N_n \in \mathcal{M}$ e $\mu(N_n) = 0$. Definiamo $g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tramite:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in X \setminus (\cup_n N_n), \\ 0 & \text{se } x \in \cup_n N_n. \end{cases}$$

Chiaramente

$$g(x) = f(x) \quad \text{q.o. } [\mu].$$

Per far vedere che g è misurabile, è sufficiente testarlo sui generatori E_n . Se $q_n > 0$, allora

$$\begin{aligned} g^{-1}(E_n) &= [g^{-1}(E_n) \setminus (\cup_n N_n)] \cup [g^{-1}(E_n) \cap (\cup_n N_n)] \\ &= f^{-1}(E_n) \setminus (\cup_n N_n) \\ &= B_n \cup N_n^0 \setminus (\cup_n N_n) \\ &= B_n \setminus (\cup_n N_n), \end{aligned}$$

per cui $g^{-1}(E_n) \in \mathcal{M}$. Se invece $q_n \leq 0$, allora:

$$g^{-1}(E_n) = [B_n \setminus (\cup_n N_n)] \cup [\cup_n N_n] \in \mathcal{M}.$$

Quindi g è misurabile e il teorema è dimostrato. □

Proposizione 5.33. *Sia $f_n: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una successione di funzioni misurabili convergenti puntualmente quasi ovunque $[\mu]$. Allora esiste una f misurabile tale che $f_n(x) \rightarrow f(x)$ quasi ovunque $[\mu]$.*

Osservazione 5.34. Notiamo che qui non stiamo assumendo la completezza di μ . In altri termini, data una successione di funzioni misurabili e puntualmente convergenti quasi ovunque, possiamo sempre considerare il limite puntuale come una funzione misurabile, ponendo il limite uguale a zero per i punti in cui la successione non converge. Questa osservazione semplificherà la dimostrazione di molti risultati seguenti.

Dimostrazione. Possiamo scegliere, ad esempio:

$$f = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n.$$

□

Teorema 5.35. *Sia X uno spazio di misura topologico⁸ tale che per ogni aperto $U \neq \emptyset$ valga $\mu(U) > 0$. Se $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ è continua e $f(x) = 0$ quasi ovunque, allora $f \equiv 0$.*

Dimostrazione. Infatti, per ipotesi, l'insieme:

$$U = \{f(x) \neq 0\}$$

è un aperto di misura nulla, per cui $U = \emptyset$. □

⁸Quando parliamo di uno spazio di misura topologico X , supponiamo sempre che la σ -algebra su X contenga tutti gli insiemi boreliani.

5.2 Integrazione di funzioni positive

Sia (X, \mathcal{M}) uno spazio misurabile. Indichiamo con \mathcal{S}^+ l'insieme delle funzioni semplici positive. Ricordiamo che se s è una funzione semplice e $s(X) = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$, la decomposizione canonica di s è definita da:

$$s = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{E_i},$$

dove $E_i = s^{-1}(\{a_i\})$, $E_i \cap E_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e $\cup_i E_i = X$.

Definizione 5.36. Diremo in generale che $\{(b_1, F_1), (b_2, F_2), \dots, (b_M, F_M)\}$ è una decomposizione di s se:

- (i) $(b_i, F_i) \in \mathbb{R} \times \mathcal{M}$ per $i = 1, 2, \dots$
- (ii) $F_i \cap F_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e $\cup_i F_i = X$.
- (iii) $s = \sum_{i=1}^M b_i \chi_{F_i}$.

Lemma 5.37. Sia $s \in \mathcal{S}^+$ e siano $\{(a_i, E_i), i = 1, 2, \dots, N\}$ e $\{(b_j, F_j), j = 1, 2, \dots, M\}$ due decomposizioni di s . Allora:

$$\sum_{i=1}^N a_i \mu(E_i) = \sum_{j=1}^M b_j \mu(F_j).$$

Dimostrazione. Scriviamo:

$$E_i = \bigcup_{j=1}^M (E_i \cap F_j)$$

$$F_j = \bigcup_{i=1}^N (E_i \cap F_j)$$

Se $x \in E_i \cap F_j$, allora:

$$a_i = s(x) = b_j,$$

per cui si ha $a_i = b_j$ o $E_i \cap F_j = \emptyset$. In particolare:

$$a_i \mu(E_i \cap F_j) = b_j \mu(E_i \cap F_j).$$

Di conseguenza:

$$\sum_{i=1}^N a_i \mu(E_i) = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N a_i \mu(E_i \cap F_j) = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N b_j \mu(E_i \cap F_j) = \sum_{j=1}^M b_j \mu(F_j)$$

come volevasi dimostrare. □

D'ora in poi, se $s \in \mathcal{S}^+$, scriveremo direttamente $s = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{E_i}$ sottintendendo che $\{(a_i, E_i)\}$ è una decomposizione di s .

Definizione 5.38. Sia $s = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{E_i}$ una funzione semplice positiva. Definiamo l'integrale di s su X :

$$\int_X s \, d\mu \equiv \sum_{i=1}^N a_i \mu(E_i).$$

Proposizione 5.39. Siano $s, t \in \mathcal{S}^+$ e sia $c \geq 0$. Allora:

$$\int_X (s + t) \, d\mu = \int_X s \, d\mu + \int_X t \, d\mu$$

$$\int_X c \cdot s \, d\mu = c \int_X s \, d\mu$$

Dimostrazione. Se:

$$s = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{E_i}, \quad t = \sum_{i=1}^N b_i \chi_{F_i},$$

allora:

$$\begin{aligned} s + t &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (a_i + b_j) \chi_{E_i \cap F_j} \\ s &= \sum_{i=1}^N c \cdot a_i \chi_{E_i} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int_X (s + t) d\mu &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (a_i + b_j) \mu(E_i \cap F_j) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M a_i \mu(E_i \cap F_j) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M b_j \mu(E_i \cap F_j) \\ &= \sum_{i=1}^N a_i \mu(E_i) + \sum_{j=1}^M b_j \mu(F_j) \\ &= \int_X s d\mu + \int_X t d\mu \\ \int_X c \cdot s d\mu &= \sum_i c \cdot a_i \mu(E_i) \\ &= c \int_X s d\mu. \end{aligned}$$

□

Corollario 5.40. Se $s, t \in \mathcal{S}^+$ e $s \geq t$, allora

$$\int_X s d\mu \geq \int_X t d\mu.$$

Dimostrazione.

$$\int_X s d\mu = \int_X [t + (s - t)] d\mu = \int_X t d\mu + \int_X (s - t) d\mu \geq \int_X t d\mu.$$

□

Definizione 5.41. Se $E \subseteq X$ è misurabile e $s \in \mathcal{S}^+$, poniamo:

$$\int_E s d\mu \equiv \int_X \chi_E s d\mu.$$

Proposizione 5.42. Sia $s \in \mathcal{S}^+$ e sia $\nu: \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ definita da:

$$\nu(E) = \int_E s d\mu.$$

Allora ν è una misura.

Dimostrazione. Chiaramente $\nu(\emptyset) = 0$. Se $s = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{E_i}$, allora $\chi_E s = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{E_i \cap E}$, per cui:

$$\nu(E) = \sum_{i=1}^N a_i \mu(E_i \cap E).$$

Se $\{F_j\}_{j=1,2,\dots} \subseteq \mathcal{M}$, allora:

$$\begin{aligned} \nu(\cup_j F_j) &= \sum_{i=1}^N a_i \mu(E_i \cap (\cup_j F_j)) \\ &= \sum_{i=1}^N a_i \sum_j \mu(E_i \cap F_j) \\ &= \sum_j \sum_{i=1}^N a_i \mu(E_i \cap F_j) \\ &= \sum_j \nu(F_j), \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare. □

Definizione 5.43. Se $f: X \rightarrow [0, \infty]$ è una funzione misurabile, definiamo l'integrale di f su un insieme $E \subseteq X$ misurabile come:

$$\int_E f \, d\mu = \sup_{f \geq s \in \mathcal{S}^+} \int_E s \, d\mu.$$

Osservazione 5.44. Conseguenze immediate della definizione:

- (i) Se $f \in \mathcal{S}^+$, la nuova definizione di $\int_X f \, d\mu$ coincide con la precedente.
- (ii) Se $f \leq g$, $\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$.
- (iii) Se $c \geq 0$, $\int_X cf \, d\mu = c \int_X f \, d\mu$.
- (iv) Se E ha misura zero, allora $\int_E f \, d\mu = 0$ per ogni f .
- (v) $\int_E f \, d\mu = \int_X \chi_E f \, d\mu$. Per vederlo, notiamo che se $\chi_E f \geq s \in \mathcal{S}^+$, si ha $s(x) = 0$ per $x \in X \setminus E$, per cui:

$$\int_X s \, d\mu = \int_{X \setminus E} s \, d\mu + \int_E s \, d\mu = \int_E s \, d\mu \leq \int_E f \, d\mu.$$

Prendendo il sup su $\{\chi_E f \geq s \in \mathcal{S}^+\}$ si ottiene:

$$\int_X \chi_E f \, d\mu \leq \int_E f \, d\mu.$$

D'altra parte, se $f \geq s \in \mathcal{S}^+$, si ha $\chi_E f \geq \chi_E s$, per cui:

$$\int_E s \, d\mu = \int_X \chi_E s \, d\mu \leq \int_X \chi_E f \, d\mu$$

e, prendendo il sup su $\{f \geq s \in \mathcal{S}^+\}$ si ottiene:

$$\int_E f \, d\mu \leq \int_X \chi_E f \, d\mu.$$

Teorema 5.45 (Teorema della convergenza monotona.). *Siano $f_n: X \rightarrow [0, \infty]$ funzioni misurabili non negative tali che:*

$$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$$

Si ponga:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Allora:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Dimostrazione. Poichè:

$$0 \leq \int_X f_1 d\mu \leq \int_X f_2 d\mu \leq \dots \leq \int_X f d\mu,$$

esiste:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu.$$

Per mostrare la disuguaglianza opposta, sia $s \in \mathcal{S}^+$ tale che $s \leq f$. Fissato $\alpha \in (0, 1)$, consideriamo gli insiemi:

$$E_n = \{x | f_n(x) \geq \alpha s(x)\}.$$

Notiamo che $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$. Se $f(x) = 0$, allora $f_n(x) = s(x) = 0$, per cui $x \in E_n$. Se $f(x) > 0$, poichè $f_n(x) \rightarrow f(x)$ e $\alpha s(x) < f(x)$, si ha $f_n(x) > \alpha s(x)$ (definitivamente). Di conseguenza

$$\cup_n E_n = X,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} f_n(x) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} \alpha s d\mu = \alpha \int_X s d\mu,$$

dove l'ultimo passaggio segue dal fatto che:

$$E \mapsto \int_E s d\mu$$

è una misura e E_n una famiglia crescente di insiemi. Poichè $\alpha \in (0, 1)$ è arbitrario, segue:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \geq \int_X s d\mu$$

e, poichè $s \leq f$ era arbitraria:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \geq \int_X f d\mu,$$

il che conclude la dimostrazione. □

Proposizione 5.46. *Se $f, g: X \rightarrow [0, \infty]$ sono misurabili allora:*

$$\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$$

Dimostrazione. Siano $s_n, t_n \in \mathcal{S}^+$ funzioni semplici monotonamente convergenti a f e g rispettivamente (Teorema 5.24). Per il teorema della convergenza monotona:

$$\begin{aligned} \int_X (f + g) d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X (s_n + t_n) d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X s_n d\mu + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X t_n d\mu \\ &= \int_X f d\mu + \int_X g d\mu \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare. □

Proposizione 5.47. Sia $f: X \rightarrow [0, \infty]$ una funzione misurabile positiva. Per ogni $E \subseteq X$ misurabile, poniamo:

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu.$$

Allora ν è una misura.

Dimostrazione. Chiaramente $\nu(\emptyset) = 0$. Sia $\{E_i, i = 1, 2, \dots\} \subseteq \mathcal{M}$ e sia $E = \cup_i E_i$. Allora si ha la convergenza puntuale e monotona:

$$\chi_E f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n \chi_{E_i} f \right)(x).$$

Per il teorema della convergenza monotona e per la linearità dell'integrale si ha quindi:

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu = \int_X \chi_E f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \int \chi_{E_i} f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \nu(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(E_i)$$

come volevasi dimostrare. □

Proposizione 5.48. Sia $f: X \rightarrow [0, \infty]$ una funzione misurabile positiva e sia $E \subseteq X$ misurabile. Allora:

$$\int_E f \, d\mu = 0$$

se e solo se:

$$\mu(\{x \in E | f(x) > 0\}) = 0,$$

ovvero $f(x) = 0$ q.o. in E .

Dimostrazione. Sia:

$$F_n = \left\{ x \in E | f(x) > \frac{1}{n} \right\}.$$

Allora,

$$\{x \in E | f(x) > 0\} = \cup_n F_n,$$

e $F_n \subseteq F_{n+1}$ per ogni n . Supponiamo ora che $\int_E f \, d\mu = 0$. Allora, poichè $E \mapsto \int_E f \, d\mu$ è una misura:

$$\int_E f \, d\mu \geq \int_{F_n} f \, d\mu \geq \frac{1}{n} \mu(E_n),$$

da cui $\mu(F_n) = 0$, da cui $\mu(\{x \in E | f(x) > 0\}) = 0$.

Viceversa, se $\mu(\{x \in E | f(x) > 0\}) = 0$, allora ogni F_n ha misura zero:

$$\int_E f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{F_n} f \, d\mu = 0.$$

□

Esercizio 5.49. Trovare una successione $f_n: X \rightarrow [0, \infty]$ di funzioni misurabili, convergenti a una $f: X \rightarrow [0, \infty]$ misurabile tale che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu \neq \int f \, d\mu.$$

Soluzione 5.50. Sia $X = \mathbb{R}$ (con la misura di Lebesgue).

$$n\chi_{(0, \frac{1}{n})} \rightarrow 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} n\chi_{(0, \frac{1}{n})} \, d\lambda = 1 \neq 0 = \int_{\mathbb{R}} 0 \, d\lambda.$$

Teorema 5.51 (Lemma di Fatou.). *Siano $f_n: X \rightarrow [0, \infty]$ misurabili. Allora:*

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Osservazione 5.52. Ricordiamo che il \liminf è definito come un limite puntuale. Se in particolare $f_n(x) \rightarrow f(x)$ puntualmente, allora:

$$\int_X f \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu$$

(cfr. l'esercizio precedente).

Dimostrazione. Ricordiamo la definizione:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} a_k.$$

Per il teorema della convergenza monotona:

$$\begin{aligned} \int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu &= \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} f_n \, d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \inf_{k \geq n} f_n \, d\mu \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} \int_X f_n \, d\mu \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu. \end{aligned}$$

La disuguaglianza segue da:

$$\int_X \inf_{k \geq n} f_n \, d\mu \leq \int_X f_m \, d\mu \quad \forall m \geq n.$$

□

5.3 Integrazione di funzioni complesse

Definizione 5.53. Sia $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione misurabile. Diciamo che f è integrabile se:

$$\int_X |f| \, d\mu < \infty.$$

Definizione 5.54. Sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale integrabile. Definiamo l'integrale di f su X come:

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu. \quad (5.1)$$

Definizione 5.55. Sia $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione integrabile. Definiamo l'integrale di f su X come:

$$\int_X f \, d\mu = \int_X \operatorname{Re} f \, d\mu + i \int_X \operatorname{Im} f \, d\mu. \quad (5.2)$$

Osservazione 5.56. In generale, se f e se almeno uno degli integrali di $(\operatorname{Re} f)^\pm$, e almeno uno degli integrali di $(\operatorname{Im} f)^\pm$, sono finiti, si può definire l'integrale di f tramite la (5.2). In tal caso diciamo che f è integrabile in senso improprio. Allo stesso modo si può definire la nozione di funzione integrabile (o integrabile in senso improprio) a valori nella retta estesa \mathbb{R} .

Proposizione 5.57. *L'insieme delle funzioni complesse integrabili forma uno spazio vettoriale complesso, e l'integrale è un funzionale lineare su questo spazio.*

Dimostrazione. Se f e g sono integrabili, allora, poichè⁹ $|f + g| \leq |f| + |g|$:

$$\int_X |f + g| \, d\mu \leq \int_X |f| \, d\mu + \int_X |g| \, d\mu < \infty,$$

per cui $f + g$ è integrabile. Similmente, se $\alpha \in \mathbb{R}$, allora da $|\alpha f| = |\alpha| |f|$ segue che αf è integrabile. Dobbiamo quindi mostrare che l'integrale è un funzionale lineare, cioè additivo e omogeneo.

Per la linearità siano f, g funzioni integrabili e sia $h = f + g$. Supponiamo innanzitutto f e g reali. Allora da:

$$h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-.$$

segue

$$h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+.$$

Usando l'additività, già dimostrata, dell'integrale di funzioni positive, si ha quindi:

$$\int_X h^+ \, d\mu + \int_X f^- \, d\mu + \int_X g^- \, d\mu = \int_X h^- \, d\mu + \int_X f^+ \, d\mu + \int_X g^+ \, d\mu,$$

da cui, poichè tutti i membri dell'equazione sono finiti:

$$\int_X h^+ \, d\mu - \int_X h^- \, d\mu = \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu + \int_X g^+ \, d\mu - \int_X g^- \, d\mu,$$

da cui segue l'additività per funzioni reali. Il caso generale per f e g complesse segue ora facilmente dalla definizione.

Per l'omogeneità, sia f integrabile. Se $\alpha \geq 0$ e f è reale, allora:

$$(\alpha f)^\pm = \alpha \cdot f^\pm.$$

Dall'omogeneità già dimostrata per $f, \alpha \geq 0$, si vede allora che:

$$\int_X \alpha f \, d\mu = \int_X (\alpha f)^+ \, d\mu - \int_X (\alpha f)^- \, d\mu = \alpha \left\{ \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu \right\} = \alpha \int_X f \, d\mu.$$

Inoltre, da $(-f)^\pm = f^\mp$, segue

$$\int_X (-f) \, d\mu = - \int_X f \, d\mu.$$

Questo, insieme al caso $\alpha \geq 0$, mostra che la tesi vale per α e f entrambi reali.

Supponiamo ora che $f = u + iv$ e $\alpha = a + ib$ siano complessi. Allora:

$$\alpha f = au - bv + i(bu + av),$$

per cui:

$$\begin{aligned} \int_X \alpha f \, d\mu &= \int_X (au - bv) \, d\mu + i \int_X (bu + av) \, d\mu \\ &= a \int_X u \, d\mu - b \int_X v \, d\mu + ib \int_X u \, d\mu + ia \int_X v \, d\mu \\ &= (a + ib) \left(\int_X u \, d\mu + i \int_X v \, d\mu \right) \\ &= \alpha \int_X f \, d\mu, \end{aligned}$$

il che conclude la dimostrazione. □

⁹Si veda l'osservazione precedente sulla definizione di $f + g$. Chiaramente, la ridefinizione di una funzione su un insieme di misura nulla non altera il suo integrale.

Proposizione 5.58. *Sia $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ integrabile. Allora:*

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| \leq \int_X |f| \, d\mu.$$

Dimostrazione. Se f è reale, allora chiaramente:

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu \leq \int_X f^+ \, d\mu + \int_X f^- \, d\mu = \int_X |f| \, d\mu.$$

Per una f complessa generica, scriviamo:

$$\int_X f \, d\mu = \eta \left| \int_X f \, d\mu \right|,$$

dove $|\eta| = 1$. Abbiamo allora:

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| = \int_X (\eta^* f) \, d\mu = \operatorname{Re} \int_X (\eta^* f) \, d\mu = \int_X \operatorname{Re}(\eta^* f) \, d\mu = \left| \int_X \operatorname{Re}(\eta^* f) \, d\mu \right|,$$

dove la prima uguaglianza mostra che l'integrale di $\eta^* f$ è reale e positivo. Di conseguenza:

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| \leq \int_X |\operatorname{Re}(\eta^* f)| \, d\mu \leq \int_X |(\eta^* f)| \, d\mu = \int_X |f| \, d\mu,$$

come volevasi dimostrare. □

5.4 Integrazione e insiemi di misura nulla

Proposizione 5.59. *Sia (X, \mathcal{M}, μ) uno spazio di misura e $(X, \overline{\mathcal{M}}, \overline{\mu})$ il suo completamento. Siano $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione $\overline{\mathcal{M}}$ -misurabile, $g: X \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione \mathcal{M} -misurabile tali che*

$$f(x) = g(x) \quad \text{q.o. } [\overline{\mu}].$$

Se g è μ -integrabile, allora f è $\overline{\mu}$ -integrabile e:

$$\int_X f \, d\overline{\mu} = \int_X g \, d\mu.$$

Osservazione 5.60. Il teorema si applica in particolare con $f = g$ (che è chiaramente $\overline{\mathcal{M}}$ -misurabile).

Dimostrazione. Supponiamo prima che $f = g$, e che g sia reale e non negativa. Sia $s: X \rightarrow [0, \infty)$ è una funzione $\overline{\mathcal{M}}$ -semplice tale che $s \leq g$, con rappresentazione canonica:

$$s = \sum_i a_i \chi_{E_i}.$$

Qui ogni $E_i \in \overline{\mathcal{M}}$ è della forma:

$$E_i = F_i \cup B_i,$$

dove $F_i \in \mathcal{M}$ e $\overline{\mu}(B_i) = 0$ e:

$$\int_X s \, d\overline{\mu} = \sum_i a_i \overline{\mu}(F_i \cup B_i) = \sum_i a_i \mu(F_i).$$

Definiamo t tramite:

$$t = \sum_i a_i \chi_{F_i} + 0 \chi_{X \setminus \cup_i F_i}.$$

Allora t è \mathcal{M} -semplice, $t \leq g$ e:

$$\int_X s \, d\bar{\mu} = \int_X t \, d\mu.$$

Di conseguenza:

$$\int_X s \, d\bar{\mu} \leq \sup_{t \leq g \text{ } \mathcal{M}\text{-semplice}} \int_X t \, d\mu = \int_X g \, d\mu$$

e quindi:

$$\int_X g \, d\bar{\mu} \leq \int_X f \, d\mu.$$

Ciò mostra che g è $\bar{\mu}$ -integrabile e, poichè la disuguaglianza opposta alla precedente è ovvia, che:

$$\int_X g \, d\bar{\mu} = \int_X g \, d\mu,$$

per una g positiva.

Quanto visto sopra, applicato a $|g|$, $(\operatorname{Re}g)^\pm$, $(\operatorname{Im}g)^\pm$, mostra che la tesi vale per una g complessa generale.

Se infine $f = g$ quasi ovunque $[\mu]$ e $N = \{f(x) \neq g(x)\}$, allora:

$$\int_X f \, d\bar{\mu} = \int_{X \setminus N} f \, d\bar{\mu} = \int_{X \setminus N} g \, d\bar{\mu} = \int_X g \, d\bar{\mu} = \int_X g \, d\mu,$$

il che conclude la dimostrazione. □

Proposizione 5.61. *Siano $f, g: X \rightarrow \mathbb{C}$ integrabili. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- (i) $f = g$ q.o. $[\mu]$
- (ii) $\int_X |f - g| \, d\mu = 0$
- (iii) $\int_E f \, d\mu = \int_E g \, d\mu$ per ogni $E \subseteq X$ misurabile.

Dimostrazione. (i) \implies (ii) Se $f = g$, allora $|f - g| = 0$ q.o., che implica a $\int_X |f - g| \, d\mu = 0$.

(ii) \implies (iii). Per ogni E misurabile si ha:

$$\left| \int_E f \, d\mu - \int_E g \, d\mu \right| = \left| \int_E (f - g) \, d\mu \right| \leq \int_E |f - g| \, d\mu \leq \int_X |f - g| \, d\mu = 0.$$

(iii) \implies (i). Supponiamo f e g reali e consideriamo gli insiemi misurabili:

$$E_n = \left\{ x \mid f(x) - g(x) > \frac{1}{n} \right\}.$$

Allora:

$$0 = \int_{E_n} (f - g) \, d\mu \geq \frac{1}{n} \mu(E_n).$$

Di conseguenza $\mu(E_n) = 0$ e:

$$\mu(\{x \mid f(x) > g(x)\}) = \mu(\cup_n E_n) = 0.$$

Similmente:

$$\mu(\{x \mid f(x) < g(x)\}) = 0,$$

per cui $f = g$ quasi ovunque.

Per il caso generale, si noti che, per come si è definito l'integrale di una funzione complessa, la (iii) vale separatamente per le parti reali e immaginarie di f e g . La (i) segue allora dal fatto che $f = g$ quasi ovunque equivale a $\operatorname{Re}f = \operatorname{Re}g$ e $\operatorname{Im}f = \operatorname{Im}g$ quasi ovunque. □

Osservazione 5.62. Notiamo che l'integrale:

$$\int_X |f| \, d\mu,$$

dove f è integrabile, soddisfa tutte le proprietà di una norma eccetto la positività¹⁰, in quanto $\int_X |f| \, d\mu = 0$ se e solo se $f = 0$ quasi ovunque. Ciò suggerisce di considerare, nello spazio delle funzioni integrabili, la relazione di equivalenza:

$$f \sim g \quad \text{se } f = g \text{ q.o.}$$

Definizione 5.63. Indichiamo con $L^1(\mu)$ l'insieme delle classi di equivalenza di \sim . Si vede facilmente che questo è uno spazio vettoriale normato, con la somma e la moltiplicazione per scalari definite tramite rappresentanti arbitrari delle classi e la norma:

$$\|f\|_1 \equiv \int_X |f| \, d\mu,$$

di nuovo indipendentemente dal rappresentante.

Osservazione 5.64. Nel seguito parleremo spesso di “funzioni $f \in L^1(\mu)$ ”, intendendo con ciò la classe di equivalenza rappresentata da f .

Molti dei teoremi che abbiamo dimostrato contengono delle ipotesi che si suppone valgano per ogni $x \in X$. Nella gran parte dei casi, l'affermazione “per ogni $x \in X$ ” si può sostituire con “quasi ovunque”. L'osservazione alla base è che la ridefinizione di una funzione su un insieme di misura nulla non ne altera l'integrale (Proposizione 5.61).

Proposizione 5.65. *Siano $f_n, f: X \rightarrow [0, \infty]$ funzioni misurabili tali che:*

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq f(x), \quad \text{q.o. } [\mu]$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{q.o. } [\mu]$$

Allora:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Dimostrazione. Poniamo:

$$\begin{aligned} E_n &= \{f_n(x) > f_{n+1}(x)\}, \\ F &= \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \neq f(x) \right\} \\ N &= \left(\bigcup_n E_n \right) \cup F. \end{aligned}$$

Allora N è misurabile e ha misura nulla. Poniamo:

$$g_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & x \in X \setminus N \\ 0 & x \in N \end{cases}$$

Allora ogni g_n è misurabile (cfr. Proposizione 5.28), la successione (g_n) è crescente e:

$$g_n(x) \rightarrow g(x),$$

dove $g(x)$ è misurabile e:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in X \setminus N \\ 0 & \text{se } x \in N \end{cases}$$

Per il teorema della convergenza dominata:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n \, d\mu = \int_X g \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

□

¹⁰Una norma su uno spazio lineare è un funzionale omogeneo, subadditivo e strettamente positivo.

Proposizione 5.66. Siano $f_n, f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ misurabili e tali che:

$$\begin{aligned} f_n(x) &\rightarrow f(x) & q.o. \\ f_n(x) &\geq 0 & q.o. \end{aligned}$$

Allora:

$$\int f \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu$$

Osservazione 5.67. Notiamo che l'insieme dei punti x tali che $f_n(x) \rightarrow f(x)$ è misurabile, in quanto questo è uguale a:

$$\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \right\} \equiv \left\{ \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \right\} \cap \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \right\}$$

Dimostrazione. L'insieme

$$F \equiv \left\{ x \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \right\} \cup \{x \mid f_n(x) \geq 0\}$$

è misurabile e di misura piena. Definiamo:

$$g_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & x \in F \\ 0 & x \notin F \end{cases}$$

Allora ogni g_n è misurabile, positiva e:

$$g_n(x) \rightarrow g(x)$$

dove g è misurabile e:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in F \\ 0 & x \notin F \end{cases}$$

Per il lemma di Fatou:

$$\int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n \, d\mu = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

□

5.5 Teoremi sulle funzioni integrabili

Teorema 5.68 (Teorema della convergenza dominata). Siano $f_n, f: X \rightarrow \mathbb{C}$ funzioni complesse misurabili, tali che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad q.o. [\mu].$$

Supponiamo che esista una $g: X \rightarrow [0, \infty]$ misurabile tale che $|f_n(x)| \leq g(x)$ per quasi ogni $x \in X$ e:

$$\int_X g \, d\mu < \infty.$$

Allora $f_n, f \in L^1(\mu)$ e:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Osservazione 5.69. Come si vede dalla dimostrazione, il teorema è valido anche se f_n e f sono a valori nella retta estesa.

Dimostrazione. Siano:

$$\begin{aligned} E_0 &= \left\{ x \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \right\}, \\ E_n &= \{x \mid |f_n(x)| \leq g(x)\}. \end{aligned}$$

Questi insiemi sono misurabili e di misura piena. Posto $E = \cup_{n=0}^{\infty} E_n$, E ha misura piena e

$$|f_n(x)|, |f(x)| \leq |g(x)| \quad x \in E.$$

Ne segue che $f_n, f \in L^1(\mu)$.

Supponiamo ora f_n e f reali.¹¹ Per ogni $x \in E$ si ha:

$$\begin{aligned} g(x) + f_n(x) &\geq 0, \\ g(x) - f_n(x) &\geq 0. \end{aligned}$$

Poichè E ha misura piena, possiamo ora applicare la Proposizione 5.66:

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu + \int_X g \, d\mu &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X (f_n + g) \, d\mu \geq \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu, \\ \int_X g \, d\mu - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X (g - f_n) \, d\mu \geq \int_X g \, d\mu - \int_X f \, d\mu. \end{aligned}$$

Notando che $\int_X g \, d\mu < \infty$, da queste si ottiene:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu,$$

da cui segue la tesi. □

Teorema 5.70. *Sia $f_n: X \rightarrow \mathbb{C}$ una successione di funzioni integrabili tali che:*

$$\sum_n \int_X |f_n| \, d\mu < \infty.$$

Allora esiste una funzione $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ integrabile, tale che:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad q.o. \\ \int_X f \, d\mu &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Poniamo:

$$g_N(x) = \sum_{n=1}^N |f_n(x)|.$$

La successione g_N è positiva, monotona crescente e converge puntualmente a una funzione g misurabile. Per il teorema della convergenza monotona:

$$\int_X g \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| \, d\mu.$$

Ne segue in particolare che $g(x) < \infty$ quasi ovunque, per cui la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

converge assolutamente per quasi ogni $x \in X$.

¹¹Nel caso in cui f_n e f sono a valori nella retta estesa, possiamo ridefinire $f_n(x) = 0$ o $f(x) = 0$ nei punti in cui assumerebbero i valori $\pm\infty$, le nuove f_n e f sono ancora misurabili.

Definiamo:

$$h_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{se } g(x) < \infty, \\ 0 & \text{se } g(x) = \infty, \end{cases}$$

$$\phi_N(x) = \sum_{n=1}^N h_n(x)$$

e poniamo:

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \phi_N(x).$$

La f è misurabile (poichè le ϕ_N lo sono) e:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \text{q.o.}$$

Abbiamo inoltre:

$$|\phi_N(x)| \leq \sum_{n=1}^N |h_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |h_n(x)| \leq g,$$

per ogni x , da cui segue ha in particolare $|f| \leq g$, per cui f è integrabile. Applicando il teorema della convergenza dominata a $\phi_N \rightarrow f$, vediamo quindi che:

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_X \phi_N \, d\mu = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \int_X h_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu,$$

come volevasi dimostrare. □

5.6 Integrali dipendenti da parametri

Teorema 5.71. *Sia $f: X \times (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $f_t: X \rightarrow \mathbb{C}$ definita da:*

$$f_t(x) = f(x, t)$$

sia una funzione integrabile per ogni $t \in (a, b)$. Poniamo:

$$F(t) = \int_X f_t \, d\mu.$$

Supponiamo che esista una $g: X \rightarrow [0, \infty]$ integrabile tale che, per ogni $t \in (a, b)$:

$$|f_t(x)| \leq g(x) \quad \text{q.o.}$$

Dato $t_0 \in t$, supponiamo che valga:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f_t(x) = f_{t_0}(x)$$

per quasi ogni $x \in X$. Allora:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = F(t_0).$$

Osservazione 5.72. In altri termini, se $g_x(t) \equiv f(x, t)$ è continua in t_0 per quasi ogni $x \in X$ e vale l'ipotesi di maggiorazione per qualche g integrabile, allora $F(t)$ è continua in t_0 .

Dimostrazione. Data una successione $(t_n) \subset (a, b)$, tale che $t_n \rightarrow t_0$, posto $f_n \equiv f_{t_n}$ si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f_{t_0}(x) \quad \text{q.o.}$$

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \text{q.o.}$$

Valgono quindi le ipotesi del teorema della convergenza dominata, per cui:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f_{t_0} \, d\mu = F(t_0).$$

Poichè questo è vero per ogni successione t_n , si ha la tesi. □

Teorema 5.73. *Siano f_t e F definite come nel teorema precedente. Supponiamo che per ogni $t_0 \in (a, b)$ e per ogni $x \in X$, esista:*

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=t_0} f(x, t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f_t(x) - f_{t_0}(x)}{t - t_0}.$$

Supponiamo che esista una $g: X \rightarrow [0, \infty]$ integrabile tale che, per ogni $t_0 \in (a, b)$:

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=t_0} f(x, t) \right| \leq g(x)$$

per ogni $x \in X$. Allora F è derivabile in (a, b) e:

$$F'(t_0) = \int_X \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=t_0} f(x, t) \, d\mu.$$

Osservazione 5.74. In altri termini, nelle ipotesi di (ii) si ha:

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} F(t) = \int_X \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=t_0} f(x, t) \, d\mu,$$

dove la $\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=t_0} f(x, t)$ definisce quasi ovunque una funzione integrabile.

Dimostrazione. Notiamo innanzitutto che $h \equiv \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=t_0} f(\cdot, t)$ è una funzione misurabile per ogni $t_0 \in (a, b)$, in quanto limite puntuale di funzioni misurabili.

Fissiamo $t_0 \in (a, b)$ e poniamo e sia t_n una successione convergente a t_0 tale che $t_n \neq t_0$ per ogni n . Definiamo:

$$h_n(x) = \frac{f_{t_n}(x) - f_{t_0}(x)}{t_n - t_0}.$$

Allora ogni h_n è misurabile e $h_n(x)$ converge a $h(x) = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=t_0} f(x, t)$ per ogni $x \in X$. Inoltre, per il teorema di Lagrange:

$$h_n(x) = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=t(x;n)} f(t, x)$$

per qualche $t(x; n)$ fra t_n e t_0 . Di conseguenza:

$$|h_n(x)| \leq g(x)$$

per ogni $x \in X$.

Pertanto, per il teorema della convergenza dominata:

$$\frac{F(t_n) - F(t_0)}{t_n - t_0} = \int_X h_n \, d\mu \rightarrow \int_X h \, d\mu,$$

come volevasi dimostrare. □

5.7 Confronto fra nozioni di convergenza

Esercizio 5.75. Sia $\mu: X \rightarrow [0, \infty]$ una misura finita e $f_n, f: X \rightarrow \mathbb{C}$ funzioni integrabili, tali che $f_n \rightarrow f$ uniformemente in X . Dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_1 = 0.$$

Trovare un controesempio nel caso in cui la misura non sia finita.

Esempio 5.76. Portiamo un esempio di una successione di funzioni $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ integrabili, convergente in norma L^1 a una $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile, ma tale che

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \neq \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

per ogni $x \in X$. Sia $X = [0, 1]$, f_n la successione definita da:

$$\begin{aligned} f_1 &= \chi_{[0, \frac{1}{2}]}, & f_2 &= \chi_{[\frac{1}{2}, 1]} \\ f_3 &= \chi_{[0, \frac{1}{4}]}, & f_4 &= \chi_{[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]}, & f_5 &= \chi_{[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]}, & f_6 &= \chi_{[\frac{3}{4}, 1]} \end{aligned}$$

e così via. Chiaramente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\| = 0,$$

ma

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1 \neq 0 = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x),$$

ovvero la f_n converge a zero in norma L^1 , ma non converge a $f \equiv 0$ puntualmente in nessun punto.

Teorema 5.77. Sia $f_n, f: X \rightarrow \mathbb{C}$ funzioni integrabili tali che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0.$$

Allora esiste una sottosuccessione f_{n_k} tale che:

$$f_{n_k}(x) \rightarrow f(x) \quad \text{q.o. } [\mu].$$

Inoltre, esiste una $g: X \rightarrow [0, \infty]$ integrabile tale che $|f_{n_k}| \leq g$.

Dimostrazione. Per ogni $k = 1, 2, \dots$, scegliamo n_k tale che $n_{k+1} \geq n_k$ e:

$$\int_X |f_{n_k} - f| d\mu < 2^{-k}.$$

Posto $h = \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_k} - f|$, dal teorema della convergenza monotona segue che:

$$\int_X h d\mu \leq 1.$$

Poichè h è integrabile, si ha $h(x) < \infty$ quasi ovunque. Ne segue che:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = f(x) \quad \text{q.o. } [\mu].$$

Inoltre:

$$|f_{n_k}| \leq |f_{n_k} - f| + |f| \leq h + |f| \equiv g \in L^1(\mu).$$

Il teorema è dimostrato. □

5.8 Problemi

Problema 5.78 (RUD 1.7). Supponiamo che $f_n: X \rightarrow [0, \infty]$ sia misurabile per $n = 1, 2, 3, \dots$, $f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq 0$, $f_n(x) \rightarrow f(x)$ per ogni $x \in X$ e $f_1 \in L^1(\mu)$. Dimostrare che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu \quad (5.3)$$

e che la conclusione non segue se la richiesta “ $f_1 \in L^1(\mu)$ ” è omessa.

Soluzione. Se $f_1(x) < \infty$ per ogni $x \in X$, possiamo applicare il teorema della convergenza dominata alla successione $\{f_n\}$ e otteniamo la (5.3). Per il caso generale, sia $E = \{x: f_1(x) = \infty\}$ e definiamo $h_n, h: X \rightarrow [0, \infty)$ tramite

$$h_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in E \\ f_n(x) & x \notin E \end{cases},$$

$$h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x).$$

Allora:

$$h_n(x) = f_n(x) \quad \text{q.o.},$$

$$h(x) = f(x) \quad \text{q.o.},$$

le h_n sono misurabili (assumendo, senza perdita di generalità, che μ sia completa) e $h_1(x) < \infty$ per ogni $x \in X$. Perciò:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X h_n \, d\mu = \int_X h \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$

il che dimostra la (5.3) nel caso generale.

Consideriamo la successione di funzioni $f_n: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ definite da:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & 0 < x < \frac{1}{n} \\ 0 & x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

Le f_n sono continue quasi ovunque (rispetto alla misura di Lebesgue), per cui misurabili, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \rightarrow 0$ e $f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq 0$. Tuttavia:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mu = \infty \neq 0 = \int_{\mathbb{R}} 0 \, d\mu.$$

Problema 5.79 (RUD 1.10). Supponiamo che $\mu(X) < \infty$, che $\{f_n: X \rightarrow \mathbb{C}\}$ sia una successione di funzioni complesse misurabili e limitate, tale che $f_n \rightarrow f$ uniformemente in X . Dimostrare che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu \quad (5.4)$$

e che l'ipotesi “ $\mu(X) < \infty$ ” non può essere omessa.

Soluzione. Poichè le f_n sono limitate e $\mu(X) < \infty$, $f_n \in L^1(\mu)$ per ogni n . Inoltre f è il limite uniforme di una successione di funzioni misurabili e limitate, per cui f è misurabile e limitata e $f \in L^1(\mu)$. Pertanto gli integrali nella (5.4) sono definiti e:

$$\left| \int_X f_n \, d\mu - \int_X f \, d\mu \right| = \left| \int_X (f_n - f) \, d\mu \right| \leq \int_X |f_n - f| \, d\mu$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero positivo N tale che

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{\mu(X)} \quad (x \in X)$$

se $n > N$. Di conseguenza:

$$\left| \int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu \right| < \varepsilon$$

per $n > N$ e, poichè ε è arbitrario, segue la (5.4).

Come controesempio nel caso in cui $\mu(X) = \infty$, consideriamo $X = \mathbb{R}$ e $f_n(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{n}$.

Parte II

Sviluppi del formalismo

6 Spazi prodotto

6.1 Prodotti di σ -algebre

Sia $\{(X_i, \mathcal{M}_i), i \in I\}$ una collezione di spazi misurabili e sia:

$$X = \prod_{i \in I} X_i$$

il prodotto diretto degli insiemi X_i . Ogni elemento $x \in X$ si può vedere come una funzione $x: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$ tale che $x_i \in X_i$ per ogni $i \in I$. Indichiamo con $\pi_i: X \rightarrow X_i$ la proiezione di X sulla i -esima componente X_i , $\pi_i(x) = x_i$.

Definizione 6.1. La σ -algebra prodotto $\bigotimes_{i \in I} \mathcal{M}_i$ è per definizione la σ -algebra generata dalla famiglia dei “cilindri”:

$$\mathcal{C} = \{\pi_i^{-1}(E_i) \mid E_i \in \mathcal{M}_i, i \in I\}. \quad (6.1)$$

Da qui in poi, assumeremo sempre che l'insieme degli indici I sia al più numerabile. Consideriamo cioè soltanto i casi $I = \mathbb{N}$, oppure $I = \{1, 2, \dots, n\}$.

Proposizione 6.2. La σ -algebra prodotto è generata dalla famiglia dei “rettangoli”:

$$\mathcal{R} = \left\{ \prod_{i \in I} E_i \mid E_i \in \mathcal{M}_i \forall i \in I \right\}. \quad (6.2)$$

Dimostrazione. Indichiamo con $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ la σ -algebra generata dalla famiglia (6.2).

Poichè $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{R}$, si ha chiaramente $\bigotimes_{i \in I} \mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{R})$. D'altra parte, se $E = \prod_{i \in I} E_i \in \mathcal{R}$, allora:

$$E = \bigcap_{i \in I} \pi_i^{-1}(E_i).$$

Poichè l'intersezione è al più numerabile, e ciascun membro dell'intersezione appartiene alla σ -algebra prodotto, si ha $E \in \bigotimes_{i \in I} \mathcal{M}_i$. Quindi $\mathcal{R} \subseteq \bigotimes_{i \in I} \mathcal{M}_i$ e, di conseguenza $\mathcal{M}(\mathcal{R}) \subseteq \bigotimes_{i \in I} \mathcal{M}_i$. Il teorema è dimostrato. \square

Proposizione 6.3. Siano (X_i, \mathcal{M}_i) , $i \in I$, spazi misurabili e supponiamo che ogni σ -algebra \mathcal{M}_i sia generata da una famiglia \mathcal{E}_i tale che $X_i \in \mathcal{E}_i$. Allora la σ -algebra prodotto è generata da:

$$\prod_{i \in I} \mathcal{E}_i \equiv \left\{ \prod_{i \in I} E_i \mid E_i \in \mathcal{E}_i \forall i \in I \right\}. \quad (6.3)$$

Dimostrazione. Indichiamo con \mathcal{M} la σ -algebra generata dalla famiglia (6.3). Si ha chiaramente:

$$\prod_{i \in I} \mathcal{E}_i \subseteq \bigotimes_{i \in I} \mathcal{M}_i,$$

da cui segue:

$$\mathcal{M} \subseteq \bigotimes_{i \in I} \mathcal{M}_i.$$

Viceversa, poichè ogni $X_i \in \mathcal{E}_i$, per ogni $E_i \in \mathcal{E}_i$ si ha:

$$\pi_i^{-1}(E_i) \in \prod_{i \in I} \mathcal{E}_i \subseteq \mathcal{M}.$$

Si vede facilmente che la famiglia degli insiemi $E_i \subseteq X_i$ tali che $\pi_i^{-1}(E_i) \in \mathcal{M}$ è una σ -algebra che, per quanto appena visto, contiene la famiglia \mathcal{E}_i , e quindi contiene \mathcal{M}_i . Ne segue che $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}$, e quindi $\bigotimes_{i \in I} \mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{M}$. Il teorema è dimostrato. \square

Teorema 6.4. Siano (X_i, d_i) , $i = 1, 2, \dots, N$, degli spazi metrici. Se $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$, allora:

$$\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{B}(X_i) \subseteq \mathcal{B}(X), \quad (6.4)$$

dove su X si considera la topologia prodotto. Se, inoltre, ogni X_i è separabile, le due σ -algebre coincidono.

Dimostrazione. Per la proposizione precedente, la σ -algebra prodotto $\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{B}(X_i)$ è generata dalla famiglia:

$$\mathcal{E} = \{U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \mid U_i \subseteq X_i \text{ aperto}\}.$$

Ciascuno membro di \mathcal{E} è in particolare un sottoinsieme aperto di X :

$$\mathcal{E} \subseteq \tau(X),$$

dove $\tau(X)$ è la topologia di X . Poichè quest'ultima genera la σ -algebra di X , si ha:

$$\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{B}(X_i) \subseteq \mathcal{B}(X).$$

Supponiamo ora che esistano dei sottoinsiemi numerabili densi $D_i \subseteq X_i$. La topologia prodotto su X è generata dalla distanza:

$$d(x, y) = \max_{i=1,2,\dots,n} d_i(x_i, y_i). \quad (6.5)$$

Notiamo ora che la palla $B_r(x)$, centrata in x e di raggio r , definita dalla distanza (6.5) è data da:

$$B_r(x) = B_r^1(x_1) \times B_r^2(x_1) \times \dots \times B_r^n(x_n). \quad (6.6)$$

Dalla (6.6) si verifica facilmente che:

$$D = D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n$$

è numerabile e denso in X . Di conseguenza, ogni aperto $A \subseteq X$ è dato da un'unione numerabile di palle $B_r(x) \in \mathcal{A}$, dove:

$$\mathcal{A} = \{B_r(x) \mid x \in D, r \in \mathbb{Q}^+\}.$$

Dalla (6.6) segue inoltre che $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$. Quindi, se $A \subseteq X$ è aperto, A è un'unione numerabile di insiemi $E_k \in \mathcal{E}$. Ne segue che $\tau(X) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{E}) = \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{B}(X_i)$ e quindi $\mathcal{B}(X) \subseteq \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{B}(X_i)$. Il teorema è dimostrato. \square

Corollario 6.5.

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m).$$

6.2 Misura prodotto

Sia \mathcal{R} la famiglia dei rettangoli misurabili in $X \times Y$. Se $A \times B, C \times D \in \mathcal{R}$, allora:

$$\begin{aligned} (A \times B) \cap (C \times D) &= (A \cap C) \times (B \cap D) \\ (A \times B)^c &= (A^c \times B) \cup (A \times B^c) \cup (A^c \times B^c). \end{aligned}$$

Dal Lemma 4.2 segue che la famiglia \mathcal{A} delle unioni finite e disgiunte di rettangoli in \mathcal{R} è un'algebra.

Supponiamo ora che $A \times B$ sia un rettangolo e definiamo:

$$\pi_0(A \times B) = \mu(A)\nu(B).$$

Mostriamo che se $A \times B = \cup_i A_i \times B_i$, dove l'unione è disgiunta (finita o numerabile), allora:

$$\pi_0(A \times B) = \sum_i \pi_0(A_i \times B_i).$$

Infatti, per ogni $(x, y) \in X \times Y$ si ha:

$$\chi_A(x)\chi_B(y) = \chi_{A \times B}(x, y) = \sum_i \chi_{A_i \times B_i}(x, y) = \sum_i \chi_{A_i}(x)\chi_{B_i}(y).$$

Integrando rispetto a x e usando il teorema della convergenza monotona, deduciamo che:

$$\mu(A)\chi_B(y) = \sum_i \mu(A_i)\chi_{B_i}(y).$$

Integrando rispetto a y si ottiene quindi:

$$\pi_0(A \times B) = \mu(A)\nu(B) = \sum_i \mu(A_i)\nu(B_i) = \sum_i \pi_0(A_i \times B_i).$$

Sia ora:

$$E = \cup_{i=1}^n A_i \times B_i \in \mathcal{A}$$

un'unione disgiunta finita di rettangoli. Mostriamo che il numero:

$$\sum_{i=1}^n \pi_0(A_i \times B_i),$$

non dipende dalla partizione in rettangoli $A_i \times B_i$ di E . Infatti, se

$$E = \cup_{j=1}^m C_j \times D_j,$$

allora possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} A_i \times B_i &= \cup_{j=1}^m (A_i \cap C_j) \times (B_i \cap D_j) \\ C_j \times D_j &= \cup_{i=1}^n (A_i \cap C_j) \times (B_i \cap D_j). \end{aligned}$$

Per quanto visto sopra:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \pi_0(A_i \times B_i) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \pi_0((A_i \cap C_j) \times (B_i \cap D_j)), \\ \sum_{j=1}^m \pi_0(C_j \times D_j) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \pi_0((A_i \cap C_j) \times (B_i \cap D_j)). \end{aligned}$$

Di conseguenza possiamo porre:

$$\pi_0(E) = \sum_{i=1}^n \pi_0(A_i \times B_i).$$

Si vede facilmente che π_0 è una premisura. Infatti supponiamo che si abbia

$$E \equiv \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{A},$$

dove $E_k \in \mathcal{A}$ per ogni k e $E_k \cap E_j = \emptyset$ per $k \neq j$. Abbiamo allora:

$$\begin{aligned} E_k &= \bigcup_{i_k=1}^{n_k} A_{i_k} \times B_{i_k}, \\ E &= \bigcup_{i=1}^n A_i \times B_i. \end{aligned}$$

Poichè:

$$A_{i_k} \times B_{i_k} = \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap A_{i_k}) \times (B_i \cap B_{i_k}),$$

$$A_i \times B_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i_k=1}^{n_k} (A_i \cap A_{i_k}) \times (B_i \cap B_{i_k}),$$

si ha:

$$\begin{aligned} \pi_0(E) &= \sum_{i=1}^n \pi_0(A_i \times B_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{n_k} \pi_0((A_i \cap A_{i_k}) \times (B_i \cap B_{i_k})) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{n_k} \sum_{i=1}^n \pi_0((A_i \cap A_{i_k}) \times (B_i \cap B_{i_k})) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{n_k} \pi_0(A_{i_k} \times B_{i_k}) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \pi_0(E_k), \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare. Ora, tramite il teorema di Hahn-Kolmogorov, possiamo estendere la premisura ad una misura π completa, tale che:

$$\pi(E) = \pi_0(E)$$

se $E \in \mathcal{A}$. Più precisamente, la misura $\pi: \mathcal{P} \rightarrow [0, \infty]$ ha le seguenti proprietà:

1. Il dominio \mathcal{P} contiene il completamento della σ -algebra prodotto $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. Questo segue dal fatto che la σ -algebra prodotto è generata dall'algebra \mathcal{A} .
2. Se π' è una misura, definita su $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ tale che $\pi'(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$, allora $\pi'(E) \leq \pi(E)$ per $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. Effettivamente, da $\pi'(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ segue $\pi'(E) = \pi_0(E)$ per ogni $E \in \mathcal{A}$, e l'asserto segue dal teorema di Hahn-Kolmogorov.
3. Se μ e ν sono σ -finite, allora anche π è σ -finita. Dal teorema di Hahn-Kolmogorov segue allora che se μ e ν sono σ -finite, allora π è l'unica misura su $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ tale che $\pi(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ per ogni rettangolo.

Proposizione 6.6. (i) Sia $E \subseteq X \times Y$ un insieme $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ -misurabile e sia:

$$E_y = \{x \mid (x, y) \in E\}.$$

Allora E_y è \mathcal{M} -misurabile per ogni $y \in Y$.

(ii) Sia $f: X \times Y \rightarrow Z$ una funzione $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ -misurabile e sia:

$$f_y(x) = f(x, y).$$

Allora f_y è \mathcal{M} -misurabile per ogni $y \in Y$.

(iii) Siano $f: X \rightarrow Z$, $g: Y \rightarrow W$ funzioni misurabili. Allora $(f, g): X \times Y \rightarrow Z \times W$ è misurabile.

(iv) Se $f: X \rightarrow Z$ è misurabile, allora $F: X \times Y \rightarrow Z$ definita da $F(x, y) = f(x)$ è misurabile.

Dimostrazione. Sia \mathcal{F} la collezione degli $E \subseteq X \times Y$ tali che $E_y \in \mathcal{M}$ per ogni $y \in Y$. Dalle identità:

$$\begin{aligned} (X \times Y \setminus E)_y &= X \setminus E_y \\ (\cup_i E_i)_y &= \cup_i (E_i)_y \end{aligned}$$

segue che \mathcal{F} è una σ -algebra. Inoltre, si vede facilmente che \mathcal{F} contiene i rettangoli \mathcal{R} . Poichè questi generano $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, si ha $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \subseteq \mathcal{F}$, il che prova la (i).

La (ii) segue dalla (i), in quanto:

$$f_y^{-1}(F) = (f^{-1}(F))_y$$

è misurabile per ogni $F \subseteq Z$ misurabile.

Per dimostrare (iii), è sufficiente notare che

$$(f, g)^{-1}(A \times B) = f^{-1}(A) \times g^{-1}(B)$$

è misurabile se $A \times B$ è un rettangolo misurabile di $Z \times W$. Poichè questi rettangoli generano la σ -algebra prodotto su $Z \times W$, si ottiene la tesi.

Infine, la (iv) segue dalla (iii) notando che:

$$F = \pi_X \circ (f, \text{id}_Y)$$

è una composizione di funzioni misurabili. □

6.3 Teorema di Fubini-Tonelli

Definizione 6.7. Sia X un insieme. Una classe monotona di X è una famiglia $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ chiusa rispetto all'unione numerabile crescente e all'intersezione numerabile decrescente. Vale a dire, se $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$ e $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots$, e $E_i, F_i \in \mathcal{C}$, allora:

$$\cup_i E_i \in \mathcal{C} \quad \cap_i F_i \in \mathcal{C}.$$

Osservazione 6.8. Chiaramente l'intersezione di classi monotone è una classe monotona. Di conseguenza, data una collezione di insiemi \mathcal{A} , possiamo considerare la classe monotona generata da \mathcal{A} , cioè la più piccola classe monotona contenente \mathcal{A} :

$$\mathcal{C}(\mathcal{A}) = \bigcap_{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}} \mathcal{C}.$$

Lemma 6.9 (Lemma della classe monotona). *Sia \mathcal{A} un'algebra, e siano $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ e $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ la classe monotona e la σ -algebra generata da \mathcal{A} rispettivamente. Allora $\mathcal{C}(\mathcal{A}) = \mathcal{M}(\mathcal{A})$.*

Dimostrazione. Poichè $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ è una classe monotona, si ha $\mathcal{C}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Per mostrare l'inclusione opposta, per ogni $E \subseteq X$ definiamo:

$$\mathcal{C}(E) = \{F \subseteq X \mid E \setminus F, F \setminus E, E \cap F \in \mathcal{C}(\mathcal{A})\}.$$

Si vede facilmente che $\mathcal{C}(E)$ è una classe monotona, contenente E e \emptyset . Inoltre, poichè \mathcal{A} è un'algebra, se $E \in \mathcal{A}$ si ha $F \in \mathcal{C}(E)$ per ogni $F \in \mathcal{A}$. Quindi $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(E)$, da cui $\mathcal{C}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{C}(E)$ se $E \in \mathcal{A}$.

D'altra parte, se $F \in \mathcal{C}(E)$, allora $E \in \mathcal{C}(F)$. Quindi, se $F \in \mathcal{C}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{C}(E)$, allora $E \in \mathcal{C}(F)$. Quindi, se $E \in \mathcal{A}$, allora $E \in \mathcal{C}(F)$ per ogni $F \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$, vale a dire:

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(F)$$

per ogni $F \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$, da cui:

$$\mathcal{C}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{C}(F)$$

per ogni $F \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$. La conclusione è che:

$$E \setminus F, F \setminus E, E \cap F \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$$

se $E, F \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$. Poichè $X \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{A})$, segue che $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ è un'algebra. Se ora $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$, si ha:

$$\bigcup_{i=1}^n E_i \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$$

e, poichè:

$$\bigcup_i E_i = \bigcup_n \bigcup_{i=1}^n E_i$$

è un'unione crescente, si ha:

$$\bigcup_i E_i \in \mathcal{C}(\mathcal{A}).$$

Quindi $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ è una σ -algebra, e da $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{A})$ segue $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{A})$. Il teorema è dimostrato. □

Proposizione 6.10. *Siano μ, ν misure σ -finite. Se $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, allora per ogni $x \in X$ e $y \in Y$ le funzioni $\nu(E_x)$ e $\mu(E_y)$ sono \mathcal{M} -misurabili e \mathcal{N} -misurabili rispettivamente e:*

$$(\mu \times \nu)(E) = \int_Y \mu(E_y) d\nu(y) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x). \quad (6.7)$$

Dimostrazione. Supponiamo prima che μ e ν siano entrambe finite. Se $E = A \times B$, allora

$$\begin{aligned} \nu(E_x) &= \chi_A(x)\nu(B), \\ \mu(E_y) &= \mu(A)\chi_B(y), \end{aligned}$$

sono chiaramente funzioni misurabili e soddisfano la (6.7). Per additività, questo vale per un'unione disgiunta finita di rettangoli $A_i \times B_i$, ovvero per $E \in \mathcal{A}$. Quindi, per il lemma precedente, è sufficiente dimostrare che la collezione \mathcal{C} degli E per cui vale la proposizione è una classe monotona.

Supponiamo che $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X \times Y$ sia una successione crescente di insiemi in \mathcal{C} , sia $E = \cup_n E_n$ e poniamo:

$$f_n(x) = \nu((E_n)_x)$$

Per la continuità dal basso di ν si ha che $f_n(x) \rightarrow \nu(E_x)$ monotonamente, per cui $\nu(E_x)$ è misurabile e:

$$(\mu \times \nu)(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu \times \nu)(E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu(x) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x).$$

Similmente, se $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X \times Y$ è una successione decrescente, la continuità dall'alto di ν insieme all'ipotesi di finitezza $\nu((E_1)_x) < \infty$, $(\mu \times \nu)(E_1) < \infty$, mostra che:

$$g_n(x) = \nu((E_n)_x)$$

converge puntualmente a $\nu(E_x)$, dove $E = \cap_n E_n$. Poichè g_n è maggiorata dalla funzione $\nu(Y) \in L^1(\mu)$, dal teorema della convergenza dominata segue:

$$(\mu \times \nu)(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu \times \nu)(E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \nu((E_n)_x) d\mu(x) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x).$$

Questo (insieme al caso simmetrico per $\mu(E_y)$) mostra che \mathcal{C} è una classe monotona, e quindi dimostra il teorema nel caso di due misure finite.

Per estendere al caso di due misure σ -finite, supponiamo che:

$$X = \cup_i X_i \quad Y = \cup_i Y_i$$

con $\mu(X_i) < \infty$ e $\nu(Y_i) < \infty$. Allora:

$$X \times Y = \cup_i X_i \times Y_i$$

e, dato $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu((E \cap (X_n \times Y_n))_x) = \nu(E_x)$$

monotonamente, quindi $\nu(E_x)$ è misurabile¹² e:

$$(\mu \times \nu)(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu \times \nu)(E \cap (X_n \times Y_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \nu((E \cap (X_n \times Y_n))_x) d\mu(x) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x).$$

Ciò conclude la dimostrazione. □

¹²Una funzione f che ristretta a X_n sia $\mathcal{M} \cap X_n$ -misurabile e tale che $f(x) = 0$ per $x \notin X_n$ è \mathcal{M} -misurabile, in quanto:

$$f^{-1}((a, b)) = \begin{cases} f|_{X_n}^{-1}((a, b)) \in \mathcal{M} \cap X_n \subseteq \mathcal{M} & \text{se } 0 \notin (a, b), \\ f|_{X_n}^{-1}((a, b)) \cup (X \setminus X_n) \in \mathcal{M} & \text{se } 0 \in (a, b). \end{cases}$$

Teorema 6.11 (Fubini-Tonelli). *Siano (X, \mathcal{M}, μ) e (Y, \mathcal{N}, ν) spazi di misura σ -finiti.*

(i) *Sia $f: X \times Y \rightarrow [0, \infty]$ una funzione $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ -misurabile. Allora le funzioni:*

$$\begin{aligned} x &\mapsto \int_Y f(x, y) \, d\nu(y) \\ y &\mapsto \int_X f(x, y) \, d\mu(x) \end{aligned}$$

sono misurabili e:

$$\int_X \left\{ \int_Y f(x, y) \, d\nu(y) \right\} d\mu(x) = \int_{X \times Y} f(x, y) \, d(\mu \times \nu)(x, y) = \int_Y \left\{ \int_X f(x, y) \, d\mu(x) \right\} d\nu(y). \quad (6.8)$$

(ii) *Se $f \in L^1(\mu \times \nu)$, si ha:*

$$\begin{aligned} f(\cdot, y) &\in L^1(\mu) && \text{q.o. } [\nu], \\ f(x, \cdot) &\in L^1(\nu) && \text{q.o. } [\mu], \\ \int_Y f(\cdot, y) \, d\nu(y) &\in L^1(\mu), \\ \int_X f(x, \cdot) \, d\mu(x) &\in L^1(\nu) \end{aligned}$$

e vale la (6.8).

Dimostrazione. (i) Per la proposizione precedente, la tesi è vera per le funzioni caratteristiche, e quindi per le funzioni semplici. Se ora $f \geq 0$, esistono delle funzioni semplici:

$$0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n \leq \cdots \leq f,$$

tali che:

$$s_n(x, y) \rightarrow f(x, y) \quad \forall (x, y) \in X \times Y.$$

Dal teorema della convergenza monotona si ha:

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} f \, d(\mu \times \nu) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} s_n \, d(\mu \times \nu) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X d\mu(x) \int_Y d\nu(y) s_n(x, y) \\ &= \int_X d\mu(x) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_Y d\nu(y) s_n(x, y) \\ &= \int_X d\mu(x) \int_Y d\nu(y) f(x, y). \end{aligned}$$

Notiamo che la misurabilità di $\int_Y d\nu(y) f(x, y)$ segue dal caso delle funzioni semplici, in quanto:

$$\int_Y d\nu(y) f(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_Y d\nu(y) s_n(x, y).$$

□

(ii) Se

$$\int_{X \times Y} |f(x, y)| d(\mu \times \nu) < \infty,$$

il punto (i) applicato a $|f|$ mostra che

$$\int_Y |f(\cdot, y)| d\nu(y) \in L^1(\mu)$$

e quindi:

$$\int_Y f(\cdot, y) d\nu(y) \in L^1(\mu)$$

Ne segue che:

$$\int_Y |f(x, y)| d\nu(y) < \infty \quad \text{q.o. } [\mu],$$

ovvero:

$$f(x, \cdot) \in L^1(\nu) \quad \text{q.o. } [\mu].$$

Per dimostrare la (6.8), basta scomporre f nelle sue parti positiva e negativa (reale e immaginaria).

6.4 Completamento della misura prodotto

Proposizione 6.12. *Se esistono due insiemi non vuoti $A \subset X$ ed $B \subset Y$, tali che $\mu(A) = 0$ e $B \notin \mathcal{N}$, allora la misura prodotto $\mu \times \nu$ su $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ non è completa.*

Dimostrazione. Sia $x \in A$. Abbiamo:

$$(A \times B)_x = B \notin \mathcal{N}.$$

Dalla Proposizione 6.6, segue che $A \times B \notin \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. D'altra parte:

$$A \times B \subseteq A \times Y \in \mathcal{M}$$

e

$$(\mu \times \nu)(A \times Y) = \mu(A)\nu(Y) = 0.$$

Quindi $\mu \times \nu$ non è completa. □

Ricordiamo che il completamento di una misura è definito nel modo seguente (Teorema 2.18). Date due funzioni $f_1: E_1 \rightarrow F$ e $f_2: E_2 \rightarrow F$ fra insiemi arbitrari, diciamo che f_2 è un'estensione di f_1 , e scriviamo:

$$f_1 \prec f_2$$

se $E_1 \subseteq E_2$ e $f_2(x) = f_1(x)$ per ogni $x \in E_1$. Se (\mathcal{M}, μ) è uno spazio di misura, consideriamo tutte le possibili estensioni $\mu \prec \nu$, dove ν è una misura completa. Si dimostra che per qualsiasi estensione vale $\bar{\mu} \prec \nu$, dove $\bar{\mu}$ è la misura completa definita sulla σ -algebra:

$$\bar{\mathcal{M}} = \{A \cup B \mid A \in \mathcal{M}, B \subseteq N \text{ per qualche } N \in \mathcal{M} \text{ con } \mu(N) = 0\},$$

da:

$$\bar{\mu}(A \cup B) = \mu(A).$$

Lo spazio di misura $(\bar{\mathcal{M}}, \bar{\mu})$ è chiamato il completamento di (\mathcal{M}, μ) .

L'interesse nel completamento della misura prodotto è chiarito dal seguente:

Teorema 6.13. *Sia $\lambda^n: \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ la misura di Lebesgue su \mathbb{R}^n . Allora:*

$$\left(\overline{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)}, \overline{\lambda^n \times \lambda^m} \right) = \left(\mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m}), \lambda^{n+m} \right).$$

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che, per quanto già visto:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m}) \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m}),$$

e inoltre le misure $\lambda^n \times \lambda^m$ e λ^{n+m} coincidono sui boreliani. Questo segue dal fatto che esse assegnano la stessa misura alle scatole aperte, quindi la stessa misura ai polirettangoli e, per il teorema di Hahn-Kolmogorov (poichè λ^{n+m} è σ -finita), la stessa misura a tutti gli insiemi di Borel. Di conseguenza:

$$\lambda^{n+m}|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m})} = \lambda^n \times \lambda^m|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)} \prec \lambda^n \times \lambda^m \prec \overline{\lambda^n \times \lambda^m},$$

da cui:

$$\lambda^{n+m} = \overline{\lambda^{n+m}|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m})}} \prec \overline{\lambda^n \times \lambda^m}.$$

Mostriamo ora che:

$$\lambda^n \times \lambda^m \prec \lambda^{n+m}.$$

Per quanto osservato in 6.2, è sufficiente dimostrare che:

$$A \times B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m})$$

se $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$, e in tal caso:

$$\lambda^{n+m}(A \times B) = \lambda^n(A)\lambda^m(B).$$

Ora, se $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ e $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$, per la regolarità di λ^n e λ^m esistono $P_A, Q_A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ e $P_B, Q_B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ tali che:

$$\begin{aligned} P_A \subseteq A \subseteq Q_A, & \quad \lambda^n(Q_A \setminus P_A) = 0. \\ P_B \subseteq B \subseteq Q_B, & \quad \lambda^m(Q_B \setminus P_B) = 0. \end{aligned}$$

Pertanto:

$$P_A \times P_B \subseteq A \times B \subseteq Q_A \times Q_B.$$

Inoltre:

$$(Q_A \times Q_B) \setminus (P_A \times P_B) = [(Q_A \setminus P_A) \times P_B] \cup [Q_A \times (Q_B \setminus P_B)] \cup [(Q_A \setminus P_A) \times (Q_B \setminus P_B)].$$

Poichè $\lambda^{n+m}|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m})} = \lambda^n \times \lambda^m|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m})}$, si ha:

$$\begin{aligned} \lambda^{n+m}((Q_A \times Q_B) \setminus (P_A \times P_B)) &\leq \lambda^{n+m}((Q_A \setminus P_A) \times P_B) + \lambda^{n+m}(Q_A \times (Q_B \setminus P_B)) + \lambda^{n+m}((Q_A \setminus P_A) \times (Q_B \setminus P_B)) \\ &= \lambda^n(Q_A \setminus P_A)\lambda^m(P_B) + \lambda^n(Q_A)\lambda^m(Q_B \setminus P_B) + \lambda^n(Q_A \setminus P_A)\lambda^m(Q_B \setminus P_B) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Poichè λ^{n+m} è completa, ciò implica che:

$$A \times B = (P_A \times P_B) \cup [(A \times B) \setminus (P_A \times P_B)] \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m})$$

e che:

$$\lambda^{n+m}(A \times B) = \lambda^{n+m}(P_A \times P_B) = \lambda^n(P_A)\lambda^m(P_B) = \lambda^n(A)\lambda^m(B).$$

Quindi $\lambda^n \times \lambda^m \prec \lambda^{n+m}$. Poichè λ^{n+m} è completa, ciò implica:

$$\overline{\lambda^n \times \lambda^m} \prec \lambda^{n+m}.$$

Il teorema è dimostrato. □

Proposizione 6.14. *Siano (X, \mathcal{M}, μ) e (Y, \mathcal{N}, ν) spazi di misura completi.*

(i) *Sia $E \subseteq X \times Y$ un insieme $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ -misurabile e sia:*

$$E^y = \{x \mid (x, y) \in E\}.$$

Allora E^y è \mathcal{M} -misurabile per quasi ogni $y \in Y$ $[\nu]$.

(ii) *Sia $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ -misurabile e sia:*

$$f^y(x) = f(x, y).$$

Allora f^y è \mathcal{M} -misurabile per quasi ogni $y \in Y$ $[\nu]$.

Dimostrazione. Notiamo che la (i) segue dalla (ii) per $f = \chi_E$. Per dimostrare la (ii) applichiamo la Proposizione 5.31: esiste una funzione $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ -misurabile $g: X \times Y \rightarrow Z$ tale che:

$$f = g \quad \text{q.o. } [\mu \times \nu].$$

Utilizziamo il seguente:

Lemma 6.15. *Se $h: X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ è $\overline{\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}}$ -misurabile e $h = 0$ q.o. $[\mu \times \nu]$, allora, per quasi ogni $y \in Y$ si ha $h^y(x) = 0$ per quasi ogni $x \in X$. In particolare, h^y è \mathcal{M} -misurabile per quasi ogni $y \in Y$.*

Dimostrazione. Poniamo:

$$P = \{(x, y) | h(x, y) \neq 0\}.$$

Allora $P \in \overline{\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}}$ e $\overline{\mu \times \nu}(P) = 0$. Quindi esiste $Q \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ tale che $P \subseteq Q$ e $\mu \times \nu(Q) = 0$. Di conseguenza:

$$\int \mu(Q^y) d\nu(y) = 0.$$

Se

$$N = \{y | \mu(Q^y) > 0\},$$

dalle precedente segue che $\nu(N) = 0$. Se $y \notin N$, allora $\mu(Q^y) = 0$. Poichè $P^y \subseteq Q^y$, e ν è completa, se $y \notin N$ allora $P^y \in \mathcal{M}$ e $\mu(P^y) = 0$. Se $x \notin P^y$, allora $h^y(x) = 0$.

Quindi per quasi ogni $y \in Y$ si ha $h^y(x) = 0$ per quasi ogni $x \in X$. In particolare, h^y è misurabile per quasi ogni $y \in Y$. \square

Il lemma precedente, applicato alla funzione $\overline{\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}}$ -misurabile $h = f - g$ ci dice che, per quasi ogni $y \in Y$:

$$f^y(x) = g^y(x) \quad \text{q.o. } [\mu].$$

Poichè il membro destro è misurabile, si ha che f^y è misurabile per quasi ogni $y \in Y$. \square

Possiamo ora enunciare il teorema di Fubini per funzioni $\overline{\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}}$ -misurabili.

Teorema 6.16 (Fubini-Tonelli). *Siano (X, \mathcal{M}, μ) e (Y, \mathcal{N}, ν) spazi di misura σ -finiti e completi.*

(i) *Sia $f: X \times Y \rightarrow [0, \infty]$ una funzione $\overline{\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}}$ -misurabile. Allora le funzioni definite quasi ovunque da:*

$$\begin{aligned} x &\mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y) \\ y &\mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x) \end{aligned}$$

sono misurabili per quasi ogni $y \in Y$ e quasi ogni $x \in X$ rispettivamente e:

$$\int_X \left\{ \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right\} d\mu(x) = \int_{X \times Y} f(x, y) d(\overline{\mu \times \nu})(x, y) = \int_Y \left\{ \int_X f(x, y) d\mu(x) \right\} d\nu(y). \quad (6.9)$$

(ii) *Se $f \in L^1(\mu \times \nu)$, si ha:*

$$\begin{aligned} f(\cdot, y) &\in L^1(\mu) && \text{q.o. } [\nu], \\ f(x, \cdot) &\in L^1(\nu) && \text{q.o. } [\mu], \\ \int_Y f(\cdot, y) d\nu(y) &\in L^1(\mu), \\ \int_X f(x, \cdot) d\mu(x) &\in L^1(\nu) \end{aligned}$$

e vale la (6.9). Notiamo che le ultime due funzioni sono definite quasi ovunque.

Dimostrazione. (i) Sia $g: X \times Y \rightarrow [0, \infty]$ una funzione $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ -misurabile tale che $f = g$ q.o. $[\mu \times \nu]$. Per la dimostrazione della proposizione precedente, esiste $N \subseteq Y$ tale che $\nu(N) = 0$ e:

$$f^y = g^y \quad \text{q.o. } [\mu]$$

per $y \notin N$. Dalla Proposizione 5.59 e dal Teorema di Fubini-Tonelli abbiamo quindi:

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} f d(\overline{\mu \times \nu}) &= \int_{X \times Y} g d(\mu \times \nu) \\ &= \int_Y \left\{ \int_X g(x, y) d\mu(x) \right\} d\nu(y) \\ &= \int_{Y \setminus N} \left\{ \int_X g(x, y) d\mu(x) \right\} d\nu(y) \\ &= \int_{Y \setminus N} \left\{ \int_X f(x, y) d\mu(x) \right\} d\nu(y) \\ &= \int_Y \left\{ \int_X f(x, y) d\mu(x) \right\} d\nu(y), \end{aligned}$$

dove poichè ν è completa, la funzione:

$$x \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$$

si può definire arbitrariamente per $y \in N$. Similmente si dimostra che:

$$\int_{X \times Y} f d(\overline{\mu \times \nu}) = \int_X \left\{ \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right\} d\mu(x).$$

(ii) Segue da (i) esattamente come per il teorema di Fubini-Tonelli. □

6.5 Funzioni di distribuzione

Definizione 6.17. Sia $f: X \rightarrow [0, \infty)$ una funzione misurabile. La funzione:

$$F(t) = \mu(\{f(x) \geq t\})$$

è chiamata funzione di distribuzione di f .

Osservazione 6.18. La funzione di distribuzione è misurabile. Infatti è continua a destra:

$$F(t) = \mu(f^{-1}([t, \infty))) = \mu(\cap_n f^{-1}([t - \varepsilon_n, \infty))) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\cap_n f^{-1}([t - \varepsilon_n, \infty))) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(t - \varepsilon_n)$$

se $\varepsilon_n \downarrow 0$ (alternativamente, si può osservare che tutte le funzioni monotone sono misurabili).

Teorema 6.19. Sia (X, \mathcal{M}, μ) uno spazio di misura σ -finito. Sia $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ una funzione C^1 non decrescente e tale che $\varphi(0) = 0$. Se $f: X \rightarrow [0, \infty)$ è misurabile, allora:

$$\int_X \varphi \circ f d\mu = \int_0^\infty \mu(\{f(x) \geq t\}) \varphi'(t) dt.$$

Osservazione 6.20. Dalla dimostrazione, si vede che la richiesta minimale su φ è che essa sia assolutamente continua in $[0, T]$ per ogni $T > 0$.

Dimostrazione. Sia:

$$E = \{(x, t) | f(x) \geq t\}.$$

Dalla Proposizione (6.6), segue che $F(x, t) = f(x) - t$ è misurabile, quindi E è $\mathcal{M} \otimes \mathcal{L}(\mathbb{R})$ -misurabile. La sua sezione:

$$E^t = \{x | f(x) \geq t\}$$

è tale che:

$$\mu(\{f(x) \geq t\}) = \mu(E^t) = \int_X \chi_{E^t}(x) d\mu(x).$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mu(\{f(x) \geq t\}) \varphi'(t) dt &= \int_0^\infty \left\{ \int_X \chi_{E^t}(x) d\mu(x) \right\} \varphi'(t) dt \\ &= \int_0^\infty \left\{ \int_X \chi_{E^t}(x) \varphi'(t) d\mu(x) \right\} dt \\ &= \int_X \left\{ \int_0^\infty \chi_{E^t}(x) \varphi'(t) dt \right\} d\mu(x) \\ &= \int_X \left\{ \int_0^{f(x)} \varphi'(t) dt \right\} d\mu(x) \\ &= \int_X f d\mu. \end{aligned}$$

□

Osservazione 6.21. Nel caso in cui $\varphi(t) = t$, si ha:

$$\int_X f d\mu = \int_0^\infty \mu(\{f(x) \geq t\}) dt = \int_0^\infty \mu(E^t) dt = (\mu \times \lambda^1)(E) = (\mu \times \lambda^1)(\{(x, t) | 0 \leq t \leq f(x)\}),$$

dove il membro destro non è altro che la misura del sottografico di f .

Nel caso di uno spazio di probabilità (Ω, \mathcal{E}, P) , se $X: \Omega \rightarrow [0, \infty)$ è una variabile casuale positiva, dal teorema si ha che:

$$\mathbb{E}(X^n) = n \int_0^\infty [1 - F_X(x)] x^{n-1} dx,$$

dove:

$$F_X(x) = P(\{X < x\})$$

è, in teoria delle probabilità, la funzione di distribuzione di X . In particolare, vale la formula:

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty (1 - F_X(x)) dx$$

per il valore atteso, il che mostra che:

$$1 - F_X(x) = o\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \rightarrow \infty)$$

se il momento primo $\mathbb{E}(X) < \infty$.

6.6 Convoluzioni

Definizione 6.22. Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Definiamo la *convoluzione* di f con g :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt \quad (6.10)$$

per tutti gli $x \in \mathbb{R}$ per i quali:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)g(x-t)| dt < \infty. \quad (6.11)$$

Teorema 6.23. Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Allora:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)g(x-t)| dt < \infty$$

per quasi ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre, la convoluzione, definita quasi ovunque da (6.10), è integrabile e:

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1. \quad (6.12)$$

Osservazione 6.24. Notiamo che la (6.12), letta in altra chiave, dice che ogni funzione $g \in L^1(\mathbb{R})$ definisce, mediante il prodotto di convoluzione, una trasformazione lineare continua di $L^1(\mathbb{R})$.

Dimostrazione. Siano f_0 e g_0 funzioni boreliane tali che $f = f_0$ e $g = g_0$ quasi ovunque. Poichè la sostituzione di f e g con f_0 e g_0 non altera gli integrali (6.11) e (6.10), possiamo supporre direttamente che f e g siano funzioni boreliane. In questo caso la funzione:

$$(x, t) \mapsto F(x, t) = f(t)g(x-t)$$

è boreliana¹³ e, in particolare, Lebesgue misurabile. Dal teorema di Fubini-Tonelli per il completamento, abbiamo:

$$\int_{\mathbb{R}^2} |F(x, t)| dt dx = \int_{-\infty}^{\infty} dt |f(t)| \int_{-\infty}^{\infty} dx |g(x-t)| = \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Quindi $F \in L^1(\mathbb{R}^2)$, e il teorema di Fubini-Tonelli implica che $f(\cdot)g(x-\cdot) \in L^1(\mathbb{R})$ per quasi ogni $x \in \mathbb{R}$, per cui la convoluzione è definita quasi ovunque e, di nuovo per il Teorema di Fubini-Tonelli, misurabile. La (6.12) segue da:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(f * g)(x)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt \right| dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)g(x-t)| dt \right\} dx = \|f\|_1 \|g\|_1.$$

□

Teorema 6.25. Siano $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$. Allora

$$f * g = g * f \quad q.o. \quad (6.13)$$

$$(f * g) * h = f * (g * h) \quad q.o. \quad (6.14)$$

¹³Se definiamo:

$$\varphi(x, t) = t, \quad \psi(x, t) = x - t,$$

abbiamo:

$$f(t)g(x-t) = [(f \circ \varphi) \cdot (g \circ \psi)](x, t).$$

Poichè tutte le funzioni coinvolte sono Borel misurabili, otteniamo l'asserto. Notiamo che la composizione $f \circ \varphi$, dove φ è Borel misurabile e f è Lebesgue misurabile, non è necessariamente Lebesgue misurabile (cfr. Problema 5.8).

Dimostrazione. Notiamo innanzitutto che entrambi i membri delle uguaglianze (6.13) e (6.14) sono definiti quasi ovunque, in quanto $(f * g) \in L^1(\mathbb{R})$ e $(g * h) \in L^1(\mathbb{R})$. Come sopra, possiamo supporre f , g e h boreliane. Inoltre, poichè la convoluzione è bilineare, è sufficiente dimostrare le (6.13) e (6.14) per f , g e h positive.

Per la (6.13), notiamo che, facendo il cambio di variabile $t = x - s$ si ha, per ogni $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-s)g(s)ds,$$

da cui segue la (6.13) per tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che $f * g$ e $g * f$ sono entrambe definite.

Per la (6.14) notiamo che:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(t-s)h(x-t)ds \right\} dt \\ & \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(t)h(x-t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(t-s)h(x-t)ds \right\} dt \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-s)h(x-t)dt \right\} ds \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)h(x-s-t)dt \right\} ds \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)(g * h)(x-s)ds \end{aligned}$$

da cui segue la (6.14) se entrambi i membri sono definiti. □

6.7 Controesempi al teorema di Fubini

Esempio 6.26 (Necessità dell'ipotesi L^1). Consideriamo una successione doppia:

$$f_{nm} = \begin{cases} 1 & m = n \\ -1 & m = n + 1, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove $m, n \geq 1$. Abbiamo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f_{nm} = 0 \neq 1 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{nm}.$$

Se c è la misura del contare su \mathbb{N} , questo ci dice che:

$$\int_{\mathbb{N}} dc(n) \int_{\mathbb{N}} dc(m) f(n, m) \neq \int_{\mathbb{N}} dc(m) \int_{\mathbb{N}} dc(n) f(n, m).$$

Chiaramente qui abbiamo, dal teorema di Tonelli (per funzioni positive):

$$\int_{\mathbb{N}^2} |f| d(c \times c) = \int_{\mathbb{N}} dc(m) \int_{\mathbb{N}} |f(n, m)| dc(n) = \int_{\mathbb{N}} dc(m) 1 = \infty.$$

Esempio 6.27 (Necessità dell'ipotesi di σ -finitezza). Siano $X = Y = [0, 1]$, $\mu = \lambda$ e $\nu = c$ la misura di Lebesgue e la misura del contare rispettivamente, entrambe ristrette ai boreliani $\mathcal{B}([0, 1])$. Chiaramente $\nu = c$ non è σ -finita, in quanto gli unici insiemi di misura c finita sono finiti, e un'unione numerabile di tali insiemi è al più numerabile.

Sia D la diagonale di $[0, 1] \times [0, 1]$. La funzione χ_D è misurabile e positiva¹⁴, ma il Teorema di Tonelli non si applica.

¹⁴Qui $\lambda \times c$ è definita su $\mathcal{B}([0, 1]) \otimes \mathcal{B}([0, 1]) = \mathcal{B}([0, 1]^2)$.

Per dimostrarlo, osserviamo che $\chi_D(x, y) = \chi_{\{0\}}(x - y)$. Abbiamo allora:

$$\int_{[0,1]} dx \int_{[0,1]} dc(y) \chi_D(x, y) = \int_{[0,1]} dx 1 = 1,$$

mentre

$$\int_{[0,1]} dc(y) \int_{[0,1]} dx \chi_D(x, y) = \int_{[0,1]} dc(y) \int_{\{y\}} dx = 0.$$

Inoltre, possiamo dimostrare che:

$$\int_{[0,1]^2} \chi_D d(\lambda \times c) = \infty.$$

Partiamo dalla definizione di $\lambda \times c$ come misura esterna:

$$(\lambda \times c)(D) = \inf \left\{ \sum_i \lambda(A_i) c(B_i) \mid D \subseteq \cup_i (A_i \times B_i), A_i, B_i \in \mathcal{B}([0, 1]) \right\}.$$

Poichè:

$$D \cap (A_i \times B_i) = D \cap [(A_i \cap B_i) \times (A_i \cap B_i)],$$

ci possiamo chiaramente restringere, nell'inf, ai rettangoli della forma $A_i \times A_i$, con $A_i \in \mathcal{B}([0, 1])$. Supponiamo ora che:

$$D \subseteq \cup_i A_i \times A_i \quad A_i \in \mathcal{B}([0, 1]).$$

Sia: A

$$I = \{i \mid \lambda(A_i) > 0\},$$

$$J = \{j \mid \lambda(A_j) = 0\}.$$

Posto

$$N = \bigcup_{j \in J} A_j,$$

abbiamo:

$$D \subseteq (N \times N) \cup \left[\bigcup_{i \in I} A_i \times A_i \right].$$

Ne segue che:

$$[0, 1] \subseteq N \cup \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)$$

e quindi:

$$[0, 1] \setminus N \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i.$$

Poichè:

$$\lambda([0, 1] \setminus N) = 1,$$

l'insieme $[0, 1] \setminus N$ non è numerabile. Di conseguenza, esiste $i_0 \in I$ tale che A_{i_0} non è numerabile. Poichè $\lambda(A_{i_0}) > 0$, si ha:

$$\lambda(A_{i_0}) c(A_{i_0}) = \lambda(A_{i_0}) \infty = \infty$$

e di conseguenza:

$$\sum_i \lambda(A_i) c(A_i) \geq \lambda(A_{i_0}) c(A_{i_0}) = \infty.$$

Quindi la misura della diagonale D , vale a dire l'integrale:

$$\int_{[0,1]^2} \chi_D d(\lambda \times c)$$

è infinita.

7 Misure con segno e misure complesse

7.1 Definizioni

Definizione 7.1. Sia (X, \mathcal{M}) uno spazio misurabile. Una misura con segno (una misura complessa) su X è una funzione $\nu: \mathcal{M} \rightarrow (-\infty, +\infty]$ ($\nu: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$) numerabilmente additiva e tale che $\nu(\emptyset) = 0$.

Osservazione 7.2. Chiaramente una “misura”, nel senso utilizzato finora, è una misura con segno μ a valori in $[0, \infty]$. Per evitare ambiguità, nel seguito ci riferiremo a una tale μ come a una “misura positiva”. Continueremo a riservare l'appellativo “spazio di misura” alla terna (X, \mathcal{M}, μ) soltanto se μ è una misura positiva (si veda l'enunciato del teorema seguente). Osserviamo esplicitamente che una misura con segno è una misura complessa se e soltanto se la sua immagine non contiene ∞ , mentre una misura complessa è una misura con segno se e soltanto se la sua immagine è reale.

Proposizione 7.3. Sia (X, \mathcal{M}, μ) uno spazio di misura e sia $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione misurabile.

(i) Se f è reale e non negativa allora:

$$\varphi(E) = \int_E f \, d\mu \quad (E \in \mathcal{M})$$

è una misura positiva su X .

(ii) Se $f \in L^1(\mu)$ allora φ è una misura complessa su X .

(iii) Se f è reale e $f^- \in L^1(\mu)$, allora φ è una misura con segno.

Dimostrazione. Notiamo che in tutti e tre i casi è soddisfatto il requisito $\varphi(\emptyset) = 0$. Per dimostrare l'additività numerabile, siano $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ insiemi misurabili disgiunti a coppie e sia $E = \cup_i E_i$. Abbiamo chiaramente:

$$\chi_E f = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{E_i} f.$$

Nel caso (i) dal teorema della convergenza monotona si ha:

$$\varphi(E) = \int_E f \, d\mu = \int_X \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{E_i} f \, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_X \chi_{E_i} f \, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(E_i).$$

Nel caso (ii), la stessa catena di uguaglianze è giustificata dal teorema della convergenza dominata, in quanto:

$$\left| \sum_{i=1}^n \chi_{E_i} f \right| = \sum_{i=1}^n \chi_{E_i} |f| \leq |f| \in L^1(\mu).$$

Infine, nel caso (iii), scriviamo:

$$\varphi(E) = \int_E f \, d\mu = \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu \equiv \varphi^+(E) - \varphi^-(E).$$

L'ipotesi su f garantisce che φ^- è una misura positiva finita, mentre φ^+ è una misura positiva. Ne segue che $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$ è una misura con segno. \square

Osservazione 7.4. Sia ν una misura con segno su X , siano $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ insiemi misurabili disgiunti a coppie e sia $E = \cup_i E_i$. Chiaramente, per qualsiasi riordinamento $E_{i_1}, E_{i_2}, \dots, E_{i_k}, \dots$ si ha:

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{i_k}.$$

Se $\nu(E) < \infty$, poichè:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \nu(E_{i_k}) = \nu(E) < \infty$$

per qualsiasi riordinamento, la serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \nu(E_{i_k})$$

è assolutamente convergente. In particolare, questo vale sempre per una misura complessa. Torneremo su questo argomento quando definiremo la variazione totale di una misura complessa.

Proposizione 7.5. *Sia ν una misura con segno oppure una misura complessa su X . Abbiamo:*

$$\nu(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(E_n)$$

nei due seguenti casi:

- (i) se $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots \subseteq E_n \subseteq \dots$ ed $E = \cup_n E_n$.
- (ii) se $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots \supseteq E_n \supseteq \dots$, $E = \cap_n E_n$ e $\nu(E_1) < \infty$.

Dimostrazione. La dimostrazione di (i) procede come per le misure positive. La dimostrazione di (ii) procede come per le misure positive se dimostriamo che l'ipotesi implica $\nu(E_i) < \infty$ per ogni i . Questa è una conseguenza della decomposizione di Hahn di ν che dimostreremo più avanti (Teorema 7.8). In ogni caso, non utilizzeremo queste due proprietà prima di dimostrare il Teorema. \square

7.2 Misure con segno: decomposizione di Hahn

Definizione 7.6. Sia ν una misura con segno su X . Un sottoinsieme $E \subseteq X$ misurabile si dice positivo, negativo o nullo, se la misura di ogni suo sottoinsieme è rispettivamente non negativa, non positiva o nulla.

Proposizione 7.7. *Sia ν una misura con segno su X e sia $E \subseteq X$ un insieme misurabile tale che $\nu(E) < 0$. Allora E ha un sottoinsieme $Q \subseteq E$ negativo tale che $\nu(Q) < 0$.*

Dimostrazione. Se E è un insieme negativo non c'è nulla da dimostrare. In caso contrario, sia $n_1 \in \mathbb{N}$ il più piccolo intero tale che:

$$\nu(E_1) \geq \frac{1}{n_1}$$

per qualche $E_1 \subseteq E$ misurabile. Se $E \setminus E_1$ è un insieme negativo, allora:

$$\nu(E \setminus E_1) < \nu(E \setminus E_1) + \nu(E_1) = \nu(E) < 0,$$

per cui possiamo porre $Q = E \setminus E_1$. In caso contrario, sia n_2 il più piccolo intero tale che:

$$\nu(E_2) \geq \frac{1}{n_2}$$

per qualche $E_2 \subseteq E \setminus E_1$. Notiamo che $n_2 \geq n_1$. Se $E \setminus (E_1 \cup E_2)$ è negativo, poniamo $Q = E \setminus (E_1 \cup E_2)$ e notiamo che, poichè $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, si ha:

$$\nu(Q) < \nu(E \setminus (E_1 \cup E_2)) + \nu(E_1) + \nu(E_2) = \nu(E) < 0.$$

Altrimenti proseguiamo la costruzione.

Vi sono due possibilità: o, in un numero finito di passi, troviamo che

$$Q = E \setminus (E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k)$$

è negativo, dove gli insiemi E_i sono disgiunti a coppie, e in tal caso concludiamo come sopra la dimostrazione. Altrimenti, otteniamo una successione di interi $n_1 \leq n_2 \leq \dots$ e di insiemi misurabili disgiunti a coppie $E_k \subseteq E$ tali che:

$$\nu(E_k) \geq \frac{1}{n_k}.$$

In tal caso poniamo:

$$Q = E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

Poichè:

$$\nu(Q) < \nu(Q) + \sum_{k=1}^{\infty} \nu(E_k) = \nu(E) < 0,$$

dobbiamo dimostrare che Q è negativo.

Notiamo che la successione n_k è divergente. Infatti, poichè n_k è monotona:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = \sup_{k \in \mathbb{N}} n_k$$

Se supponiamo che

$$M = \sup_{k \in \mathbb{N}} n_k < \infty,$$

troviamo, poichè $\nu(Q) > -\infty$:

$$\nu(E) = \nu(Q) + \sum_{k=1}^{\infty} \nu(E_k) \geq \nu(Q) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} \geq \nu(Q) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{M} = \infty,$$

in contraddizione con l'ipotesi $\nu(E) < 0$.

Supponiamo ora, per assurdo, che $F \subseteq Q$ sia tale che $\nu(F) > 0$. Allora

$$\nu(F) \geq \frac{1}{N}$$

per qualche $N \in \mathbb{N}$. Poichè $n_k \rightarrow \infty$, $n_k > N$ per qualche k . Se k_1 è il più piccolo $k \in \mathbb{N}$ tale che $n_{k_1} > N$, si ha

$$n_{k_1-1} \leq N < n_{k_1} \leq n_{k_1+1} \leq \dots$$

Ma ciò contraddice la costruzione della successione (n_k, E_k) , in quanto, al passo k_1 -esimo, esiste un $N < n_{k_1}$ e un $F \subseteq Q \subseteq E \setminus (E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_{k_1-1})$ tale che $\nu(F) \geq \frac{1}{N}$. La contraddizione mostra che Q è un insieme negativo è completa la dimostrazione del teorema. \square

Teorema 7.8 (Teorema della decomposizione di Hahn). *Sia ν una misura con segno su X . Allora:*

(i) *Esistono due insiemi $P, Q \subseteq X$ misurabili tali che P è positivo, Q è negativo e:*

$$P \cap Q = \emptyset, \quad P \cup Q = X.$$

(ii) *Se P', Q' sono due insiemi misurabili soddisfacenti (i), allora:*

$$P \Delta P' = Q \Delta Q',$$

e $P \Delta P'$ è un insieme nullo per ν .

(iii) *Se $\nu(Q) = 0$ (rispettivamente, $\nu(P) = 0$) allora ν è una misura positiva (rispettivamente, negativa).*

Osservazione 7.9. La coppia (P, Q) è detta una “decomposizione di Hahn” per X rispetto alla misura con segno ν .

Dimostrazione. (i) Se X è positivo, allora basta prendere $P = X$, $Q = \emptyset$.

Altrimenti, esiste $F \subseteq X$ tale che $\nu(F) < 0$. Per la proposizione precedente, la collezione degli insiemi negativi è non vuota. Poniamo:

$$L = \inf \{ \nu(E) \mid E \text{ negativo} \}$$

e sia $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di insiemi negativi tali che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(Q_n) = L.$$

Sia

$$Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n.$$

Mostriamo che Q è negativo. Posti $B_1 = Q_1$ e

$$B_n = Q_n \setminus (Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_n)$$

per $n \geq 2$, si ha che ogni B_n è negativo (in quanto sottoinsieme di un insieme negativo) e inoltre:

$$Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Di conseguenza, se $A \subseteq Q$, allora:

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap B_n)$$

è un'unione disgiunta e numerabile di insiemi negativi, quindi è negativo. Quindi Q è, come asserito, negativo.

Di conseguenza:

$$L \leq \nu(Q).$$

Ma, per ogni $n = 1, 2, \dots$, si ha:

$$\nu(Q) = \nu(Q \setminus Q_n) + \nu(Q_n) \leq \nu(Q_n).$$

Passando al limite per $n \rightarrow \infty$, si trova:

$$\nu(Q) \leq L,$$

da cui segue:

$$\nu(Q) = L.$$

In particolare, per definizione di ν , si ha $L = \nu(Q) > -\infty$.

Poniamo ora $P = X \setminus Q$. Mostriamo che P è positivo. Infatti se, per assurdo, supponiamo che esista $A \subseteq P$ con $\nu(A) < 0$, allora esiste un insieme negativo $B \subseteq A$ con $\nu(B) < 0$. Di conseguenza:

$$Q \cup B$$

è un insieme negativo e:

$$\nu(Q \cup B) = \nu(Q) \cup \nu(B) < \nu(Q) = L$$

(dato che $\nu(Q) = L > -\infty$). Ma ciò contraddice la definizione di L . Ne concludiamo che A è positivo, e ciò conclude la dimostrazione di (i).

(ii) Se $P', Q' \subseteq X$ è una coppia di insiemi soddisfacenti (i), si ha:

$$\begin{aligned} P \setminus P' &= P \cap Q' = Q' \setminus Q, \\ P' \setminus P &= P' \cap Q = Q \setminus Q', \end{aligned}$$

e, di conseguenza:

$$P \Delta P' = Q \Delta Q'.$$

Inoltre, $P \Delta P'$ è positivo in quanto unione disgiunta di insiemi positivi. Allo stesso modo, $Q \Delta Q'$ è negativo. Di conseguenza, $P \Delta P' = Q \Delta Q'$ è un insieme nullo.

(iii) Per ogni $A \subseteq Q$ si ha:

$$\nu(Q) = \nu(Q \setminus A) + \nu(A) \leq \nu(A) \leq 0.$$

Di conseguenza, se $\nu(Q) = 0$, allora Q è un insieme nullo. Se $A \subseteq X$ si ha pertanto:

$$\nu(A) = \nu(A \cap P) + \nu(A \cap Q) = \nu(A \cap P) \geq 0,$$

ovvero ν è positiva. Il caso $\nu(P) = 0$ segue in modo analogo. □

Definizione 7.10. Sia μ una misura (con segno o complessa) su X e sia $E \subseteq X$ un insieme misurabile. Diciamo che μ è concentrata in E se:

$$\mu(A) = \mu(A \cap E)$$

per ogni $A \subseteq X$ misurabile. Equivalentemente, μ è concentrata in E se $A \cap E = \emptyset$ implica $\mu(A) = 0$.

Diciamo che μ e ν sono *mutuamente singolari* se esistono due insiemi misurabili disgiunti E e F tali che μ e ν sono concentrate rispettivamente in E ed F . In questo caso, scriviamo:

$$\nu \perp \mu.$$

Corollario 7.11 (Decomposizione di Hahn.). *Sia ν una misura con segno su X . Allora esiste un'unica coppia di misure positive ν^+ e ν^- tali che:*

$$\begin{aligned}\nu &= \nu^+ - \nu^-, \\ \nu^+ &\perp \nu^-, \\ \nu^-(X) &< \infty.\end{aligned}\tag{7.1}$$

Osservazione 7.12. La decomposizione (7.1), di una misura con segno nella differenza di due misure positive e mutuamente singolari, è chiamata “decomposizione di Jordan”.

Dimostrazione. Siano $P, Q \subseteq X$ come nel Teorema 7.8. Per ogni E misurabile, poniamo:

$$\begin{aligned}\nu^+(E) &= \nu(E \cap P), \\ \nu^-(E) &= -\nu(E \cap Q).\end{aligned}$$

Si verifica immediatamente che ν^+ e ν^- hanno le proprietà asserite.

Resta da dimostrare l'unicità della coppia (ν^+, ν^-) . Supponiamo che μ^+, μ^- sia un'altra coppia di misure positive soddisfacenti alle ipotesi del teorema. Esistono due insiemi misurabili $P', Q' \subseteq X$ tali che:

$$P' \cup Q' = X, \quad P' \cap Q' = \emptyset,$$

e tali che μ^+ è concentrata su P' e μ^- è concentrata su Q' . Poichè:

$$\nu = \mu^+ - \mu^-,$$

si ha che P' e Q' sono rispettivamente insiemi positivi e negativi per ν . Per il teorema precedente, si ha:

$$P' \Delta P = Q' \Delta Q \equiv N,$$

dove N è un insieme nullo. Se $E \subseteq X$ è un insieme misurabile, allora:

$$\begin{aligned}\mu^-(E) &= \mu^-(E \cap Q') = -\nu(E \cap Q') = -\nu(E \cap (Q' \setminus Q)) - \nu(E \cap Q' \cap Q) = -\nu(E \cap Q' \cap Q), \\ \nu^-(E) &= \nu^-(E \cap Q) = -\nu(E \cap Q) = -\nu(E \cap (Q \setminus Q')) - \nu(E \cap Q' \cap Q) = -\nu(E \cap Q' \cap Q),\end{aligned}$$

dato che $E \cap (Q \setminus Q'), E \cap (Q' \setminus Q) \subseteq Q \Delta Q'$. Di conseguenza $\mu^- = \nu^-$ e quindi:

$$\mu^+ = \nu + \mu^- = \nu + \nu^- = \nu^+.$$

Il teorema è dimostrato. □

Osservazione 7.13. Dalla decomposizione di Hahn segue facilmente che $\nu(E) < \infty$ implica $\nu(F) < \infty$ se $F \subseteq E$, come affermato sopra. Infatti, si ha $\nu(E) < \infty$ se e soltanto se $\nu^+(E) < \infty$, che implica chiaramente $\nu^+(F) < \infty$, cioè $\nu(F) < \infty$.

Definizione 7.14. Sia ν una misura con segno su X e sia (ν^+, ν^-) la sua decomposizione di Jordan. Le misure ν^\pm sono chiamate, rispettivamente, la “variazione positiva e negativa” di ν , mentre:

$$|\nu| = \nu^+ + \nu^-\tag{7.2}$$

è chiamata la “variazione totale” di ν . Diremo che la misura con segno ν è σ -finita (rispettivamente, finita) se così è la sua variazione totale $|\nu|$.

Osserviamo che se (P, Q) è una decomposizione di Hahn di X rispetto a ν , si ha:

$$\nu(E) = \int_E (\chi_P - \chi_Q) d|\nu|$$

per ogni $E \subseteq X$ misurabile.

Proposizione 7.15. *Sia ν una misura con segno su X e sia $N \subseteq X$ un insieme misurabile. Allora ν è un insieme nullo per ν se e soltanto se $|\nu|(N) = 0$.*

Dimostrazione. Supponiamo $|\nu|(N) = 0$. Allora:

$$\nu^\pm(N) \leq |\nu|(N) = 0.$$

Di conseguenza, se $E \subseteq N$ è misurabile, si ha:

$$\nu^\pm(E) \leq \nu^\pm(N) = 0$$

e quindi $\nu(E) = 0$. Quindi N è un insieme nullo.

Viceversa, se N è un insieme nullo, allora:

$$\nu^+(N) = \nu(N \cap P) = 0,$$

$$\nu^-(N) = -\nu(N \cap Q) = 0.$$

Quindi:

$$|\nu|(N) = \nu^+(N) + \nu^-(N) = 0,$$

come volevasi dimostrare. □

Proposizione 7.16. *Sia $f \in L^1(\mu)$ una funzione reale, e sia ν la misura reale definita da:*

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu.$$

Allora:

$$\nu^\pm(E) = \int_E f^\pm \, d\mu$$

e quindi:

$$|\nu|(E) = \int_E |f| \, d\mu.$$

Dimostrazione. Basta notare che:

$$P = \{x | f(x) \geq 0\}, \quad Q = \{x | f(x) < 0\}$$

è una decomposizione di Hahn di X rispetto a ν e che:

$$\nu^+(E) = \nu(E \cap P) = \int_{E \cap P} f \, d\mu = \int_E \chi_P f \, d\mu = \int_E f^+ \, d\mu,$$

$$\nu^-(E) = \nu(E \cap Q) = \int_{E \cap Q} f \, d\mu = \int_E \chi_Q f \, d\mu = \int_E f^- \, d\mu.$$

□

Esempio 7.17 (Esempio di misure mutuamente singolari.). Sia $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ la funzione definita da

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ f(x) & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

dove f è la funzione di Cantor-Vitali. Sia λ_F la misura di Stieltjes associata ad F . Questa misura è concentrata sull'insieme di Cantor ed è pertanto singolare rispetto alla misura di Lebesgue. Infatti, se C_n è l'insieme ottenuto all' n -esima trisezione dell'intervallo $[0, 1]$, allora $\mathbb{R} \setminus C_n$ è un'unione di intervalli aperti, su ciascuno dei quali F è costante. Poichè F è anche continua (poichè f è continua e $f(0) = 0, f(1) = 1$), ciascuno di questi intervalli ha misura nulla, da cui segue $\lambda_F(\mathbb{R} \setminus C_n) = 0$. Di conseguenza:

$$\lambda_F(\mathbb{R} \setminus C) = \lambda_F(\cup_n (\mathbb{R} \setminus C_n)) = 0.$$

Anticipando uno degli argomenti seguenti, osserviamo che λ_F è un esempio di misura continua, ma non assolutamente continua, rispetto alla misura di Lebesgue.

7.3 Teorema di Radon-Nikodym

Definizione 7.18. Sia ν una misura su X (con segno o complessa) e sia μ una misura positiva su X . Diciamo che ν è *assolutamente continua* rispetto a μ se $\mu(E) = 0$ implica $\nu(E) = 0$. In questo caso, scriviamo:

$$\nu \ll \mu.$$

Osservazione 7.19. Notiamo che, se ν è una misura con segno, la condizione $\nu \ll \mu$ è equivalente a $|\nu| \ll \mu$. Infatti, se $\nu \ll \mu$ e $\mu(N) = 0$, allora N è un insieme nullo per ν e, per la Proposizione 7.15, $|\nu|(N) = 0$. Quindi $\nu \ll \mu$ implica $|\nu| \ll \mu$, e il viceversa segue dall'ovvia relazione

$$\nu \ll |\nu|.$$

Proposizione 7.20. *Sia ν una misura su X (con segno o complessa) finita. Se μ è una misura positiva, allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) $\nu \ll \mu$.

(ii) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che, se $E \subseteq X$ è misurabile e $\mu(E) < \delta$, allora $|\nu(E)| < \varepsilon$.

Osservazione 7.21. Osserviamo che, se ν è una misura complessa, allora ν è automaticamente finita. Come si vede dalla dimostrazione, (ii) \implies (i) anche se ν non è finita. D'altra parte, l'implicazione (i) \implies (ii) non vale in generale per misure non limitate. Si consideri ad esempio la misura:

$$\nu(E) = \int_E \frac{dt}{t},$$

dove $E \subseteq (0, 1)$ è Lebesgue-misurabile.

Dimostrazione. Poichè $\nu \ll \mu$ se e soltanto se $|\nu| \ll \mu$ e, poichè la (ii) con $|\nu|$ al posto di ν implica chiaramente la (ii), possiamo direttamente assumere che ν sia una misura positiva.

Supponiamo che valga la (ii). Se $\mu(E) = 0$, allora $\mu(E) < \delta$ per ogni $\delta > 0$, per cui si ha necessariamente:

$$\nu(E) = 0,$$

da cui $\nu \ll \mu$.

Supponiamo invece che non valga (ii). Ciò significa che esiste un $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ esiste un $E_\delta \subseteq X$ misurabile che soddisfa:

$$\mu(E_\delta) < \delta, \quad \nu(E_\delta) \geq \varepsilon.$$

Per $n = 1, 2, \dots$, poniamo $F_n = E_{2^{-n}}$ e sia:

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq k} F_n.$$

Notiamo che:

$$\mu\left(\bigcup_{n \geq k} F_n\right) \leq \sum_{n=k}^{\infty} \mu(F_n) = 2^{-(k-1)},$$

per cui:

$$\mu(F) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{n \geq k} F_n\right) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=k}^{\infty} \mu(F_n) = 0.$$

D'altra parte, poichè:

$$\nu\left(\bigcup_{n \geq 1} F_n\right) \leq \nu(X) < \infty,$$

si ha:

$$\nu(F) = \lim_{k \rightarrow \infty} \nu\left(\bigcup_{n \geq k} F_n\right) \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \nu(F_k) \geq \varepsilon.$$

Quindi, se non vale (ii), allora ν non è assolutamente continua rispetto a μ . Il teorema è dimostrato. \square

Lemma 7.22. *Siano μ e ν misure positive finite su X . Allora $\mu \perp \nu$, oppure esistono un $\varepsilon > 0$ e un $E \subseteq X$ misurabile tali che $\mu(E) > 0$ ed E è un insieme positivo per la misura $\nu - \varepsilon\mu$.*

Osservazione 7.23. Notiamo che l' "oppure" del teorema è esclusivo. Infatti, se μ è concentrata in A , ν è concentrata in B e $A \cap B = \emptyset$, allora $\mu(E) = \mu(E \cap A)$ per ogni $E \subseteq X$ misurabile. Quindi, se $\mu(E) > 0$:

$$\nu(E \cap A) - \varepsilon\mu(E \cap A) < 0$$

per ogni $\varepsilon > 0$, per cui E non può essere un insieme positivo per nessuna delle misure $\nu - \varepsilon\mu$.

Dimostrazione. Per ogni $n = 1, 2, \dots$, poniamo:

$$\nu_n = \nu - \frac{1}{n}\mu.$$

Allora esistono delle decomposizioni di Hahn (P_n, Q_n) di X rispetto a ν_n . Poniamo:

$$P = \cup_n P_n, \quad Q = X \setminus P = \cap_n Q_n.$$

Poichè $Q \subseteq Q_n$, si ha che Q è un insieme negativo per ogni ν_n . Ciò significa che:

$$0 \leq \nu(Q) \leq \frac{1}{n}\mu(Q)$$

per ogni $n = 1, 2, \dots$, da cui segue che $\nu(Q) = 0$.

Quindi ν è concentrata in P . Se ora $\mu(P) = 0$, allora $\mu \perp \nu$. Altrimenti, esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che $\mu(P_n) > 0$. Poichè P_n è un insieme positivo per ν_n , segue la tesi con $E = P_n$, $\varepsilon = \frac{1}{n}$. \square

Teorema 7.24 (Teorema di Radon-Nikodym). *Sia μ una misura positiva σ -finita su X , ν una misura con segno σ -finita su X (oppure una misura complessa su X).*

(i) *Esiste un'unica coppia di misure con segno σ -finite (λ, ρ) tale che:*

$$\nu = \rho + \lambda, \tag{7.3}$$

$$\rho \ll \mu,$$

$$\lambda \perp \mu.$$

Inoltre ρ e λ sono positive se lo è ν .

(ii) *Se ν è finita, esiste una $f \in L^1(\mu)$, unica a meno di equivalenza $[\mu]$, tale che:*

$$\rho(E) = \int_E f d\mu, \tag{7.4}$$

per ogni $E \subseteq X$ misurabile. Inoltre, f è positiva quasi ovunque $[\mu]$ se ρ è positiva.

(iii) *Se ν è positiva e σ -finita vale ancora (ii), ma f non è necessariamente in $L^1(\mu)$.*

Osservazione 7.25. La decomposizione (7.3) di ν , è chiamata decomposizione di Radon-Nikodym. Chiaramente, se $\nu \ll \mu$ oppure $\nu \perp \mu$, allora $\nu = \rho$ e $\nu = \lambda$ rispettivamente. La f nella (7.4) è nota come derivata di Radon-Nikodym di ρ rispetto a μ e si indica talvolta con:

$$f = \frac{d\rho}{d\mu}.$$

Dimostrazione. Mostriamo innanzitutto l'unicità di ρ , λ e f . Se ν è finita, allora da:

$$\rho_1 + \lambda_1 = \nu = \rho_2 + \lambda_2$$

segue:

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \rho_2 - \rho_1.$$

Il membro destro è assolutamente continuo rispetto a μ , mentre il membro sinistro è singolare rispetto a μ . Ne segue che $\lambda_1 = \lambda_2$, $\rho_1 = \rho_2$.

Supponiamo che ν sia σ -finita e

$$X = \cup_n X_n, \quad |\nu|(X_n) < \infty,$$

dove $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots$. Se:

$$\rho_1 + \lambda_1 = \nu = \rho_2 + \lambda_2,$$

definiamo, per $i = 1, 2$:

$$\nu^{(n)} \equiv \nu(\cdot \cap X_n),$$

$$\rho_i^{(n)} \equiv \rho_i(\cdot \cap X_n),$$

$$\lambda_i^{(n)} \equiv \lambda_i(\cdot \cap X_n).$$

Chiaramente, ciascuna misura $\nu^{(n)}$ è finita e:

$$\rho_1^{(n)} + \lambda_1^{(n)} = \nu^{(n)} = \rho_2^{(n)} + \lambda_2^{(n)},$$

$$\rho_i^{(n)} \ll \nu^{(n)}$$

$$\lambda_i^{(n)} \perp \nu^{(n)}$$

per $i = 1, 2$. Quindi:

$$\rho_1^{(n)} = \rho_2^{(n)}, \quad \lambda_1^{(n)} = \lambda_2^{(n)}.$$

Per ogni $E \subseteq X$ misurabile si ha, per continuità dal basso:

$$\rho_1(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_1^{(n)}(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_2^{(n)}(E) = \rho_2(E)$$

$$\lambda_1(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1^{(n)}(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_2^{(n)}(E) = \lambda_2(E)$$

e l'unicità della coppia (ρ, λ) è dimostrata anche nel caso σ -finito. Infine, se f_1, f_2 soddisfano la (7.4), allora:

$$\int_E f_1 d\mu = \rho(E) = \int_E f_2 d\mu$$

per ogni $E \subseteq X$ misurabile. Poichè $\rho(X_n) < \infty$, da ciò segue $f_1(x) = f_2(x)$ quasi ovunque $[\mu]$ in X_n , ovvero $f_1(x) = f_2(x)$ quasi ovunque $[\mu]$ in $X = \cup_n X_n$.

Dimostriamo ora l'esistenza della decomposizione (7.3), iniziando dal caso in cui entrambe μ, ν siano positive e finite. Poniamo:

$$\mathcal{G} = \left\{ g: X \rightarrow [0, \infty] \text{ misurabile} \mid \int_E g d\mu \leq \nu(E) \forall E \subseteq X \text{ misurabile} \right\}.$$

Poichè $0 \in \mathcal{G}$, la famiglia \mathcal{G} è non vuota. Inoltre, se $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ allora $\max\{g_1, g_2\} \in \mathcal{G}$. Infatti, per ogni $E \subseteq X$ misurabile si ha:

$$\begin{aligned} \int_E \max\{g_1, g_2\} d\mu &= \int_{E \cap \{g_1(x) \geq g_2(x)\}} g_1 d\mu + \int_{E \cap \{g_1(x) < g_2(x)\}} g_2 d\mu \\ &\leq \nu(E \cap \{g_1(x) \geq g_2(x)\}) + \nu(E \cap \{g_1(x) < g_2(x)\}) \\ &= \nu(E). \end{aligned}$$

Per induzione, si vede quindi che se $g_1, g_2, \dots, g_n \in \mathcal{G}$, allora:

$$\max\{g_1, g_2, \dots, g_n\} \in \mathcal{G}.$$

Sia ora:

$$\sup_{g \in \mathcal{G}} \int_X g d\mu = a$$

e sia $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{G}$ una successione tale che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\mu = a.$$

Poichè $\max\{g_1, g_2, \dots, g_n\} \in \mathcal{G}$, possiamo direttamente supporre che:

$$g_n \leq g_{n+1}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sia:

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n.$$

Allora f è misurabile e, dal teorema della convergenza monotona:

$$\int_X f d\mu = a.$$

In particolare, poichè $a \leq \nu(X) < \infty$, si ha $f \in L^1(\mu)$. Inoltre $f \in \mathcal{G}$ in quanto, per ogni $E \subseteq X$ misurabile:

$$\int_E f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n d\mu \leq \nu(E).$$

Di conseguenza, possiamo definire una misura λ tramite:

$$\lambda(E) = \nu(E) - \int_E f d\mu,$$

la quale, per costruzione, risulta essere positiva. Supponiamo che esistano un $\varepsilon > 0$ e un $F \subseteq X$ misurabile tali che $\mu(F) > 0$ ed F è un insieme positivo per la misura $\lambda - \varepsilon\mu$ e consideriamo la funzione:

$$h = f + \varepsilon\chi_F.$$

Per ogni $E \subseteq X$ misurabile si ha:

$$\nu(E \cap F) = \lambda(E \cap F) + \int_{E \cap F} f d\mu \geq \varepsilon\mu(F) + \int_{E \cap F} f d\mu$$

per cui:

$$\begin{aligned} \int_E (f + \varepsilon\chi_F) d\mu &= \int_E f d\mu + \varepsilon\mu(E \cap F) \\ &= \int_{E \setminus F} f d\mu + \int_{E \cap F} f d\mu + \varepsilon\mu(E \cap F) \\ &\leq \nu(E \setminus F) + \nu(E \cap F) \\ &= \nu(E). \end{aligned}$$

Quindi $f + \varepsilon\chi_F \in \mathcal{G}$. Ma, poichè $a < \infty$:

$$\int_X (f + \varepsilon\chi_F) d\mu = a + \varepsilon\mu(F) > a,$$

e ciò contraddice la definizione di a . Dal Lemma 7.22 segue ora che:

$$\lambda \perp \mu$$

e, poichè la misura ρ è definita da:

$$\rho(E) = \int_E f \, d\mu$$

è chiaramente assolutamente continua rispetto a μ e $f \in L^1(\mu)$, otteniamo la (i) e la (ii) nel caso di ν e μ positive e finite.

Se ora μ è σ -finita, esistono degli insiemi misurabili disgiunti $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ tali che:

$$X = \cup_n X_n, \quad \mu(X_n) < \infty,$$

Se le misure $\mu^{(n)}$ e $\nu^{(n)}$ sono definite come sopra, per quanto già visto possiamo scrivere:

$$\nu^{(n)} = \rho^{(n)} + \lambda^{(n)},$$

dove:

$$\begin{aligned} \rho^{(n)} &\ll \mu^{(n)}, \\ \lambda^{(n)} &\perp \mu^{(n)}. \end{aligned}$$

Poichè $\mu^{(n)} \ll \mu$ e $\lambda^{(n)}$ è concentrata in X_n , si vede facilmente che:

$$\begin{aligned} \rho^{(n)} &\ll \mu, \\ \lambda^{(n)} &\perp \mu. \end{aligned}$$

Se $f^{(n)} = \frac{d\rho^{(n)}}{d\mu}$, possiamo chiaramente supporre f positiva ovunque e tale che

$$f^{(n)}(x) = 0 \quad \forall x \in X \setminus X_n.$$

Definiamo:

$$f = \sum_n f^{(n)}.$$

Poniamo:

$$\rho(E) = \int_E f \, d\mu$$

per ogni $E \subseteq X$ misurabile. Per il teorema della convergenza monotona:

$$\rho(E) = \sum_n \rho^{(n)}(E) \leq \sum_n [\rho^{(n)}(E) + \lambda^{(n)}(E)] = \sum_n \nu^{(n)}(E) = \nu(E) < \infty,$$

da cui segue in particolare $f \in L^1(\mu)$. Se inoltre, λ è definita da:

$$\lambda(E) = \sum_n \lambda^{(n)}(E),$$

si ha chiaramente $\lambda(\emptyset) = 0$ e

$$\lambda(\cup_k E_k) = \sum_n \lambda^{(n)}(\cup_k E_k) = \sum_n \sum_k \lambda^{(n)}(E_k) = \sum_k \sum_n \lambda^{(n)}(E_k) = \sum_k \lambda(E_k)$$

per cui λ è una misura. Inoltre è singolare rispetto a μ , in quanto ogni $\lambda^{(n)}$ è concentrata su un insieme E_n tale che $\mu(E_n) = 0$, per cui λ è concentrata su $\cup_n E_n$ e $\mu(\cup_n E_n) = 0$. Ciò dimostra il teorema nel caso in cui ν è finita e positiva, e μ è σ -finita e positiva.

Se ora ν è σ -finita e positiva, senza perdita di generalità possiamo supporre:

$$\nu(X_n) < \infty$$

per ogni $n = 1, 2, \dots$. Possiamo scrivere, come sopra:

$$\nu^{(n)} = \rho^{(n)} + \lambda^{(n)},$$

dove:

$$\begin{aligned}\rho^{(n)} &\ll \mu, \\ \lambda^{(n)} &\perp \mu, \\ d\rho^{(n)} &= f^{(n)} d\mu.\end{aligned}$$

Se definiamo:

$$\begin{aligned}\lambda &= \sum_n \lambda^{(n)} \\ f &= \sum_n f^{(n)} \\ \rho &= f d\mu\end{aligned}$$

otteniamo facilmente la (iii).

Avendo dimostrato il teorema per una misura positiva e σ -finita ν , otteniamo facilmente l'estensione a una ν con segno tramite la decomposizione di Jordan, oppure a una ν complessa, applicando la decomposizione separatamente alla parte reale e immaginaria di ν . \square

8 Differenziabilità

In questo capitolo denotiamo con λ la misura di Lebesgue su \mathbb{R}^N .

8.1 Differenziazione di misure

8.1.1 Motivazione

Proposizione 8.1. *Sia μ una misura di Borel complessa su \mathbb{R} e sia*

$$f(x) \equiv \mu((-\infty, x)).$$

Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (i) f è differenziabile in x e $f'(x) = A$.
- (ii) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che:

$$\left| \frac{\mu(I)}{\lambda(I)} - A \right| < \varepsilon$$

se I è un intervallo aperto con $x \in I$ e $\lambda(I) < \delta$.

Dimostrazione. Notiamo che, a meno di sostituire μ con $\mu - A \cdot \lambda_0$, dove λ_0 è la misura di Lebesgue ristretta a un intervallo limitato I_0 contenente x , possiamo supporre $A = 0$ in entrambe (i) e (ii).

Supponiamo che valga (i) con $A = 0$. Fissato $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che:

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon |x - y|$$

se $|x - y| < \delta$. Se $s < x < t < s + \delta$, allora:

$$\left| f(t) - f\left(s + \frac{1}{n}\right) \right| \leq |f(t) - f(x)| + \left| f(x) - f\left(s + \frac{1}{n}\right) \right| \leq \varepsilon \left| t - \left(s + \frac{1}{n}\right) \right|,$$

e quindi

$$|\mu((s, t))| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \mu\left(s + \frac{1}{n}, t\right) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| f(t) - f\left(s + \frac{1}{n}\right) \right| \leq \varepsilon |t - s|.$$

Ne segue la (ii).

Viceversa, supponiamo che valga la (ii) con $A = 0$, fissiamo $\varepsilon > 0$ e scegliamo $\delta > 0$ tale che $|\mu(I)| < \varepsilon m(I)$ se $m(I) < \delta$. Se $s < x < t < s + \delta$, abbiamo definitivamente

$$s - \frac{1}{n} < x < t < s - \frac{1}{n} + \delta,$$

per cui:

$$\left| \mu\left(s - \frac{1}{n}, t\right) \right| < \varepsilon \left(t - s + \frac{1}{n}\right).$$

Pertanto:

$$|f(t) - f(s)| = |\mu([s, t])| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \mu\left(s - \frac{1}{n}, t\right) \right| \leq \varepsilon(t - s)$$

se $s < x < t < s + \delta$. D'altra parte, dalla (ii) segue che $\mu(\{x\}) = 0$, per cui f è continua in x . Dalla precedente si ha allora:

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon |x - y|$$

non appena $|x - y| < \delta$, da cui segue la (i). □

8.1.2 Definizioni

Definizione 8.2. Una collezione Ω di aperti di \mathbb{R}^N si dice una famiglia sostanziale se:

(a) Esiste una costante $\beta < \infty$ tale che, per ogni $E \in \Omega$, esiste una palla aperta $B \subset \mathbb{R}^N$ che soddisfa:

$$E \subseteq B, \quad \lambda(B) < \beta \cdot \lambda(E).$$

(b) Per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e ogni $\delta > 0$ esiste un $E \in \Omega$ tale che:

$$x \in E, \quad \text{diam}E < \delta.$$

Osservazione 8.3. Osserviamo che, se $\lambda(B_1)$ è il volume della palla di raggio unitario in \mathbb{R}^N , allora da (a) segue:

$$\lambda(E) \leq \lambda(B_1)(\text{diam}E)^N < \beta \cdot \lambda(E),$$

ovvero il volume di E tende a zero se e solo tende a zero il suo diametro.

Definizione 8.4. Sia μ una misura di Borel complessa su \mathbb{R}^N e Ω una famiglia sostanziale. Diciamo che μ è differenziabile in x rispetto alla famiglia Ω se esiste un numero complesso $(D_\Omega\mu)(x)$ con la seguente proprietà: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che

$$\left| \frac{\mu(E)}{\lambda(E)} - (D_\Omega\mu)(x) \right| < \varepsilon$$

per ogni $E \in \Omega$ con $\text{diam}E < \delta$.

Proposizione 8.5. Sia Ω una famiglia sostanziale in \mathbb{R}^N , sia $A = \bigcup_{i=1}^M E_i$ dove $E_i \in \Omega$. Allora esiste un sottoinsieme $\{i_1, i_2, \dots, i_L\} \subseteq \{1, 2, \dots, M\}$ tale che:

$$E_i \cap E_j = \emptyset$$

per $i \neq j$ e:

$$\lambda(A) \leq \beta \cdot 3^N \cdot \lambda\left(\bigcup_{k=1}^L E_{i_k}\right),$$

dove β è la costante che entra nella definizione di Ω .

Dimostrazione. Senza perdita di generalità, possiamo supporre:

$$\text{diam}E_1 \geq \text{diam}E_2 \geq \dots \geq \text{diam}E_M.$$

Sia $i_1 = 1$, e sia i_2 il più piccolo intero maggiore di 1 tale che $E_{i_2} \cap E_{i_1} = \emptyset$. Sia i_3 il più piccolo intero maggiore di i_2 tale che $E_{i_3} \cap (E_{i_1} \cup E_{i_2}) = \emptyset$ e così via. Questa costruzione si ferma necessariamente in $1 \leq L \leq M$ passi. Per ogni $1 \leq k \leq L$, esiste una palla aperta B_k tale che:

$$E_{i_k} \subseteq B_k, \quad \lambda(B_k) < \beta \cdot \lambda(E_{i_k}).$$

Indichiamo con V_k la palla avente lo stesso centro di B_k , ma un diametro tre volte maggiore. Per costruzione:

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^L V_k.$$

Infatti, ad ogni E_i corrisponde almeno un $i_k \leq i$ tale che $E_{i_k} \cap E_i \neq \emptyset$ e, in tal caso, $E_i \subseteq V_k$. Quindi:

$$\lambda(A) \leq \lambda\left(\bigcup_{k=1}^L V_k\right) = \sum_{k=1}^L \lambda(V_k) = 3^N \sum_{k=1}^L \lambda(B_k) \leq 3^N \cdot \beta \cdot \sum_{k=1}^L \lambda(E_{i_k}).$$

□

8.1.3 Punti di Lebesgue

Lemma 8.6. *Supponiamo che μ sia una misura reale. Definiamo*

$$\begin{aligned}(\overline{D}_\Omega\mu)(x) &= \limsup_{r \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{\mu(E)}{\lambda(E)} \mid x \in E, E \in \Omega, \lambda(E) < r \right\}, \\(\underline{D}_\Omega\mu)(x) &= \liminf_{r \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{\mu(E)}{\lambda(E)} \mid x \in E, E \in \Omega, \lambda(E) < r \right\}.\end{aligned}$$

Valgono le seguenti proprietà:

- (i) $(\underline{D}_\Omega\mu)(x) \leq (\overline{D}_\Omega\mu)(x)$.
- (ii) $(D_\Omega\mu)(x)$ esiste se e soltanto se $-\infty < (\underline{D}_\Omega\mu)(x) = (\overline{D}_\Omega\mu)(x) < \infty$.
- (iii) Se $\mu = \mu_1 + \mu_2$, dove μ_1 e μ_2 sono entrambe positive, allora:

$$\begin{aligned}(\overline{D}_\Omega\mu)(x) &\leq (\overline{D}_\Omega\mu_1)(x) + (\overline{D}_\Omega\mu_2)(x), \\(\underline{D}_\Omega\mu)(x) &\geq (\underline{D}_\Omega\mu_1)(x) + (\underline{D}_\Omega\mu_2)(x),\end{aligned}$$

a meno che i membri destri non siano della forma indeterminata $\infty - \infty$. In particolare, se μ_1 e μ_2 sono differenziabili in x , allora anche μ lo è, e vale:

$$(D_\Omega\mu)(x) = (D_\Omega\mu_1)(x) + (D_\Omega\mu_2)(x).$$

- (iv) $\overline{D}_\Omega\mu$ e $\underline{D}_\Omega\mu$ sono funzioni boreliane.

Dimostrazione. La (i) e la (ii) sono ovvie. La (iii) è ovvia se uno dei membri destri è ∞ , per cui possiamo limitarci al caso:

$$\begin{aligned}(\overline{D}_\Omega\mu_1)(x) &< \infty, \\(\overline{D}_\Omega\mu_2)(x) &< \infty.\end{aligned}$$

Se $(\overline{D}_\Omega\mu_1)(x) < A_1$ e $(\overline{D}_\Omega\mu_2)(x) < A_2$, allora esiste un $r > 0$ tale che:

$$\begin{aligned}\frac{\mu_1(E)}{\lambda(E)} &< A_1 \\ \frac{\mu_2(E)}{\lambda(E)} &< A_2\end{aligned}$$

se $x \in E$, $E \in \Omega$ e $\lambda(E) < r$. Di conseguenza:

$$\frac{\mu(E)}{\lambda(E)} = \frac{\mu_1(E) + \mu_2(E)}{\lambda(E)} < A_1 + A_2$$

per tali $E \in \Omega$, e ciò mostra che vale la prima disuguaglianza in (iii). Per la seconda si procede in modo analogo. Infine, nel caso in cui μ_1 e μ_2 siano entrambe differenziabili in x , da (i) e (ii) segue che:

$$(D_\Omega\mu_1)(x) + (D_\Omega\mu_2)(x) \leq (\underline{D}_\Omega\mu)(x) \leq (\overline{D}_\Omega\mu)(x) \leq (D_\Omega\mu_1)(x) + (D_\Omega\mu_2)(x),$$

il che completa la dimostrazione di (iii).

Per provare la (iv), notiamo che $\overline{D}_\Omega\mu$ è il limite puntuale di:

$$\Delta_n(x) = \sup \left\{ \frac{\mu(E)}{\lambda(E)} \mid x \in E, E \in \Omega, \lambda(E) < \frac{1}{n} \right\}.$$

Si vede facilmente che ogni Δ_n è boreliana. Infatti, se $\alpha \in \mathbb{R}$, da $\Delta_n(x) > \alpha$ segue che:

$$\frac{\mu(E)}{\lambda(E)} > \alpha$$

per qualche $E \in \Omega$ con $x \in E$ e $\lambda(E) < \frac{1}{n}$. Ma allora, per ogni $y \in E$ si ha:

$$\Delta_n(y) > \alpha.$$

Poichè E è aperto, abbiamo dimostrato che:

$$\Delta_n^{-1}((\alpha, \infty))$$

è aperto, ovvero Δ_n è semicontinua inferiormente, e quindi boreliana. \square

Lemma 8.7. *Sia μ una misura reale positiva, A un insieme boreliano tale che $\mu(A) = 0$. Allora $(D_\Omega\mu)(x) = 0$ per quasi ogni $x \in A$ $[\lambda]$.*

Dimostrazione. Consideriamo l'insieme:

$$E = \{x \in A, (\overline{D}_\Omega\mu)(x) > 0\}.$$

Se dimostriamo che $\lambda(E) = 0$ abbiamo finito, in quanto, in tal caso, per ogni $x \notin E$ si ha:

$$0 \leq (\underline{D}_\Omega\mu)(x) \leq (\overline{D}_\Omega\mu)(x) = 0.$$

Poichè $E = \cup_n E_n$, dobbiamo dimostrare che $\lambda(E_n) = 0$, dove:

$$E_n = \left\{ x \in A, (\overline{D}_\Omega\mu)(x) > \frac{1}{n} \right\}.$$

Supponiamo per assurdo che sia $\lambda(E_n) > 0$ per qualche n . Esiste allora un compatto $K \subseteq E_n$ tale che $\lambda(K) > 0$. Fissato un $\delta > 0$, esistono un numero finito di aperti in Ω di diametro inferiore a δ ricoprenti K . Per il Lemma 8.5, esiste una sottofamiglia finita disgiunta $E_1^\delta, E_2^\delta, \dots, E_{M(\delta)}^\delta$ tale che:

$$\lambda(E_1^\delta \cup E_2^\delta \cup \dots \cup E_{M(\delta)}^\delta) \geq \frac{1}{3^N \cdot \beta} \lambda(K).$$

Inoltre, per costruzione, si ha $E_i^\delta \subseteq K_\delta$, dove $K_\delta = \{x | d(x, K) < \delta\}$. Perciò:

$$\mu(K_\delta) \geq \mu(E_1^\delta \cup E_2^\delta \cup \dots \cup E_{M(\delta)}^\delta) = \sum_{i=1}^{M(\delta)} \mu(E_i^\delta) \geq \alpha \sum_{i=1}^{M(\delta)} \lambda(E_i^\delta) \geq \frac{1}{3^N \cdot \beta} \lambda(K),$$

dove

$$\alpha = \max_{i=1,2,\dots,M(\delta)} \frac{\mu(E_i^\delta)}{\lambda(E_i^\delta)} > 0.$$

Notando ora che:

$$K = \cap_{m=1}^{\infty} K_{\frac{1}{m}}$$

si ha:

$$\mu(K) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(K_{\frac{1}{m}}) \geq \frac{1}{3^N \cdot \beta} \lambda(K).$$

Ma, poichè $K \subseteq A$ e $\mu(A) = 0$, siamo arrivati all'assurdo:

$$0 < \lambda(K) \leq 3^N \cdot \beta \cdot \mu(K) = 0.$$

Poichè l'assurdo deriva dall'ipotesi $\lambda(E_n) > 0$ per qualche n , per quanto visto sopra, segue la tesi. \square

Lemma 8.8. *Se $\mu \perp \lambda$, allora $(D_\Omega\mu)(x) = 0$ per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$ $[\lambda]$.*

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare il Lemma per μ reale. Inoltre, grazie alla decomposizione di Jordan, è sufficiente dimostrare il Lemma per μ reale e positiva. Per definizione, esiste un $A \subseteq \mathbb{R}^N$ tale che $\lambda(A^c) = 0$ e $\mu(A) = 0$. Per il Lemma precedente, $(D_\Omega\mu)(x) = 0$ quasi ovunque in A $[\lambda]$, ovvero per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$ $[\lambda]$. \square

Teorema 8.9. Sia μ una misura di Borel complessa su \mathbb{R}^N . Allora:

- (i) $(D_\Omega\mu)(x)$ esiste per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$ $[\lambda]$.
- (ii) $D_\Omega\mu \in L^1(\mathbb{R}^N)$
- (iii) Se $\mu = \mu_s + \mu_a$ è la decomposizione di Lebesgue di μ , allora

$$(D_\Omega\mu)(x) = \frac{d\mu_a}{d\lambda}(x) \quad \text{q.o. } [\lambda],$$

dove il membro destro è la derivata di Radon-Nikodym di μ_a . In altri termini:

$$\mu(E) = \mu_s(E) + \int_E (D_\Omega\mu) d\lambda$$

per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^N$ boreliano.

Dimostrazione. Per i lemmi precedenti, non vi è perdita di generalità nel considerare μ reale e assolutamente continua. In tal caso, dal teorema di Radon-Nikodym, esiste una $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ reale tale che:

$$\mu(E) = \int_E f d\lambda.$$

Vogliamo quindi dimostrare che si ha quasi ovunque:

$$(D_\Omega\mu)(x) = f(x).$$

Dato $r \in \mathbb{Q}$, poniamo:

$$A = \{f(x) < r\}, \quad B = \{f(x) \geq r\},$$

e:

$$\sigma(E) = \int_{E \cap B} (f(x) - r) d\lambda$$

per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^N$ boreliano. Se $E \in \Omega$, allora:

$$\mu(E) - r\lambda(E) \leq \int_{E \cap A} (f(x) - r) d\lambda + \sigma(E) \leq \sigma(E).$$

Poichè

$$(\overline{D}_\Omega\sigma)(x) = 0$$

per quasi ogni $x \in A$ $[\lambda]$, abbiamo dalla precedente:

$$(\overline{D}_\Omega\mu)(x) \leq r$$

per quasi ogni $x \in A$ $[\lambda]$. Questo significa che l'insieme:

$$E_r = \{f(x) < r < (\overline{D}_\Omega\mu)(x)\}$$

ha misura di Lebesgue nulla per ogni $r \in \mathbb{Q}$. Ma d'altra parte:

$$\{f(x) < (\overline{D}_\Omega\mu)(x)\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} E_r,$$

da cui concludiamo:

$$f(x) \geq (\overline{D}_\Omega\mu)(x)$$

per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$ $[\lambda]$.

Se si sostituisce μ con $-\mu$, e quindi f con $-f$, si ottiene:

$$(\underline{D}_\Omega\mu)(x) \geq f(x)$$

per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$ $[\lambda]$. Ciò dimostra la tesi. □

Teorema 8.10. Sia $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Allora:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup \left\{ \frac{1}{\lambda(E)} \int_E |f(y) - f(x)| \, d\lambda(y) \mid x \in E, E \in \Omega, \text{diam}E < \delta \right\} = 0 \quad (8.1)$$

per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$.

Osservazione 8.11. Per semplificare la dimostrazione, adotteremo la seguente notazione: scriveremo

$$\frac{1}{\lambda(E)} \int_E f \, d\lambda \rightarrow f(x) \quad (E \rightarrow \{x\})$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che $x \in E$, $E \in \Omega$ e $\text{diam}E < \delta$ implicano:

$$\left| \frac{1}{\lambda(E)} \int_E f \, d\lambda - f(x) \right| < \varepsilon.$$

La tesi del teorema (8.1), in questa notazione, equivale a:

$$\frac{1}{\lambda(E)} \int_E |f(y) - f(x)| \, d\lambda(y) \rightarrow 0 \quad (E \rightarrow \{x\})$$

per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$ $[\lambda]$.

Dimostrazione. Notiamo innanzitutto che, poichè l'enunciato è locale, non vi è perdita di generalità nel supporre $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Dal teorema precedente segue che se μ è la misura definita da:

$$\mu(E) = \int_E f \, d\lambda,$$

per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$ si ha:

$$f(x) = (D_\Omega \mu)(x),$$

ovvero:

$$\frac{1}{\lambda(E)} \int_E f \, d\lambda \rightarrow f(x) \quad (E \rightarrow \{x\})$$

per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$. Sia $\varepsilon > 0$ e sia $S \subseteq \mathbb{C}$ un sottoinsieme numerabile denso. Per ogni $r \in S$ esiste un insieme N_r di misura di Lebesgue nulla tale che, se $x \notin N_r$:

$$\frac{1}{\lambda(E)} \int_E |f - r| \, d\lambda \rightarrow |f(x) - r| \quad (E \rightarrow \{x\}).$$

Di conseguenza, se $N = \cup_r N_r$ e $x \notin N_r$, allora:

$$\frac{1}{\lambda(E)} \int_E |f - r| \, d\lambda \rightarrow |f(x) - r| \quad (E \rightarrow \{x\})$$

per ogni $r \in S$. Quindi se $x \notin N_r$ e $|f(x) - r| < \varepsilon$, si ha:

$$\frac{1}{\lambda(E)} \int_E |f(y) - f(x)| \, d\lambda(y) \leq \frac{1}{\lambda(E)} \int_E |f(y) - r| \, d\lambda(y) + \varepsilon.$$

Poichè:

$$\frac{1}{\lambda(E)} \int_E |f(y) - r| \, d\lambda(y) \rightarrow |f(x) - r| < \varepsilon,$$

dalla precedente otteniamo:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup \left\{ \frac{1}{\lambda(E)} \int_E |f(y) - f(x)| d\lambda(y) = 0 \mid x \in E, E \in \Omega, \text{diam}E < \delta \right\} \leq 2\varepsilon$$

e, poichè $\varepsilon > 0$ è arbitrario, ne segue la tesi. \square

Corollario 8.12. *Se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, allora:*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda(B_r(x))} \int_{B_r(x)} f(y) d\lambda(y) = f(x) \quad \text{q.o. } [\lambda]$$

Osservazione 8.13. Se $f = \chi_E$, dove $E \subseteq \mathbb{R}^N$ è misurabile, allora il Corollario 8.12 dice che:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\lambda(E \cap B_r(x))}{\lambda(B_r(x))} = \chi_E(x) \quad \text{q.o. } [\lambda].$$

In particolare, per quasi ogni $x \in E$ si ha:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\lambda(E \cap B_r(x))}{\lambda(B_r(x))} = 1. \quad (8.2)$$

Un punto $x \in E$ che soddisfi la (8.2) è detto un punto di “densità uno” per E . Similmente, per quasi ogni $x \notin E$ si ha:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\lambda(E \cap B_r(x))}{\lambda(B_r(x))} = 0. \quad (8.3)$$

Chiaramente, se $x \in \text{int}E$ allora vale la (8.2), mentre se $x \in \text{est}E$ vale la (8.3). Tuttavia, possiamo facilmente trovare, ad esempio, un insieme di misura non nulla e interno vuoto (un esempio è fornito dal complementare in $[0, 1]$ dell’insieme di Cantor). Per un tale insieme, si vede che la (8.2) fornisce un’utile generalizzazione, dal punto di vista della teoria della misura, dell’interno di un insieme.

8.2 Funzioni non decrescenti

Proposizione 8.14. *Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione non decrescente. Allora f è boreliana.*

Dimostrazione. Sia $a \in \mathbb{R}$. Se $f(x) < a$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora:

$$f^{-1}((-\infty, a)) = \mathbb{R}.$$

Altrimenti poniamo:

$$t = \inf \{x \mid f(x) \geq a\}.$$

Se $t = -\infty$, allora $f(x) \geq a$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, ovvero:

$$f^{-1}((-\infty, a)) = \emptyset.$$

Altrimenti:

$$f^{-1}((-\infty, a)) = \begin{cases} (-\infty, t) & \text{se } f(t) \geq a, \\ (-\infty, t] & \text{se } f(t) < a. \end{cases}$$

In ogni caso, si vede che $f^{-1}((-\infty, a))$ è boreliano per ogni $a \in \mathbb{R}$, e ciò è sufficiente a dimostrare che f è boreliana. \square

Teorema 8.15. *Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione non decrescente. Allora f è derivabile quasi ovunque, f' definisce quasi ovunque una funzione misurabile positiva e:*

$$\int_a^b f'(t) dt \leq f(b) - f(a). \quad (8.4)$$

Dimostrazione. Per la dimostrazione della derivabilità di f , si veda Kolmogorov A.N., “Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale”, pagg. 319-325.

Poniamo:

$$f(x) = \begin{cases} f(b) & x > b, \\ f(a) & x < a. \end{cases}$$

Assumendo la derivabilità di f , per la Proposizione 5.33, esiste una g misurabile tale che $f'(t) = g(t)$ quasi ovunque in \mathbb{R} . Poiché la misura di Lebesgue è completa, f' definisce quasi ovunque una funzione Lebesgue misurabile e l'integrale (8.4) è ben definito. Inoltre, è chiaro che, se f è derivabile in x :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

Supponiamo che $N \subseteq \mathbb{R}$ sia tale che $\lambda(N) = 0$ e f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus N$. Definiamo

$$h_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in N, \\ n [f(x + \frac{1}{n}) - f(x)] & x \in \mathbb{R} \setminus N. \end{cases}$$

Il lemma di Fatou mostra che:

$$\int_a^b f'(t) dt \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b h_n(t) dt.$$

Ma:

$$\int_a^b h_n(t) dt = n \int_a^b \left\{ f\left(t + \frac{1}{n}\right) - f(t) \right\} dt = n \left\{ \int_b^{b+\frac{1}{n}} f(t) dt - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(t) dt \right\} \leq f\left(b + \frac{1}{n}\right) - f(a) = f(b) - f(a),$$

da cui segue la (8.4). □

Esempio 8.16. La funzione di Cantor $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ è differenziabile quasi ovunque con $f'(t) = 0$. Si ha:

$$\int_0^1 f'(t) dt = 0 \leq 1 = f(1) - f(0).$$

8.3 Funzioni a variazione limitata

Definizione 8.17. Una funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice a variazione limitata (sull'intervallo $[a, b]$) se:

$$V_a^b [f] \equiv \sup_P \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| < \infty, \tag{8.5}$$

dove il sup è preso su tutte le partizioni $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ dell'intervallo $[a, b]$.

Osservazione 8.18. Sono funzioni a variazione limitata su un qualsiasi intervallo limitato $[a, b]$:

1. Le funzioni non decrescenti, per le quali $V_a^b [f] = f(b) - f(a)$.
2. Le funzioni Lipschitziane, per le quali $V_a^b [f] \leq L(b - a)$.
3. Le funzioni della forma $\chi_{[c, \infty)}$, per le quali $V_a^b [f] = 1$ se $c \in (a, b)$, $V_a^b [f] = 0$ altrimenti.

L'esempio seguente mostra che una funzione continua (e quindi uniformemente continua su ciascun intervallo $[a, b]$) non è necessariamente a variazione limitata.

Esempio 8.19. Consideriamo la funzione $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x) = \begin{cases} x \cos\left(\frac{\pi}{2x}\right) & 0 < x \leq 1, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Consideriamo la successione di partizioni:

$$P^{(n)} = \left\{ 0 < \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1} < \dots < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1 \right\}.$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned} V_0^1[f] &\geq \left| f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right) \right| + \left| f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{3}\right) \right| + \left| f\left(\frac{1}{3}\right) - f\left(\frac{1}{4}\right) \right| \dots + \left| f\left(\frac{1}{2n}\right) - f(0) \right| \\ &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + 0\right) + \left(0 + \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(0 + \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \\ &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

per $n \rightarrow \infty$.

Proposizione 8.20. La variazione totale gode delle seguenti proprietà¹⁵:

(i) Omogeneità:

$$V_a^b[\alpha f] = |\alpha| V_a^b[f] \quad (\alpha \in \mathbb{R}). \quad (8.6)$$

(ii) Subadditività:

$$V_a^b[f + g] \leq V_a^b[f] + V_a^b[g]. \quad (8.7)$$

(iii) Concatenazione: :

$$V_a^c[f] = V_a^b[f] + V_b^c[f] \quad (a < b < c). \quad (8.8)$$

(iv) Monotonia:

$$V_a^b[f] \leq V_a^c[f] \quad (a < b < c). \quad (8.9)$$

Dimostrazione. (i) Questa è una conseguenza ovvia della definizione.

(ii) Data una qualunque partizione $\{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ dell'intervallo $[a, b]$, si ha:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |f(x_i) + g(x_i) - f(x_{i-1}) - g(x_{i-1})| &\leq \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \sum_{i=1}^n |g(x_i) - g(x_{i-1})| \\ &\leq V_a^b[f] + V_a^b[g] \end{aligned}$$

da cui segue la (8.7).

(iii) Se $V_a^b[f] = \infty$ oppure $V_b^c[f] = \infty$, si vede facilmente che anche $V_a^c[f] = \infty$, per cui la (8.8) è valida. Supponiamo pertanto che entrambi i membri destri della (8.8) siano finiti.

Chiaramente, nella definizione di $V_a^c[f]$, possiamo restringerci alle partizioni di $[a, c]$ contenenti il punto b . Sia $\{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = c\}$ una tale partizione e supponiamo $x_k = b$. Allora:

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^k |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \sum_{i=k+1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq V_a^b[f] + V_b^c[f],$$

per cui:

$$V_a^c[f] \leq V_a^b[f] + V_b^c[f].$$

¹⁵Le funzioni f e g non hanno necessariamente variazione limitata.

D'altra parte, fissato $\varepsilon > 0$, poichè $V_a^b[f] < \infty$ e $V_b^c[f] < \infty$, possiamo sempre trovare due partizioni $\{a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b\}$ e $\{b = x_{k+1} < x_{k+2} < \dots < x_n = c\}$ che verificano:

$$\sum_{i=1}^k |f(x_i) - f(x_{i-1})| > V_a^b[f] - \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\sum_{i=k+1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| > V_b^c[f] - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Di conseguenza:

$$V_a^c[f] \geq \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| > V_a^b[f] + V_b^c[f] - \varepsilon$$

e, poichè $\varepsilon > 0$ è arbitrario:

$$V_a^c[f] \geq V_a^b[f] + V_b^c[f],$$

il che dimostra la (8.8).

(iv) Segue immediatamente dalla (iii), qualora si osservi che $V_b^c[f] \geq 0$ per ogni f . □

Proposizione 8.21. *Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione a variazione limitata in $[a, b]$ e sia $v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da:*

$$v(x) = V_a^x[f].$$

Se $x \in (a, b]$ e f è continua a sinistra in x , allora anche v è continua a sinistra in x . Un'analogha affermazione vale se f è continua a destra in $x \in [a, b)$. In particolare, se f è continua in x , allora anche v lo è.

Dimostrazione. Supponiamo che f sia continua a sinistra in $x \in (a, b]$. Fissato $\varepsilon > 0$, scegliamo un $\delta > 0$ tale che $|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}$ se $x' < x < x' + \delta$. Scegliamo inoltre una partizione $\{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = x\}$ dell'intervallo $[a, x]$ tale che:

$$V_a^x[f] - \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

A meno di raffinare la partizione, possiamo supporre $x_{n-1} < x < x_{n-1} + \delta$, per cui:

$$V_a^x[f] - \sum_{i=1}^{n-1} |f(x_i) - f(x_{i-1})| < \varepsilon$$

e, a maggior ragione:

$$v(x) - v(x_{n-1}) = V_a^x[f] - V_a^{x_{n-1}}[f] < \varepsilon.$$

Poichè v è non decrescente, dalla precedente segue:

$$v(x) - v(x') < \varepsilon$$

se $x_{n-1} < x' < x$, per cui v è continua a sinistra in x , come volevasi dimostrare. □

Teorema 8.22. *Una funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ha variazione limitata in $[a, b]$ se e solo se essa si può scrivere come differenza di due funzioni non decrescenti.*

Dimostrazione. Se $f = f_1 - f_2$, dove f_1 e f_2 sono entrambe non decrescenti, dall'Osservazione 8.18 e dalla proposizione 8.20 segue che f ha variazione limitata. Viceversa, se f ha variazione limitata in $[a, b]$ e $v(x) = V_a^x[f]$, $x \in [a, b]$, scriviamo:

$$f = v - (v - f).$$

Poichè v è non decrescente, dobbiamo far vedere che $v - f$ è non decrescente. Ma, se $a \leq x < y \leq b$:

$$\begin{aligned} (v - f)(y) - (v - f)(x) &= V_a^y[f] - V_a^x[f] - (f(y) - f(x)) \\ &\geq V_x^y[f] - |f(y) - f(x)| \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare. □

Corollario 8.23. *Una funzione a variazione limitata è differenziabile quasi ovunque.*

8.4 Funzioni assolutamente continue

Definizione 8.24. Una funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice assolutamente continua in $[a, b]$ se, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che, se $\{(\alpha_i, \beta_i), i = 1, 2, \dots, n\}$ è una famiglia di intervalli aperti disgiunti contenuti in $[a, b]$, soddisfacenti:

$$\sum_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i) < \delta,$$

allora:

$$\sum_{i=1}^n |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| < \varepsilon.$$

Osservazione 8.25. Si vede facilmente che:

- (i) Assoluta continuità implica continuità.
- (ii) Se f e g sono assolutamente continue, tale è la loro combinazione lineare $\alpha f + \beta g$.
- (iii) Nella definizione si può ugualmente prendere una famiglia numerabile di intervalli aperti in $[a, b]$, la cui somma delle lunghezze non ecceda δ .

Lemma 8.26. Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è assolutamente continua in $[a, b]$, essa ha variazione limitata in $[a, b]$.

Dimostrazione. Scegliamo $\varepsilon = 1$ nella definizione di assoluta continuità e fissiamo un $\delta > 0$ di conseguenza. Supponiamo:

$$c < d < c + \delta.$$

Se:

$$c = s_0 < s_1 < \dots < s_n = d,$$

dalla definizione di continuità assoluta segue:

$$\sum_{j=1}^n |f(s_j) - f(s_{j-1})| < \varepsilon,$$

per cui:

$$V_c^d [f] \leq \varepsilon.$$

Possiamo considerare l'intervallo $[a, b]$ come unione di un numero finito intervalli di lunghezza inferiore a δ . Iterando (8.8), troviamo:

$$V_a^b [f] = V_{t_0}^{t_1} [f] + V_{t_1}^{t_2} [f] + \dots + V_{t_{m-1}}^{t_m} [f],$$

dove:

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b, \quad t_i - t_{i-1} < \delta.$$

Di conseguenza:

$$V_a^b [f] \leq m\varepsilon < \infty.$$

Il teorema è dimostrato. □

Lemma 8.27. Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione assolutamente continua e sia $v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $v(x) = V_a^x [f]$. Allora v è assolutamente continua. Di conseguenza, ogni funzione assolutamente continua su $[a, b]$ è data dalla differenza di due funzioni non decrescenti assolutamente continue su $[a, b]$ (cioè v e $v - f$).

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e scegliamo $\delta > 0$ come nella definizione di assoluta continuità per f . Se $\{(\alpha_i, \beta_i), i = 1, 2, \dots, n\}$ è una famiglia di intervalli aperti contenuti in $[a, b]$ soddisfacenti:

$$\sum_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i) < \delta,$$

allora:

$$\sum_{i=1}^n (v(\beta_i) - v(\alpha_i)) = \sum_{i=1}^n V_{\alpha_i}^{\beta_i} [f].$$

Scegliamo delle partizioni:

$$\{\alpha_i = x_{i,0} < x_{i,1} < \dots < x_{i,m_i} = \beta_i\}$$

tali che:

$$\sum_{j=1}^{m_i} |f(x_{i,j}) - f(x_{i,j-1})| > V_{\alpha_i}^{\beta_i} [f] - \frac{\varepsilon}{n}$$

per $i = 1, 2, \dots, n$. Allora:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} |f(x_{i,j}) - f(x_{i,j-1})| > \sum_{i=1}^n V_{\alpha_i}^{\beta_i} [f] - \varepsilon = \sum_{i=1}^n (v(\beta_i) - v(\alpha_i)) - \varepsilon.$$

Ma, d'altra parte, la famiglia di intervalli disgiunti $\{(x_{i,j-1}, x_{i,j})\}$ è tale che:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} (x_{i,j} - x_{i,j-1}) = \sum_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i) < \delta,$$

per cui:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} |f(x_{i,j}) - f(x_{i,j-1})| < \varepsilon.$$

Ne segue che:

$$\sum_{i=1}^n (v(\beta_i) - v(\alpha_i)) < 2\varepsilon,$$

il che mostra che v è assolutamente continua su $[a, b]$. □

Teorema 8.28. *Sia $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione non decrescente e continua a destra e sia λ_F la misura di Lebesgue-Stieltjes associata ad F . Allora λ_F è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue se e soltanto se F è assolutamente continua.*

Osservazione 8.29. Per definire la misura di Lebesgue-Stieltjes, estendiamo F a tutto l'asse reale come di consueto: $F(x) = F(a)$ se $x < a$, $F(x) = F(b)$ se $x > b$. Notiamo che λ_F è una misura finita:

$$\lambda_F(\mathbb{R}) = F(b) - F(a).$$

Dimostrazione. Supponiamo che λ_F sia assolutamente continua rispetto a λ . Per la Proposizione 7.20, fissato $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che $\lambda(E) < \delta$ implica $\lambda_F(E) < \varepsilon$. In particolare, se $E = (a_1, b_1] \cup (a_2, b_2] \cup \dots \cup (a_n, b_n]$, allora:

$$\begin{aligned} \lambda_F(E) &= \sum_{i=1}^n (F(b_i) - F(a_i)), \\ \lambda(E) &= \sum_{i=1}^n (b_i - a_i), \end{aligned}$$

per cui si vede che la F è assolutamente continua.

Viceversa, sia F assolutamente continua e sia E un'insieme di misura di Lebesgue nulla. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e scegliamo un $\delta > 0$ come nella definizione di continuità assoluta. Poichè la misura di Lebesgue è regolare dall'esterno e $\lambda(E) = 0$, esiste un aperto U contenente E con $\lambda(U) < \delta$. D'altra parte, U è un'unione numerabile di intervalli disgiunti (a_i, b_i) , tali che:

$$\sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) < \delta.$$

Ma allora si ha in particolare:

$$\sum_{i=1}^N (b_i - a_i) < \delta$$

per ogni N , da cui segue:

$$\sum_{i=1}^N (F(b_i) - F(a_i)) < \varepsilon$$

per ogni N . Passando al limite per $N \rightarrow \infty$ si trova

$$\lambda_F(E) \leq \lambda_F(U) = \sum_{i=1}^{\infty} (F(b_i) - F(a_i)) \leq \varepsilon.$$

Poichè $\varepsilon > 0$ è arbitrario, segue che:

$$\lambda_F(E) = 0.$$

Il teorema è dimostrato. □

8.5 Teoremi del calcolo fondamentale

Teorema 8.30. Siano $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ e

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Allora F è localmente assolutamente continua, differenziabile quasi ovunque e

$$F'(x) = f(x) \quad \text{q.o. } [\lambda].$$

Osservazione 8.31. La locuzione “localmente assolutamente continua” indica che F è assolutamente continua in ogni intervallo compatto $[a, b]$. Se supponiamo $f \in L^1(\mathbb{R})$, la dimostrazione mostra che F è assolutamente continua in \mathbb{R} (ovvero possiamo porre $a = -\infty$, $b = +\infty$ nella definizione di assoluta continuità).

Dimostrazione. Siano $\{(\alpha_i, \beta_i), i = 1, 2, \dots, n\}$ degli intervalli aperti disgiunti. Allora:

$$\sum_{i=1}^n |F(\beta_i) - F(\alpha_i)| \leq \sum_{i=1}^n \int_{(\alpha_i, \beta_i)} |f(t)| dt.$$

Per la Proposizione 7.20, quando la somma delle lunghezze $\beta_i - \alpha_i$ tende a zero, il membro destro della precedente tende anch'esso a zero, per cui F è assolutamente continua.

Se $x \in \mathbb{R}$ è un punto di Lebesgue di f e $h > 0$, allora¹⁶:

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| = \frac{1}{h} \left| \int_x^{x+h} \{f(t) - f(x)\} dt \right| \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt \rightarrow 0$$

per $h \rightarrow 0^+$. Quindi, la derivata destra di F in x esiste e coincide con $f(x)$. Analogamente si dimostra che la derivata sinistra esiste e coincide con $f(x)$, per cui $F'(x) = f(x)$ in tutti i punti di Lebesgue, cioè quasi ovunque, come volevasi dimostrare. □

Teorema 8.32. Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione assolutamente continua su $[a, b]$. Allora f è differenziabile quasi ovunque, la derivata $f' \in L^1([a, b])$ e:

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt.$$

¹⁶Notiamo che se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ ha valori nella retta estesa, allora $|f(x)| < \infty$ quasi ovunque, per cui il conto che segue è valido per quasi ogni $x \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Senza perdita di generalità, possiamo assumere f non decrescente. Poniamo $f(x) = f(a)$ per $x < a$ e $f(x) = f(b)$ per $x > b$ e consideriamo la misura di Lebesgue-Stieltjes λ_f associata ad f . Per la Proposizione 7.20, λ_f è assolutamente continua. Per il Teorema di Radon-Nikodym si ha quindi:

$$f(x) - f(a) = \lambda_f((a, x)) = \int_a^x g(t) dt,$$

dove $g \in L^1([a, b])$. Per il Teorema 8.30 si ha quindi $f'(x) = g(x)$ quasi ovunque $[\lambda]$. □

8.6 Collegamento con le misure di Lebesgue-Stieltjes

Sia $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione non decrescente continua a destra. Estendiamo F a tutto \mathbb{R} ponendo $F(x) = F(a)$ per $x < a$, $F(x) = F(b)$ per $x > b$.

Sia λ_F la misura di Lebesgue-Stieltjes con funzione di distribuzione F e sia:

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid \lambda_F(\{x\}) \neq 0\}.$$

Questo insieme è numerabile. Infatti $\mathcal{A} = \cup_n \mathcal{A}_n$, dove:

$$\mathcal{A}_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \lambda_F(\{x\}) > \frac{1}{n} \right\}$$

e, poichè:

$$\lambda_F^*(\mathcal{A}_n) \leq \lambda_F([a, b]) = F(b) - F(a-) = F(b) - F(a) < \infty$$

si ha che ogni \mathcal{A}_n è finito.

Per il teorema di Radon-Nikodym, λ_F si decompone in una parte assolutamente continua ed una parte singolare:

$$\lambda_F = \lambda_F^{\text{ac}} + \lambda_F^{\text{s}}.$$

Possiamo ulteriormente decomporre la parte singolare in una componente “di salto” ed una componente “cantoriana”:

$$\lambda_F^{\text{s}} = \lambda_F^{\text{c}} + \lambda_F^{\text{j}},$$

dove:

$$\begin{aligned} \lambda_F^{\text{j}} &= \lambda_{F \llcorner \mathcal{A}}, \\ \lambda_F^{\text{c}} &= \lambda_{F \llcorner [a, b] \setminus \mathcal{A}}. \end{aligned}$$

La componente assolutamente continua ha una derivata di Radon-Nikodym:

$$f = \frac{d\lambda_F^{\text{ac}}}{d\lambda}.$$

Si può dimostrare¹⁷ che $F' = f$ quasi ovunque. Per definizione di λ_F si ha, in generale:

$$F(y) - F(x) = \int_x^y f(x) dx + \lambda_F^{\text{s}}((x, y))$$

e, in accordo con il Teorema 7.20, si vede che F è assolutamente continua se e soltanto se $\lambda_F^{\text{s}} \equiv 0$.

¹⁷Se F è assolutamente continua, questo è il teorema fondamentale del calcolo.

9 Funzioni convesse

9.1 Generalità

Definizione 9.1. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme convesso. Una funzione $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ si dice convessa se:

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) \quad (9.1)$$

per ogni $x, y \in E$ e $\lambda \in (0, 1)$.

Nel seguito, sottointenderemo sempre che il dominio di una funzione convessa sia convesso. Le funzioni convesse sono continue. Più precisamente vale il:

Teorema 9.2. *Sia $f: E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa. Allora f è localmente lipschitziana. In particolare, f è differenziabile quasi ovunque.*

La seconda affermazione segue dal:

Teorema 9.3 (Rademacher). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione localmente lipschitziana. Allora f è differenziabile quasi ovunque e $\partial_i f \in L_{loc}^\infty(\Omega)$.*

Si possono caratterizzare le funzioni convesse tramite la nozione di sottodifferenziale:

Definizione 9.4. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Dato $x_0 \in \Omega$, il sottodifferenziale di u in x_0 è l'insieme:

$$\underline{\partial}f(x_0) \equiv \{p \in \mathbb{R}^n \mid u(x) - u(x_0) \geq \langle p, x - x_0 \rangle \forall x \in \Omega\}. \quad (9.2)$$

Da un punto di vista geometrico, $p \in \underline{\partial}f(x_0)$ se e soltanto se il grafico di f giace interamente al di sopra dell'iperpiano:

$$y = u(x_0) + \langle p, x - x_0 \rangle.$$

Esempio 9.5. Sia $u(x) = |x|$. Abbiamo $\underline{\partial}u(x) = \{1\}$ per $x > 0$, $\underline{\partial}u(x) = \{-1\}$ per $x < 0$ e $\underline{\partial}u(0) = [-1, 1]$.

Esempio 9.6. Se $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile in x_0 , il sottodifferenziale $\underline{\partial}u(x_0)$ consiste al più del gradiente $\nabla f(x_0)$. Effettivamente, se f è differenziabile in x_0 , abbiamo:

$$u(x_0 + \varepsilon v) - u(x_0) = \varepsilon \langle \nabla u(x_0), v \rangle + r(\varepsilon; v),$$

dove:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{r(\varepsilon; v)}{\varepsilon} = 0$$

Quindi, se $p \in \underline{\partial}u(x_0)$, allora:

$$\frac{r(\varepsilon; v)}{\varepsilon} + \langle \nabla u(x_0), v \rangle \geq \langle p, v \rangle,$$

da cui segue:

$$\langle \nabla u(x_0), v \rangle \geq \langle p, v \rangle$$

per ogni $v \in \mathbb{R}^n$. Si vede facilmente che questa disuguaglianza può essere soddisfatta soltanto da $p = \nabla u(x_0)$.

In ogni caso, la differenziabilità non implica necessariamente l'esistenza di un sottodifferenziale. Un esempio è fornito dalla funzione $u(x) = x^3$, che ha sottodifferenziale vuoto in $x = 0$.

Teorema 9.7. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto convesso. Allora $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa se e soltanto se $\underline{\partial}u(x) \neq \emptyset$ per ogni $x \in E$.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\underline{\partial}u(x) \neq \emptyset$ per ogni $x \in E$. Siano dati $x_0, x_1 \in E$ e sia $\lambda \in (0, 1)$. Posto:

$$x_\lambda = (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1,$$

scegliamo $p \in \underline{\partial}u(x_\lambda)$. Allora:

$$\begin{aligned} f(x_0) &\geq f(x_\lambda) + \langle p, x_0 - x_\lambda \rangle = f(x_\lambda) + \lambda \langle p, x_0 - x_1 \rangle, \\ f(x_1) &\geq f(x_\lambda) + \langle p, x_1 - x_\lambda \rangle = f(x_\lambda) - (1-\lambda) \langle p, x_0 - x_1 \rangle, \end{aligned}$$

quindi:

$$(1-\lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1) \geq f(x_\lambda).$$

Quindi f è convessa.

L'implicazione opposta è una conseguenza del Teorema di Hahn-Banach, che non dimostreremo. \square

Corollario 9.8. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto convesso e sia $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa. Se f è differenziabile in $x \in E$, allora $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$.

9.2 Disuguaglianza di Jensen

Teorema 9.9. Sia (X, \mathcal{M}, μ) uno spazio di misura con $\mu(X) = 1$. Siano $u: X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile tale che $a < u(x) < b$ per ogni $x \in X$ e $\varphi: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa. Allora:

$$\varphi\left(\int_X u \, d\mu\right) \leq \int_X \varphi \circ u \, d\mu. \quad (9.3)$$

Osservazione 9.10. I casi $a = -\infty$, $b = \infty$ non sono esclusi. La funzione $\varphi \circ u$ non è necessariamente integrabile. In tal caso, l'integrale a membro destro della (9.3) esiste in senso esteso ed è uguale a $+\infty$.

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che, poichè φ è continua, la funzione $\varphi \circ u$ è misurabile. Poniamo:

$$y_0 = \int_X u \, d\mu$$

e notiamo che $a < y_0 < b$, per cui il membro sinistro della (9.3) è ben definito. Se $p \in \underline{\partial}\varphi(y_0)$, allora:

$$\varphi(y) \geq \varphi(y_0) + p(y - y_0)$$

per ogni $y \in (a, b)$. Quindi:

$$\varphi(u(x)) \geq \varphi(y_0) - p(u(x) - y_0)$$

per ogni $x \in X$. Da questa disuguaglianza segue che $(\varphi \circ u)^-$ è integrabile¹⁸, quindi il membro destro della (9.3) esiste in senso improprio. Se ora $(\varphi \circ u)^+$ non è integrabile, allora la (9.3) è banale. Se invece $(\varphi \circ u)^+$, e quindi $\varphi \circ u$, è integrabile, integrando la disuguaglianza precedente otteniamo la (9.3). \square

Esempio 9.11 (Media aritmetica e media geometrica.). Se $\varphi(y) = e^y$, la disuguaglianza di Jensen dà:

$$e^{\int_X f \, d\mu} \leq \int_X e^f \, d\mu.$$

Sia $X = \{1, 2, \dots, n\}$ e $\mu(\{i\}) = \frac{1}{n}$. La precedente diventa:

$$(e^{y_1} e^{y_2} \dots e^{y_n})^{\frac{1}{n}} \leq \frac{e^{y_1} + e^{y_2} + \dots + e^{y_n}}{n},$$

ovvero:

$$(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{n} \quad (9.4)$$

per ogni n -upla di numeri positivi α_i .

In generale, se u è una funzione integrabile, abbiamo:

$$e^{\int_X \ln u \, d\mu} \leq \int_X u \, d\mu, \quad (9.5)$$

dove $(\ln u)^+$ è integrabile in modo simile a quanto visto sopra (\ln è una funzione concava). I membri sinistri e destri delle (9.4) e (9.5) sono chiamati, rispettivamente, media geometrica e media aritmetica (della n -upla α_i o della funzione $u(x)$).

Se, al posto di $\mu(\{i\}) = \frac{1}{n}$, poniamo più in generale $\mu(\{i\}) = p_i$, con $\sum_i p_i = 1$, allora la 9.4 diventa:

$$\alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} \dots \alpha_n^{p_n} \leq p_1 \alpha_1 + p_2 \alpha_2 + \dots + p_n \alpha_n.$$

¹⁸Se g è integrabile e $f \geq g$, poichè:

$$f^- = \max\{-f, 0\} \leq \max\{-g, 0\} = g^-,$$

si ha che f^- è integrabile.

Esempio 9.12. Per questo esempio, è comodo generalizzare la disuguaglianza di Jensen ad uno spazio di misura finito:

$$\varphi\left(\frac{1}{\mu(X)} \int_X f \, d\mu\right) \leq \frac{1}{\mu(X)} \int_X \varphi \circ f \, d\mu$$

Siano p_1, p_2, \dots, p_n numeri positivi tali che:

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

La grandezza:

$$\zeta(\{p_i\}) = \sum_{i=1}^n p_i^2$$

è detta “purezza” della distribuzione discreta $\{p_i\}$. La disuguaglianza di Jensen, con $X = \{1, 2, \dots, n\}$, μ la misura del contare e $\varphi(y) = y^2$, mostra che:

$$\frac{1}{n^2} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i\right)^2 \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i^2 \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i = \frac{1}{n}.$$

Ciò fornisce le stime:

$$\frac{1}{n} \leq \zeta(\{p_i\}) \leq 1.$$

La grandezza:

$$S(\{p_i\}) = - \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i$$

è chiamata “entropia” della distribuzione discreta $\{p_i\}$. La disuguaglianza di Jensen, con $X = \{1, 2, \dots, n\}$, $\mu(\{i\}) = p_i$ e $\varphi(y) = -\ln y$, mostra che:

$$S(\{p_i\}) \geq -\ln\left(\sum_{i=1}^n p_i^2\right) = -\ln(\zeta\{p_i\}).$$

D'altra parte se applichiamo la disuguaglianza di Jensen, con $X = \{1, 2, \dots, n\}$, e $\varphi(y) = y \ln y$, otteniamo:

$$-\frac{1}{n} \ln n = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i\right) \ln\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i = -\frac{1}{n} S(\{p_i\}),$$

da cui le stima:

$$S(\{p_i\}) \leq \ln n.$$

Esempio 9.13. In termini probabilistici, la disuguaglianza di Jensen si può esprimere nella forma:

$$\varphi(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(\varphi(X)).$$

Per una variabile casuale positiva X , ciò fornisce delle stime per i momenti di X :

$$\mathbb{E}(X)^k \leq \mathbb{E}(X^k).$$

Parte III
Spazi L^p

10 Spazi L^p

Definizione 10.1. Sia $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione misurabile e sia $1 \leq p < \infty$. Diremo che $f \in L^p(\mu)$ se:

$$\int_X |f|^p d\mu < \infty.$$

Se $f \in L^p(\mu)$, la norma di f è definita da:

$$\|f\|_p = \left\{ \int_X |f|^p d\mu \right\}^{\frac{1}{p}}. \quad (10.1)$$

(qualora ciò risulti conveniente, porremo $\|f\|_p = \infty$ se $|f|^p$ non è integrabile).

Vedremo che, se identifichiamo in L^p le funzioni uguali quasi ovunque, questo diventa uno spazio vettoriale normato e completo (uno spazio di Banach), con la norma definita da (10.1).

Il fatto che $L^p(\mu)$ sia uno spazio vettoriale segue facilmente dalla disuguaglianza:

$$|a + b|^p \leq (|a| + |b|)^p \leq 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p),$$

che a sua volta segue dalla convessità di $x \mapsto x^p$ per $p > 1$:

$$\left(\frac{|a| + |b|}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2}(|a|^p + |b|^p).$$

10.1 Disuguaglianze di Hölder e Minkowski

Teorema 10.2 (Disuguaglianza di Hölder). *Siano $f, g: X \rightarrow \mathbb{C}$ funzioni misurabili, $1 < p, q < \infty$ tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Allora:*

$$\int_X |fg| d\mu \leq \left\{ \int_X |f|^p d\mu \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_X |g|^q d\mu \right\}^{\frac{1}{q}}. \quad (10.2)$$

In altri termini:

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

In particolare, se $f \in L^p(\mu)$ e $g \in L^q(\mu)$, allora $fg \in L^1(\mu)$.

Dimostrazione. Se uno dei membri destri della (10.2) è infinito o zero, allora la tesi è ovvia.

Supponiamo dunque che ciascun integrale nella (10.2) risulti finito. Poiché la disuguaglianza è invariante per moltiplicazione di f o g per uno scalare reale positivo, non è restrittivo supporre che:

$$\|f\|_p = \|g\|_q = 1.$$

Dobbiamo dunque dimostrare che:

$$\int_X |fg| d\mu \leq 1.$$

Ma questa segue immediatamente dalla disuguaglianza¹⁹:

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

valida per $a, b > 0$. Il teorema è dimostrato. □

¹⁹Per dimostrarla, notiamo che dalla concavità del logaritmo, segue:

$$\ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \geq \frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q = \ln ab.$$

Teorema 10.3 (Disuguaglianza di Minkowski). *Siano $f, g \in L^p(\mu)$. Allora:*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \quad (10.3)$$

Dimostrazione. Di nuovo, possiamo escludere in partenza i casi banali $\|f + g\|_p = 0$, $\|f\|_p = 0$, o $\|g\|_p = 0$, in cui la tesi è senz'altro vera. Abbiamo:

$$\begin{aligned} |f + g|^p &= |f + g| |f + g|^{p-1} \\ &\leq (|f| + |g|) |f + g|^{p-1}. \end{aligned}$$

Per la disuguaglianza di Holder:

$$\begin{aligned} \int_X |f| |f + g|^{p-1} d\mu &\leq \left\{ \int_X |f|^p d\mu \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_X |f + g|^{(p-1)q} d\mu \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &= \|f\|_p (\|f + g\|_p)^{\frac{p}{q}} \end{aligned}$$

e similmente:

$$\int_X |g| |f + g|^{p-1} d\mu \leq \|g\|_p (\|f + g\|_p)^{\frac{p}{q}}.$$

Pertanto:

$$\|f + g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) (\|f + g\|_p)^{\frac{p}{q}}.$$

Poichè $\|f + g\|_p > 0$, possiamo dividere per $(\|f + g\|_p)^{\frac{p}{q}}$ e ottenere la (10.3). □

Corollario 10.4. *La funzione $\|\cdot\|_p : L^p(\mu) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da (10.1) è una norma.*

Osservazione 10.5. Ricordiamo che i membri di $L^p(\mu)$ sono definiti come classi di equivalenza di funzioni p -sommabili, dove due funzioni f e g sono equivalenti se $f(x) = g(x)$ quasi ovunque.

10.2 Completezza degli spazi L^p

Proposizione 10.6. *Siano $f, f_n \in L^p(\mu)$. Supponiamo che:*

- (i) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ q.o. $[\mu]$
- (ii) *Esiste $g \in L^p(\mu)$ tale che $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.o. $[\mu]$.*

Allora $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$.

Osservazione 10.7. Notiamo che, per $p = 1$, questo è il teorema della convergenza dominata.

Dimostrazione. Poniamo $\varphi_n(x) = |f_n(x) - f(x)|^p$. Per ipotesi:

$$\varphi_n(x) \rightarrow 0 \quad \text{q.o. } [\mu].$$

Inoltre:

$$\varphi_n(x) \leq (|f_n(x)| + |f(x)|)^p \leq 2^{p-1} (|f_n(x)|^p + |f(x)|^p) \leq 2^{p-1} (|g(x)|^p + |f(x)|^p)$$

quasi ovunque. La tesi segue ora dal teorema della convergenza dominata. □

Teorema 10.8. $L^p(\mu)$ è completo per $1 \leq p < \infty$.

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che ogni serie totalmente convergente in $L^p(\mu)$ è convergente (si veda l'Appendice di questa Sezione).

Sia $f_n \in L^p(\mu)$ una successione tale che:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p < \infty.$$

Definiamo:

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^n |f_k(x)|, \quad G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|.$$

La successione G_n è non negativa e non decrescente, e inoltre $G_n \rightarrow G$ puntualmente. Per il teorema della convergenza monotona:

$$\int_X G(x)^p d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X G_n(x)^p d\mu.$$

Ma:

$$\|G_n(x)\|_p \leq \sum_{k=1}^n \|f_k\|_p \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p = A < \infty.$$

Di conseguenza:

$$\int_X G(x)^p d\mu \leq A^p < \infty,$$

ovvero $G \in L^p(\mu)$. Quindi $G(x) < \infty$ quasi ovunque e la serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

converge per quasi ogni $x \in X$. Di conseguenza, esiste una funzione f misurabile tale che:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \quad \text{q.o.}[\mu].$$

Poichè

$$\left| \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| \leq \sum_{k=1}^n |f_k(x)| = G_n(x) \leq G(x),$$

si ha

$$|f(x)| \leq G(x)$$

quasi ovunque. Quindi $f \in L^p(\mu)$ e, dalla proposizione precedente, concludiamo che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^n f_k - f \right\|_p = 0.$$

Il teorema è dimostrato. □

10.3 Spazio $L^\infty(\mu)$

Definizione 10.9. Sia $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ misurabile. Definiamo:

$$\|f\|_\infty = \inf \{a \in \mathbb{R} | \mu(\{|f(x)| > a\}) = 0\}.$$

(se l'insieme a destra è vuoto, poniamo $\|f\|_\infty = \infty$).

Proposizione 10.10. $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ quasi ovunque. In altre parole, $\|f\|_\infty$ è un minimo.

Dimostrazione. Se $\|f\|_\infty = \infty$, allora $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ per ogni $x \in X$. Se $\|f\|_\infty < \infty$ siano:

$$E_n = \left\{ x | |f(x)| > \|f\|_\infty + \frac{1}{n} \right\}$$

$$E = \{x | |f(x)| > \|f\|_\infty\}$$

Per definizione di $\|f\|_\infty$, $\mu(E_n) = 0$ per ogni n . Inoltre:

$$E = \cup_n E_n,$$

per cui $\mu(E) = 0$, il che prova l'asserto. □

Teorema 10.11. Siano $f, f_n, g: X \rightarrow \mathbb{C}$ funzioni misurabili.

(i) $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. In particolare, $L^\infty(\mu)$ (con la solita identificazione delle funzioni uguali quasi ovunque), è uno spazio vettoriale e $\|\cdot\|_\infty$ una norma.

(ii) $\|fg\|_1 \leq \|f\|_\infty \|g\|_1$. In particolare, se $f \in L^\infty(\mu)$ e $g \in L^1(\mu)$, allora $fg \in L^1(\mu)$.

(iii) Se $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$, esiste un insieme N misurabile di misura nulla tale che $f_n \rightarrow f$ uniformemente in $X \setminus N$.

(iv) $L^\infty(\mu)$ è completo.

Dimostrazione. (i) Per ogni $x \in X$, si ha:

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|.$$

Quindi, per quasi ogni $x \in X$:

$$|f(x) + g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty,$$

da cui segue la (i).

(ii) Per quasi ogni $x \in X$ si ha:

$$|f(x)g(x)| \leq \|f\|_\infty |g(x)|.$$

Integrando, si ottiene la (ii).

(iii) Poniamo

$$E_n = \{x \mid |f_n(x) - f(x)| > \|f_n - f\|_\infty\},$$

$$N = \cup_n E_n.$$

Poichè $\mu(E_n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha $\mu(N) = 0$. Per ogni $x \in X \setminus N$ si ha:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty.$$

Ne segue la (iii).

(iv) Sia f_n una successione di Cauchy. Consideriamo gli insiemi:

$$E_{n,m} = \{x \mid |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\}.$$

Ogni $E_{n,m}$ ha misura nulla, per cui:

$$E = \bigcup_{n,m} E_{n,m}$$

ha misura nulla. A meno di ridefinire $f_n(x) = 0$ per $x \in E$, possiamo supporre che valga:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty,$$

per ogni $x \in X$. Quindi, per ogni $x \in X$, la successione di numeri complessi $f_n(x)$ è di Cauchy e converge a un limite $f(x)$. Ora:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_{n+k}(x)| + |f_{n+k}(x) - f(x)| \leq \|f_n - f_{n+k}\|_\infty + |f_{n+k}(x) - f(x)|$$

e, prendendo il limite $k \rightarrow \infty$:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \|f_n - f_{n+k}\|_\infty \quad (x \in X \setminus E).$$

da cui:

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \|f_n - f_{n+k}\|_\infty.$$

Ne segue che $f \in L^\infty(\mu)$, e:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

Il teorema è dimostrato. □

Proposizione 10.12. Sia X uno spazio topologico, μ una misura boreliana su X tale che $\mu(E) > 0$ se $E \subseteq X$ è un aperto non vuoto. Se $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione continua, allora:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f|.$$

Osservazione 10.13. In particolare, ricadono nell'ipotesi tutte le misure regolari dall'esterno non banali, come la misura di Lebesgue.

Dimostrazione. Chiaramente:

$$\|f\|_\infty \leq \sup_{x \in X} |f|.$$

D'altra parte, se:

$$E = \{x \mid |f(x)| > \|f\|_\infty\},$$

allora E ha misura nulla. Inoltre è aperto (poiché f è continua). Quindi $E = \emptyset$ e:

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty$$

per ogni $x \in X$, da cui:

$$\sup_{x \in X} |f| \leq \|f\|_\infty.$$

□

10.4 Caso $0 < p < 1$

Lemma 10.14. Se $0 < p < 1$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, allora:

$$|\alpha + \beta|^p \leq |\alpha|^p + |\beta|^p$$

e l'uguaglianza vale se e soltanto se $\alpha = 0$ o $\beta = 0$.

Dimostrazione. Se $\alpha = 0$ oppure $\beta = 0$ la tesi è ovvia. Altrimenti, posto $x = \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|$, si ha:

$$\begin{aligned} |\alpha + \beta|^p &\leq (|\alpha| + |\beta|)^p = |\alpha|^p (1 + x)^p, \\ |\alpha|^p + |\beta|^p &= |\alpha|^p (1 + x^p). \end{aligned}$$

La tesi equivale quindi a dimostrare che:

$$f(x) = 1 + x^p - (1 + x)^p \geq 0$$

per ogni $x \geq 0$. Ma questo segue da:

$$\begin{aligned} f'(x) &= p\left(\frac{1}{x^{1-p}} - \frac{1}{(1+x)^{1-p}}\right) > 0 \\ f(0) &= 0. \end{aligned}$$

□

Come nel caso $p \geq 1$, possiamo definire

$$\|f\|_p = \left\{ \int_X |f|^p d\mu \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Il lemma precedente mostra che se $\|f\|_p, \|g\|_p < \infty$, allora $\|f + g\|_p < \infty$, per cui lo spazio:

$$L^p(\mu) = \left\{ f: X \rightarrow \mathbb{C} / \sim \mid \|f\|_p < \infty \right\}$$

è uno spazio vettoriale. Il funzionale $f \mapsto \|f\|_p$ è chiaramente omogeneo e positivo, avendo identificato le classi di equivalenza in $L^p(\mu)$. Tuttavia, esso non soddisfa la disuguaglianza triangolare:

Teorema 10.15. Sia (X, \mathcal{M}, μ) uno spazio di misura e sia $0 < p < 1$. Supponiamo che esistano due insiemi $E, F \subseteq X$ tali che

$$E \cap F = \emptyset, \quad 0 < \mu(E), \mu(F) < \infty.$$

Allora:

$$\|\chi_E + \chi_F\|_p > \|\chi_E\|_p + \|\chi_F\|_p.$$

Dimostrazione. Notiamo infatti che:

$$\begin{aligned} \|\chi_E\|_p &= \mu(E)^{\frac{1}{p}}, \\ \|\chi_F\|_p &= \mu(F)^{\frac{1}{p}}, \\ \|\chi_E + \chi_F\|_p &= (\mu(E) + \mu(F))^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

per cui, dal lemma precedente:

$$\begin{aligned} (\|\chi_E\|_p + \|\chi_F\|_p)^p &= (\mu(E)^{\frac{1}{p}} + \mu(F)^{\frac{1}{p}})^p \\ &< \mu(E) + \mu(F) \\ &= (\|\chi_E + \chi_F\|_p)^p \end{aligned}$$

□

10.5 Confronto fra spazi L^p

Teorema 10.16. Sia μ una misura e siano $1 \leq r < s < t \leq \infty$. Allora:

- (i) $L^s(\mu) \subseteq L^r(\mu) + L^t(\mu)$.
- (ii) $L^r(\mu) \cap L^t(\mu) \subseteq L^s(\mu)$.
- (iii) Se $f \in L^s(\mu)$ e $\lambda \in (0, 1)$ è dato da $\frac{1}{s} = \frac{\lambda}{r} + \frac{1-\lambda}{t}$, allora:

$$\|f\|_s \leq \|f\|_r^\lambda \|f\|_t^{1-\lambda}.$$

- (iv) Se $\mu(X) < \infty$, allora

$$\|f\|_r \leq \|f\|_t (\mu(X))^{\frac{1}{r} - \frac{1}{t}}.$$

In particolare $L^r(\mu) \subseteq L^t(\mu)$ se $1 \leq r < t \leq \infty$.

Osservazione 10.17. La (i) equivale a dire che se $f \in L^s(\mu)$, allora esistono $g \in L^r(\mu)$ e $h \in L^t(\mu)$ tali che $f = g + h$. Se definiamo la funzione:

$$\varphi(p) = \|f\|_p \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

la (ii) implica $I = \{p | \varphi(p) < \infty\}$ è un intervallo. Se, per evitare banalità, supponiamo $f \neq 0$ (nel senso di $L^p(\mu)$), la (iii) equivale a dire che la funzione $\ln \varphi: [1, \infty] \rightarrow (-\infty, \infty]$, ristretta a I , è una funzione convessa.

Dimostrazione. (i) Sia $f \in L^s(\mu)$ e sia $E = \{x | f(x) \leq 1\}$. Poniamo:

$$\begin{aligned} g &= \chi_{X \setminus E} f, \\ h &= \chi_E f. \end{aligned}$$

Abbiamo chiaramente $f = g + h$ e

$$\begin{aligned} |g|^r &= \chi_{X \setminus E} |f|^r \leq |f|^s, \\ |h|^t &= \chi_{X \setminus E} |f|^t \leq |f|^s. \end{aligned}$$

Ne segue che $g \in L^r(\mu)$ e $h \in L^t(\mu)$, il che dimostra la tesi.

(ii-iii) Chiaramente la (ii) segue dalla (iii). Se $t = \infty$, allora:

$$\lambda = \frac{r}{s}.$$

Abbiamo:

$$\|f\|_s^s = \int_X |f|^s d\mu = \int_X |f|^r |f|^{s-r} d\mu \leq \|f\|_\infty^{s-r} \|f\|_r^r,$$

da cui segue la tesi. Se $t < \infty$, notiamo che:

$$p = \frac{r}{\lambda s}, \quad q = \frac{t}{(1-\lambda)s}$$

sono esponenti coniugati, per cui, per la disuguaglianza di Holder:

$$\|f\|_s^s = \int_X |f|^s d\mu = \int_X |f|^{\lambda s} |f|^{(1-\lambda)s} d\mu \leq \left\{ \int_X |f|^r d\mu \right\}^{\frac{\lambda s}{r}} \left\{ \int_X |f|^t d\mu \right\}^{\frac{(1-\lambda)s}{t}} = (\|f\|_r^\lambda \|f\|_t^{1-\lambda})^s.$$

(iv) Se $t = \infty$, allora:

$$\int_X |f|^r d\mu \leq \|f\|_\infty^r \mu(X)$$

da cui la tesi. Se $t < \infty$ e:

$$\frac{1}{p} = 1 - \frac{r}{t},$$

allora p e $\frac{t}{r}$ sono esponenti coniugati, per cui:

$$\int_X |f|^r d\mu = \int_X 1 \cdot |f|^r d\mu \leq \left(\int_X |f|^t d\mu \right)^{\frac{r}{t}} \left(\int_X d\mu \right)^{1-\frac{r}{t}},$$

da cui la tesi. □

10.6 Spazi ℓ^p

Sia $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri complessi. Per $1 \leq p < \infty$ definiamo:

$$\|a\|_p = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right\}^{\frac{1}{p}}. \quad (10.4)$$

Poniamo inoltre:

$$\|a\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|. \quad (10.5)$$

Si vede facilmente che entrambe le (10.4) e (10.5) si possono interpretare come le norme L^p e L^∞ rispetto alla misura del contare su \mathbb{N} , definita su qualsiasi sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{N}$ da:

$$\mu(E) = \text{Card}(E) \quad (E \subseteq \mathbb{N}). \quad (10.6)$$

Infatti, se $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di numeri positivi (eventualmente, nella semiretta estesa). Abbiamo:

$$\int_{\mathbb{N}} a d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\{n\}} a d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{\{n\}} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Per cui:

$$\|a\|_p = \left\{ \int_{\mathbb{N}} |a|^p d\mu \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Inoltre, poichè l'unico sottoinsieme di misura nulla di \mathbb{N} è l'insieme vuoto, il sup nella (10.5) coincide con il sup essenziale della successione a .

Per $1 \leq p < \infty$, lo spazio ℓ^p è definito dall'insieme delle successioni con norma p finita. Dai risultati astratti dimostrati nelle sezioni precedenti, deduciamo immediatamente i seguenti teoremi.

Teorema 10.18. Per $1 \leq p \leq \infty$, ℓ^p è uno spazio di Banach.

Teorema 10.19. La disuguaglianza di Hölder:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leq \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^q \right\}^{\frac{1}{q}}, \quad (10.7)$$

Teorema 10.20 (Teorema della convergenza monotona in ℓ^p). Siano $a^{(k)} = (a_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$, $k = 1, 2, \dots$, successioni in $[0, \infty]$ tali che:

$$0 \leq a_n^{(1)} \leq a_n^{(2)} \leq \dots \leq a_n^{(k)} \leq \dots$$

e sia $a = \lim_k a^{(k)}$. Allora:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k)}.$$

Corollario 10.21 (Teorema di Fubini in ℓ^p). Siano a_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots$, numeri positivi (eventualmente $a_{ij} = \infty$). Allora:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} \quad (10.8)$$

Teorema 10.22 (Teorema della convergenza dominata in ℓ^1). Siano $a^{(k)} = (a_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$, $k = 1, 2, \dots$, successioni di numeri complessi, tali che:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_n^{(k)} = a_n$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che esista $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1$ tale che:

$$a_n^{(k)} \leq |b_n|$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1$ e:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k)}.$$

Concludiamo dimostrando un risultato specifico degli spazi ℓ^p .

Teorema 10.23. Siano $1 \leq s < t \leq \infty$. Allora $\ell^s \subseteq \ell^t$ e

$$\|a\|_t \leq \|a\|_s$$

per ogni successione a .

Dimostrazione. Supponiamo prima $t = \infty$. Chiaramente:

$$|a_n| \leq \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^s \right\}^{\frac{1}{s}} = \|a\|_s.$$

Dunque

$$\|a\|_{\infty} \leq \|a\|_s$$

e $\ell^{\infty} \subseteq \ell^s$. Se ora $t < \infty$, dal Teorema 10.16 e dal caso $t = \infty$ abbiamo:

$$\|a\|_t \leq \|a\|_s^{\frac{s}{t}} \|a\|_{\infty}^{1 - \frac{s}{t}} \leq \|a\|_s.$$

Ne segue la tesi. □

10.7 Appendice: serie totalmente convergenti

Definizione 10.24. Sia V uno spazio vettoriale normato e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in V . Diciamo che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

è totalmente convergente se è convergente la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|.$$

Teorema 10.25. *Sia V uno spazio vettoriale normato. Allora V è completo se e solo se ogni serie totalmente convergente è convergente.*

Dimostrazione. Supponiamo che V sia completo e sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione tale che:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty.$$

Fissato $\varepsilon > 0$, esiste un N tale che:

$$\sum_{n=p}^q \|x_n\| < \varepsilon$$

se $N < p \leq q$. Di conseguenza:

$$\left\| \sum_{n=p}^q x_n \right\| < \varepsilon,$$

per cui la successione delle somme parziali di x_n è di Cauchy e, poichè V è completo, converge a un limite x .

Viceversa, supponiamo che ogni serie totalmente convergente in V sia convergente. Se x_n è una successione di Cauchy, possiamo estrarre da x_n una sottosuccessione x_{n_k} tale che:

$$\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\| < \frac{1}{2^k}.$$

Posto $y_1 = x_{n_1}$ e:

$$y_{k+1} = x_{n_{k+1}} - x_{n_k},$$

abbiamo:

$$x_{n_k} = \sum_{i=1}^k y_i.$$

Ma la serie:

$$\sum_{i=1}^{\infty} y_i$$

è totalmente convergente, in quanto:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|y_i\| < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1.$$

Pertanto esiste:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} y_i = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}.$$

Ma una successione di Cauchy con una sottosuccessione convergente converge allo stesso limite. Il teorema è dimostrato. \square

11 Ulteriori proprietà degli spazi L^p

11.1 Teoremi di densità (caso generale)

Teorema 11.1 (Teorema di Lusin.). *Sia X uno spazio di Hausdorff localmente compatto e μ una misura boreliana su X completa, regolare sui boreliani e finita sui compatti. Sia f una funzione misurabile complessa su X e sia $A \subseteq X$ un insieme misurabile tale che $\mu(A) < \infty$, $f(x) = 0$ se $x \notin A$. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste una $g \in C_c(X)$ tale che:*

$$\mu(\{f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon. \quad (11.1)$$

Inoltre, possiamo scegliere g in modo tale che:

$$\sup_{x \in X} |g(x)| \leq \sup_{x \in X} |f(x)|. \quad (11.2)$$

Dimostrazione. Supponiamo innanzitutto $0 \leq f \leq 1$ e A compatto. Consideriamo delle funzioni semplici s_n come nella dimostrazione del Teorema 5.24. Posto $t_1 = s_1$, $t_n = s_n - s_{n-1}$ per $n \geq 2$, si ha:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n(x)$$

per ogni $x \in X$. Inoltre, $t_n = 2^{-n} \chi_{T_n}$ per qualche sottoinsieme $T_n \subseteq A$ misurabile.

Poichè X è localmente compatto, ogni $x \in A$ ha un intorno V_x con chiusura compatta. Poichè A è compatto, un numero finito di tali intorni, diciamo V_1, V_2, \dots, V_m , ricopre A e quindi:

$$A \subseteq V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_m \equiv V,$$

dove il membro destro ha chiusura compatta. Poichè μ è regolare, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono $K_n \subseteq T_n \subseteq U_n \subseteq V$, con K_n compatto e U_n aperto, tali che:

$$\mu(U_n \setminus K_n) < 2^{-n} \varepsilon.$$

Per il Lemma di Urysohn, esistono delle funzioni $h_n \in C_c(X)$ tali che $0 \leq h_n \leq 1$, $h_n(x) = 1$ per ogni $x \in K_n$ e $\text{supp} h_n \subseteq U_n$. Poniamo:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} h_n(x).$$

La serie converge uniformemente in X , per cui g è continua e, per costruzione, $\text{supp} g \subseteq V$. Inoltre, poichè $2^{-n} h_n(x) = t_n(x)$ per $x \notin U_n \setminus K_n$, abbiamo $g(x) = f(x)$ per $x \notin \cup_n (U_n \setminus K_n)$. Questo insieme ha misura minore di ε , per cui la (11.1) è valida nel caso $0 \leq f \leq 1$ e A compatto.

Chiaramente, la (11.1) resta valida se A è compatto e f è una funzione complessa limitata. Inoltre, se $\mu(A) < \infty$, esiste un compatto $K \subseteq A$ tale che $\mu(A \setminus K) < \frac{\varepsilon}{2}$ ed una $g \in C_c(X)$ tale che:

$$\mu(\{\chi_K f(x) \neq g(x)\}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ne segue che:

$$\begin{aligned} \mu(\{f(x) \neq g(x)\}) &= \mu(\{\chi_K f(x) \neq g(x), x \in K \cup (X \setminus A)\} \cup \{f(x) \neq g(x), x \in A \setminus K\}) \\ &\leq \mu(\{\chi_K f(x) \neq g(x), x \in K \cup (X \setminus A)\}) + \mu(A \setminus K) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Se infine f è una funzione complessa, non necessariamente limitata, posto:

$$E_n = \{|f(x)| > n\},$$

si ha $\cap_n E_n = \emptyset$. Inoltre $E_1 \subseteq A$, per cui $\mu(E_1) < \infty$ e quindi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = 0.$$

Poichè f coincide con la funzione limitate $(1 - \chi_{E_n})f$ su $X \setminus E_n$, la (11.1) segue per una funzione complessa arbitraria.
Se ora

$$R \equiv \sup_{x \in X} |f(x)| = \infty,$$

la (11.2) è ovvia. Altrimenti, sia $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la funzione continua definita da:

$$\varphi(z) = \begin{cases} z & |z| \leq R, \\ R \frac{z}{|z|} & |z| > R. \end{cases}$$

Se $g \in C_c(X)$ soddisfa (11.1), allora $\varphi \circ g \in C_c(X)$ soddisfa (11.1) e (11.2). □

Teorema 11.2. *Sia S la classe delle funzioni semplici complesse tali che:*

$$\mu(\{x: s(x) \neq 0\}) < \infty.$$

Se $1 \leq p < \infty$, allora S è denso in $L^p(\mu)$.

Dimostrazione. Chiaramente $S \subseteq L^p(\mu)$. Se $f \geq 0$ e $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di funzioni semplici come nel teorema 5.24, allora $s_n \in L^p(\mu)$, $(f - s_n)^p \leq f^p$ e, dal teorema della convergenza dominata, concludiamo che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - s_n\|_p \rightarrow 0.$$

Il caso generale con f complessa segue dal precedente. □

Teorema 11.3. *Per $1 \leq p < \infty$, $C_c(X)$ è denso in $L^p(\mu)$.*

Dimostrazione. Siano date $s \in S$ e $\varepsilon > 0$. Sia $g \in C_c(X)$ tale che:

$$\mu(\{g(x) \neq s(x)\}) < \varepsilon$$

e $|g| \leq \|s\|_\infty$. Allora:

$$\begin{aligned} \int_X |g - s|^p \, d\mu &\leq \int_{\{g(x) \neq s(x)\}} |g - s|^p \, d\mu \\ &\leq 2^p \varepsilon \|s\|_\infty^p, \end{aligned}$$

per cui:

$$\|g - s\|_p \leq 2\varepsilon^{\frac{1}{p}} \|s\|_\infty.$$

Poichè S è denso in $L^p(\mu)$, ciò dimostra la tesi. □

11.1.1 Appendice: il Lemma di Urysohn

Teorema 11.4. *Sia X uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto e siano $K \subseteq V \subseteq X$, con K compatto e V aperto. Allora esiste una funzione $f \in C_c(X)$ tale che $0 \leq f \leq 1$, $f(x) = 1$ per $x \in K$ e $\text{supp} f \subseteq V$.*

Dimostrazione. La dimostrazione nel caso generale è data in Rudin W., “Real and Complex Analysis”, pag. 39. Diamo qui una dimostrazione alternativa nel caso in cui X è uno spazio metrico, con distanza ρ .

Sia $E \subseteq X$ un sottoinsieme non vuoto di X , sia $\rho_E: X \rightarrow [0, \infty)$ definita da

$$\rho_E(x) = \inf_{z \in E} \rho(x, z).$$

La funzione ρ_E è Lipschitziana. Infatti, dati $x, y \in X$, $z \in E$, si ha:

$$\rho_E(x) \leq \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z),$$

da cui:

$$\rho_E(x) \leq \rho(x, y) + \rho_E(y).$$

Similmente si trova:

$$\rho_E(y) \leq \rho(x, y) + \rho_E(x),$$

da cui segue:

$$|\rho_E(x) - \rho_E(y)| \leq \rho(x, y).$$

□

Notiamo che se $F \subseteq X$ è chiuso, allora $x \in F$ se e solo se $\rho_F(x) = 0$. Sia U un aperto a chiusura \bar{U} compatta, tale che:

$$K \subset U \subset \bar{U} \subset V.$$

Poniamo:

$$f(x) = \frac{\rho_{X \setminus U}(x)}{\rho_{X \setminus U}(x) + \rho_K(x)}, \quad (x \in X).$$

Se $x \in K$, poichè $X \setminus U$ è chiuso, si ha $\rho_{X \setminus U}(x) > 0$ e $f(x) = 1$. Se $x \in U \setminus K$, allora $\rho_K(x) > 0$ e quindi $0 \leq f(x) < 1$. Se infine $x \in X \setminus U$, $\rho_K(x) > 0$ e $f(x) = 0$. Poichè $\{x: f(x) \neq 0\} \subseteq U$, $\text{supp} f \subseteq \bar{U}$, e poichè \bar{U} è compatto, anche $\text{supp} f$ è compatto.

11.2 Separabilità di $L^p(\mathbb{R}^n)$

Definizione 11.5. Uno spazio misurabile (X, \mathcal{M}) si dice separabile se esiste una famiglia numerabile $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}$ che genera \mathcal{M} .

Esempio 11.6. La σ -algebra dei boreliani $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ è separabile, in quanto è generata dalla famiglia numerabile delle palle $B_r(x)$ con centro $x \in \mathbb{Q}^n$ e raggio $r \in \mathbb{Q}$. Più in generale, se X è uno spazio metrico separabile, allora la σ -algebra dei boreliani $\mathcal{B}(X)$ è separabile.

Teorema 11.7. Se (X, \mathcal{M}) è uno spazio misurabile separabile e $\mu: \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ è una misura su \mathcal{M} , allora $L^p(\mu)$ è separabile per ogni $1 \leq p < \infty$.

Corollario 11.8. $L^p(\mathbb{R}^n)$ è separabile.

Dimostrazione. Infatti, in ogni classe $[f] \in L^p(\mathbb{R}^n)$ esiste una funzione $f \in [f]$ boreliana. Quindi

$$L^p(\mathbb{R}^n) = L^p(\lambda^n|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}) = L^p(\lambda^n|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)})$$

è separabile. □

Non dimostreremo il teorema generale (11.7). Daremo invece una dimostrazione indipendente per la separabilità di $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 11.9. $L^p(\mathbb{R}^n)$ è separabile.

Osservazione 11.10. Notiamo che, se Ω è un aperto in \mathbb{R}^n , allora $L^p(\Omega)$ è canonicamente isometrico a $L^p(\mathbb{R}^n)$. Di conseguenza, il teorema vale con \mathbb{R}^n sostituito da un aperto arbitrario Ω .

Dimostrazione. Sia

$$\mathcal{R} = \left\{ \prod_{k=1}^n (a_k, b_k), \quad a_k, b_k \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Possiamo scrivere $\mathcal{R} = \{R_1, R_2, \dots\}$. Sia \mathcal{E} lo spazio vettoriale sul campo \mathbb{Q} il cui membro generico è una funzione della forma:

$$\sum_{k=1}^M (t_k + i s_k) \chi_{R_{i_k}},$$

con $t_i, s_i \in \mathbb{Q}$. Questo è un sottoinsieme numerabile di $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Mostriamo che \mathcal{E} è denso in $L^p(\mathbb{R}^n)$. Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $\varepsilon > 0$, esiste $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tale che:

$$\|f - g\|_p < \varepsilon.$$

Se $\text{supp } g \subseteq R \in \mathcal{R}$, allora g è uniformemente continua in R . Fissato $\delta > 0$, possiamo suddividere R in tanti piccoli rettangoli disgiunti A_1, A_2, \dots, A_M tali che:

$$|g(x) - g(y)| < \frac{\delta}{2}$$

se $x, y \in A_i$. Fissati $x_i \in A_i$, per $i = 1, 2, \dots, M$ esistono dei razionali t_i, s_i tali che:

$$|g(x_i) - t_i - is_i| < \frac{\delta}{2}.$$

Di conseguenza:

$$h = \sum_{i=1}^M (t_i + is_i) \chi_{A_i} \in \mathcal{E}$$

è tale che:

$$\|g - h\|_\infty < \delta.$$

Pertanto:

$$\|g - h\|_p \leq \|g - h\|_\infty |R|^{\frac{1}{p}} < \delta |R|^{\frac{1}{p}}$$

e:

$$\|f - h\|_p \leq \varepsilon + \delta |R|^{\frac{1}{p}}.$$

Poichè ε e δ sono arbitrari e R è fissato, esiste una successione $(h_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ tale che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - h_n\|_p \rightarrow 0.$$

Ciò dimostra la tesi. □

11.2.1 Non separabilità di $L^\infty(\mu)$

Definizione 11.11. Sia (X, \mathcal{M}, μ) uno spazio di misura. Un atomo è un insieme $A \subseteq X$ misurabile con $\mu(A) > 0$ e tale che se $B \subseteq A$ e $\mu(B) < \mu(A)$, allora $\mu(B) = 0$.

Teorema 11.12. $L^\infty(\mu)$ non è separabile, a meno che X non sia un'unione di un numero finito di atomi.

Come sopra, considereremo soltanto i casi $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e ℓ^∞ .

Lemma 11.13. Sia E uno spazio topologico e supponiamo che esista una famiglia $\{O_i\}$ tale che, per ogni $i \in I$, O_i è un aperto non vuoto di E , $O_i \cap O_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e I è non numerabile. Allora E non è separabile.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $S = \{s_1, s_2, \dots\}$ sia un sottoinsieme numerabile e denso di E . Per ogni $i \in I$, esiste un $s_i \in O_i$. Usando l'assioma della scelta, possiamo quindi costruire una funzione $f: I \rightarrow S$ tale che $f(i) \in O_i$ per ogni i . Poichè gli O_i sono disgiunti, la f è iniettiva. Di conseguenza I ha cardinalità minore o uguale a quella di S , che è numerabile, e ciò contraddice le ipotesi. □

Teorema 11.14. Sia (X, \mathcal{M}, μ) uno spazio di misura. Supponiamo che esista una famiglia non numerabile $\{E_i, i \in I\}$ di insiemi misurabili tali che:

$$\mu(E_i \Delta E_j) > 0 \quad (i \neq j).$$

Allora $L^\infty(\mu)$ non è separabile.

Dimostrazione. Poniamo

$$O_i = \left\{ f \in L^\infty(\mu) \mid \|f - \chi_{E_i}\|_\infty < \frac{1}{2} \right\}.$$

Notiamo che:

$$|\chi_{E_i}(x) - \chi_{E_j}(x)| = 1$$

per ogni $x \in E_i \Delta E_j$. Poichè quest'ultimo ha misura non nulla:

$$\|\chi_{E_j} - \chi_{E_i}\|_\infty = 1.$$

Di conseguenza, se $f \in O_i$, allora:

$$\|f - \chi_{E_j}\|_\infty \geq \|\chi_{E_i} - \chi_{E_j}\|_\infty - \|f - \chi_{E_i}\|_\infty > \frac{1}{2},$$

per cui $f \notin O_j$. Quindi gli O_i sono una famiglia non numerabile di sottoinsiemi aperti e disgiunti di $L^\infty(\mu)$. Per il lemma precedente, quest'ultimo non è numerabile. \square

Corollario 11.15. *Gli spazi $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e ℓ^∞ non sono separabili.*

Dimostrazione. Nel caso di $L^\infty(\mathbb{R}^N)$, possiamo considerare la famiglia:

$$\{B_r(x), r \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^N\}.$$

Nel caso di ℓ^∞ poniamo $I = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $E_i = i$. \square

11.3 Convolutioni

Teorema 11.16. *Siano $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, dove $1 \leq p \leq \infty$. Allora*

$$|f(\cdot)g(x - \cdot)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$. La convoluzione, definita quasi ovunque da:

$$(f * g)(x) \equiv \int f(y)g(x - y) d^n y$$

soddisfa $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e:

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1.$$

Dimostrazione. Per $p = 1$, questo è il Teorema 6.23, mentre il caso $p = \infty$ è banale. Supponiamo quindi $1 < p < \infty$ e sia $1 < q < \infty$ l'esponente coniugato di p .

Dalla disuguaglianza di Holder si ha:

$$\begin{aligned} \int |f(y)| |g(x - y)| dm(y) &= \int |g(x - y)|^{\frac{1}{q}} |f(y)| |g(x - y)|^{\frac{1}{p}} dm(y) \\ &\leq \|g\|_1^{\frac{1}{q}} \{(|f|^p * |g|)(x)\}^{\frac{1}{p}} \\ &< \infty \end{aligned}$$

per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Quindi $(f * g)(x)$ esiste per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Per vedere che questa definisce una funzione misurabile, possiamo limitarci a considerare il caso $f, g \geq 0$. In tal caso, possiamo scrivere:

$$\int f(y)g(x - y) dm(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int s_n(y; x) dm(y),$$

dove $s_n(\cdot; x)$ è una successione di funzioni semplici positive monotonamente convergenti a $f(\cdot)g(x - \cdot)$. Poichè $f * g$ è definita quasi ovunque dal limite puntuale di funzioni misurabili, questa è misurabile per la Proposizione 5.27 (la misura di Lebesgue è completa). Inoltre:

$$|(f * g)(x)|^p \leq \|g\|_1^{\frac{p}{q}} (|f|^p * |g|)(x)$$

per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Poichè il membro destro è in $L^1(\mathbb{R}^n)$, si ha $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e, dal caso $p = 1$, abbiamo:

$$\|f * g\|_p^p \leq \|g\|_1^{\frac{p}{q}} \|g\|_1 \|f\|_p^p,$$

da cui segue la tesi. \square

Definizione 11.17. Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione arbitraria e sia:

$$\mathcal{F} = \{V \subseteq \mathbb{R}^n \text{ aperto tale che } f = 0 \text{ q.o. in } U\},$$

$$U = \bigcup_{V \in \mathcal{F}} V.$$

Definiamo il supporto di f come $\text{Supp} f = U^c$.

Osservazione 11.18. Usiamo la lettera maiuscola per distinguere la definizione di supporto in teoria della misura dalla definizione standard usata in topologia:

$$\text{supp} f = \overline{\{x | f(x) \neq 0\}}.$$

Notiamo che, se $f_1 = f_2$ quasi ovunque, allora $\text{Supp} f_1 = \text{Supp} f_2$. Di conseguenza, possiamo parlare del supporto di una $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, intesa come classe di equivalenza.

Proposizione 11.19. $f = 0$ q.o. in U . Inoltre, se f è continua:

$$\text{Supp} f = \text{supp} f.$$

Dimostrazione. Sia

$$\mathcal{R} = \left\{ \prod_{k=1}^n (a_k, b_k), a_k, b_k \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Per ogni $V \in \mathcal{F}$, si ha:

$$V = \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k^V$$

per alcuni rettangoli $R_k^V \in \mathcal{R}$, in ciascuno dei quali $f = 0$ quasi ovunque. Quindi:

$$U = \bigcup_{V \in \mathcal{F}} \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k^V$$

è un'unione di alcuni rettangoli in \mathcal{R} , e poichè quest'ultimo è numerabile:

$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k,$$

dove $R_k \in \mathcal{R}$. Per ogni $k = 1, 2, \dots$, esiste $N_k \subseteq R_k$ tale che $m(N_k) = 0$ e $f(x) = 0$ se $x \in R_k \setminus N_k$. Di conseguenza, posto $N = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$, si ha $m(N) = 0$ e $f(x) = 0$ se $x \in U \setminus N$, vale a dire $f = 0$ quasi ovunque in U .

Supponiamo ora che f sia continua e poniamo $U = \mathbb{R}^n \setminus \text{Supp} f$. Se $x \in U$ e $B_r(x) \subseteq U$, poichè $m(B_r(x)) > 0$, esiste $x' \in B_r(x)$ tale che $f(x') = 0$. Quindi, esiste una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset U$ tale che $x_n \rightarrow x$ e $f(x_n) = 0$ per ogni n . Poichè f è continua, $f(x) = 0$. Quindi:

$$U \subseteq \{x | f(x) = 0\},$$

da cui:

$$\text{Supp} f \supseteq \{x | f(x) \neq 0\}$$

e, poichè $\text{Supp} f$ è chiuso:

$$\text{Supp} f \supseteq \overline{\{x | f(x) \neq 0\}} = \text{supp} f.$$

D'altra parte, se $V = \mathbb{R}^n \setminus \text{supp} f$, si ha $f(x) = 0$ per ogni $x \in V$. Poichè V è aperto, $V \in \mathcal{F}$ e quindi:

$$V \subseteq U,$$

da cui:

$$\text{supp} f \supseteq \text{Supp} f.$$

Il teorema è dimostrato. □

Teorema 11.20. Siano $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora:

$$\text{Supp}(f * g) \subseteq \overline{\text{Supp}f + \text{Supp}g}$$

Osservazione 11.21. Notiamo che se f e g hanno entrambe supporto compatto, allora

$$\overline{\text{Supp}f + \text{Supp}g} = \text{Supp}f + \text{Supp}g,$$

in quanto $\text{Supp}f + \text{Supp}g$ è compatto.

Dimostrazione. Sia x tale che:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| |g(x-y)| dm(y) < \infty.$$

Chiaramente:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dm(y) = \int_{\text{Supp}f \cap (x - \text{Supp}g)} f(y)g(x-y)dm(y),$$

per cui, se $(x - \text{Supp}g) \cap \text{Supp}f = \emptyset$, allora $(f * g)(x) = 0$. Ora,

$$x \notin \text{Supp}f + \text{Supp}g$$

equivale a:

$$(x - \text{Supp}g) \cap \text{Supp}f = \emptyset,$$

per cui:

$$(f * g)(x) = 0$$

per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus (\text{Supp}f + \text{Supp}g)$. Poichè $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\text{Supp}f + \text{Supp}g}$ è aperto, si ha:

$$\mathbb{R}^N \setminus \overline{\text{Supp}f + \text{Supp}g} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \text{Supp}(f * g)$$

ovvero:

$$\text{Supp}(f * g) \subseteq \overline{\text{Supp}f + \text{Supp}g}.$$

□

Teorema 11.22. Siano $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $f \in C^k_c(\mathbb{R}^n)$ per qualche $0 \leq k \leq \infty$. Allora $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ e $D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g$ per ogni multiindice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ con $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \leq k$.

Osservazione 11.23. Qui $C^k_c(\mathbb{R}^n) \equiv C_c(\mathbb{R}^n) \cap C^k(\mathbb{R}^n)$, mentre $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ è l'insieme delle funzioni f complesse misurabili tali che $\chi_K f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ per ogni $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto.

Dimostrazione. Notiamo innanzitutto che $f * g$ è ben definita, in quanto:

$$f(x - \cdot)g(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Fissato $x_0 \in \mathbb{R}^n$, esistono un compatto K e un $M > 0$ tale che:

$$\begin{aligned} |f(x-y)g(y)| &\leq M\chi_K(y)g(y) \\ \left| \frac{\partial f}{\partial x^i}(x-y)g(y) \right| &\leq M\chi_K(y)g(y) \end{aligned}$$

per ogni x tale che $|x - x_0| < 1$. Dal Teorema 5.71 segue allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f * g)(x) = (f * g)(x_0),$$

il che dimostra il teorema per $k = 0$.

Se $k \geq 1$, dal Teorema 5.73 segue che $f * g$ è differenziabile in x_0 e:

$$\frac{\partial(f * g)}{\partial x^i}(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} * g \right)(x_0).$$

Inoltre, poichè $\frac{\partial f}{\partial x^i} \in C_c(\mathbb{R}^n)$ si ha, dal caso $k = 0$, $f * g \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Proseguendo in questo modo, dimostriamo il teorema per induzione. □

11.4 Regolarizzazione per convoluzioni. Densità di $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Definizione 11.24. Una successione di funzioni $(\rho_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R})_{k \in \mathbb{N}}$ si dice una successione di mollificatori se:

- (1) $\rho_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$
- (2) $\text{supp} \rho_k \subseteq \overline{B_{\frac{1}{k}}(0)}$
- (3) $\rho_k \geq 0$
- (4) $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_k \, dm = 1$

Esempio 11.25. Data una qualsiasi funzione $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho \, dm = 1, \quad \text{supp} \rho \subseteq \overline{B_1(0)}$$

otteniamo una successione di mollificatori ponendo:

$$\rho_k(x) = k^n \rho(kx).$$

Un esempio è dato dalla funzione:

$$\tilde{\rho}(x) = \begin{cases} ce^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}, \quad \rho = \frac{\tilde{\rho}}{\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\rho} \, dm}.$$

Teorema 11.26. Sia $f \in C(\mathbb{R}^n)$ e sia $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione di mollificatori. Allora $\rho_k * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\rho_k * f \rightarrow f$ uniformemente nei compatti di \mathbb{R}^n .

Dimostrazione. Notiamo innanzitutto che, poichè $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$, $\rho_k * f$ è ben definita e di classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un compatto e sia dato $\varepsilon > 0$. Poichè f è uniformemente continua in ogni rettangolo $R \supseteq K$ chiuso e limitato, esiste un $\delta > 0$ tale che, per ogni $x \in K$:

$$|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon$$

per ogni $y \in B_\delta(0)$. Di conseguenza, se $\frac{1}{k} < \delta$:

$$|\rho_k * f(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \rho_k(y) |f(x-y) - f(x)| \, dm(y) < \varepsilon.$$

□

Teorema 11.27. Sia $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, e sia $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione di mollificatori. Allora

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\rho_k * f - f\|_p = 0.$$

Dimostrazione. Supponiamo prima $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Posto:

$$K = \overline{B_1(0)} + \text{supp} f,$$

per il Teorema 11.20 si ha:

$$\text{supp}(\rho_k * f) \subseteq \overline{B_{\frac{1}{k}}(0)} + \text{supp} f \subseteq K$$

Per il teorema precedente, $\rho_k * f \rightarrow f$ uniformemente in K , per cui:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\rho_k * f - f\|_p = 0.$$

Per il caso generale, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $f_1 \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tale che:

$$\|f_1 - f\|_p < \varepsilon.$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned} \|\rho_k * f - f\|_p &\leq \|\rho_k * (f - f_1)\|_p + \|\rho_k * f_1 - f_1\|_p + \|f_1 - f\|_p \\ &\leq 2\|f_1 - f\|_p + \|\rho_k * f_1 - f_1\|_p \\ &\leq 3\varepsilon \end{aligned}$$

per k sufficientemente grande. Poichè $\varepsilon > 0$ è arbitrario, ne segue la tesi.

□

Teorema 11.28. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto. Allora $C_c^\infty(\Omega)$ è denso in $L^p(\Omega)$ per ogni $1 \leq p < \infty$.

Dimostrazione. Per il Teorema 11.3 è sufficiente dimostrare che $C_c(\Omega) \subseteq \overline{C_c^\infty(\Omega)}$. Data $f \in C_c(\Omega)$, possiamo considerare f come un elemento di $C_c(\mathbb{R}^N)$ ponendo:

$$f(x) = 0 \quad x \notin \Omega.$$

Sia $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di mollificatori. Poichè:

$$d(\text{supp} f, \mathbb{R}^N \setminus \Omega) > 0,$$

si ha

$$\text{supp} f + \overline{B_{\frac{1}{n}}(0)} \subseteq \Omega$$

definitivamente. Di conseguenza:

$$\text{supp}(\rho_n * f) \subseteq \Omega.$$

Dal Teorema 11.22 abbiamo quindi $\rho_n * f \in C_c^\infty(\Omega)$ definitivamente e, dal Teorema 11.27:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\rho_n * f - f\|_p = 0.$$

□

Teorema 11.29. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto e sia $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tale che:

$$\int_{\Omega} u \varphi \, dm = 0$$

per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Allora $u = 0$ q.o. in Ω .

Dimostrazione. Sia $K \subseteq \Omega$ un compatto e sia $g \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ tale che $g(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N \setminus K$. Mostriamo che:

$$\int_{\Omega} u g \, dm = 0.$$

Sia $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di mollificatori e sia

$$\varphi_n = \rho_n * g.$$

Ogni $\varphi_n \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap C^\infty(\mathbb{R}^N)$, per i Teoremi 11.16 e 11.22. Poniamo:

$$K_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \mid d(x, K) \leq \frac{1}{n} \right\}.$$

Ogni K_n è un compatto, dato che la funzione $d(\cdot, K)$ è una funzione continua. Inoltre, per n sufficientemente grande, $K_n \subseteq \Omega$. Dal Teorema 11.20:

$$\text{supp} \varphi_n \subseteq \overline{B_{\frac{1}{n}}(0) + \text{supp} g} \subseteq K_n \subseteq \Omega$$

definitivamente, per cui $\varphi_n \in C_c^\infty(\Omega)$ definitivamente. Per il Teorema 11.27,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n - g\|_1 = 0,$$

per cui, per il Teorema 5.77, a meno di sottosuccessioni:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) \rightarrow g(x) \quad \text{q.o.}$$

Notando che $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots$, esiste un $m \in \mathbb{N}$ tale che:

$$K_n \subseteq \Omega$$

per ogni $n \geq m$. Per tali n , poichè $\|\varphi_n\|_\infty \leq \|g\|_\infty$, si ha:

$$|u(x)\varphi_n(x)| \leq \|g\|_\infty \chi_{K_m}(x) |u(x)|$$

quasi ovunque in Ω , dove il membro destro è una funzione $L^1(\Omega)$. Dal teorema della convergenza dominata segue quindi:

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u \varphi_n \, dm = \int_{\Omega} u g \, dm.$$

Se ora scegliamo:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{u^*(x)}{|u(x)|} \chi_K & u(x) \neq 0 \\ 0 & u(x) = 0 \end{cases}$$

abbiamo:

$$0 = \int_{\Omega} g u \, dm = \int_K |u| \, dm.$$

Esiste d'altra parte una successione di compatti $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots$ tali che:

$$\begin{aligned} \cup_n K_n &= F, \\ m(\Omega \setminus F) &= 0. \end{aligned}$$

Perciò:

$$\int_{\Omega} |u| \, dm = \int_F |u| \, dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{K_n} |u| \, dm = 0.$$

Quindi $u = 0$ quasi ovunque in Ω , come volevasi dimostrare. □

11.5 Duale di L^p

Siano μ una misura, $1 \leq p \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Data $g \in L^q(\mu)$ e $f \in L^p(\mu)$ poniamo:

$$\langle g, f \rangle = \int_X g^* f \, d\mu.$$

La disuguaglianza di Holder mostra che $g^* f \in L^1(\mu)$ per ogni $f \in L^p(\mu)$, per cui $\langle g, \cdot \rangle$ è ben definito come funzionale lineare su $L^p(\mu)$, e inoltre:

$$|\langle g, f \rangle| \leq \|g\|_q \|f\|_p,$$

per cui $\langle g, \cdot \rangle$ è limitato.

Nel seguito, adotteremo la notazione $\|\varphi\|_{p'}$ per la norma di un funzionale lineare $\varphi \in L^p(\mu)'$.

Teorema 11.30. *Se $1 \leq q < \infty$ e $g \in L^q(\mu)$, allora*

$$L^q(\mu) \ni g \mapsto \langle g, \cdot \rangle \in L^p(\mu)'$$

è un'isometria. In altri termini:

$$\|\langle g, \cdot \rangle\|_{p'} = \|g\|_q.$$

Se μ è σ -finita il risultato vale anche per $q = \infty$.

Dimostrazione. Supponiamo $1 \leq q < \infty$. Se $\|g\|_q = 0$, allora $g = 0$, da cui segue $\langle g, \cdot \rangle = 0$. Altrimenti, non è restrittivo supporre $\|g\|_q = 1$. Definiamo f tramite²⁰:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } g(x) = 0, \\ |g|^{\frac{q}{p}} \frac{g(x)}{|g(x)|} & \text{se } g(x) \neq 0. \end{cases}$$

²⁰Nel caso $q = 1$, ovvero $p = \infty$, possiamo porre:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } g(x) = 0, \\ \frac{g(x)}{|g(x)|} & \text{se } g(x) \neq 0. \end{cases}$$

Si ha $f \in L^p(\mu)$, $\|f\|_p = 1$ e:

$$\langle g, f \rangle = \int_X |g|^{\frac{q}{p}+1} d\mu = \int_X |g|^q d\mu = 1 = \|g\|_q,$$

da cui segue la tesi per $1 \leq q < \infty$.

Consideriamo ora il caso $q = \infty$, dove μ è σ -finita. Se $\|g\|_\infty = 0$, di nuovo, il risultato è ovvio. Altrimenti, fissato $\varepsilon > 0$ e posto:

$$A = \{|g(x)| > \|g\|_\infty - \varepsilon\},$$

per definizione di sup essenziale, $\mu(A) > 0$. Poichè μ è σ -finita, esiste un sottoinsieme $B \subseteq A$ tale che:

$$0 < \mu(B) < \infty.$$

Poniamo:

$$f(x) = \frac{\chi_B(x) g(x)}{\mu(B) |g(x)|}.$$

Abbiamo:

$$\langle g, f \rangle = \frac{1}{\mu(B)} \int_B |g| d\mu \geq \|g\|_\infty - \varepsilon,$$

da cui:

$$\|\langle g, \cdot \rangle\|_{1'} \geq \|g\|_\infty - \varepsilon$$

e, poichè $\varepsilon > 0$ è arbitrario:

$$\|\langle g, \cdot \rangle\|_{1'} = \|g\|_\infty.$$

Il teorema è dimostrato. □

Per mostrare che l'isometria $g \mapsto \langle g, \cdot \rangle$ è suriettiva, avremo bisogno del seguente lemma.

Lemma 11.31. *Sia (X, \mathcal{M}, μ) uno spazio di misura finito e sia $1 \leq p \leq \infty$. Sia g una funzione misurabile su X tale che $gs \in L^1(\mu)$ per ogni funzione semplice s e:*

$$M_q(g) = \sup \left\{ \left| \int_X gs d\mu \right| \mid s \text{ semplice, } \|s\|_p = 1 \right\} < \infty.$$

Allora $g \in L^q(\mu)$ e $\|g\|_q = M_q(g)$.

Dimostrazione. Dalla disuguaglianza di Holder, si ha:

$$M_q(g) \leq \|g\|_q,$$

per cui occorre dimostrare la disuguaglianza opposta.

Sia data $f \in L^\infty(\mu)$ con $\|f\|_p = 1$. Un'applicazione del Teorema 5.24, mostra che esiste una successione di funzioni semplici s_n tali che $|s_n| \leq |f|$ e $s_n \rightarrow f$ puntualmente. Poichè $|f| \leq \|f\|_\infty$, e il membro destro è una funzione semplice, si ha $gf \in L^1(\mu)$. Per il teorema della convergenza dominata, si ha allora $\|s_n\|_p \rightarrow \|f\|_p$ e:

$$\left| \int_X gf d\mu \right| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X gs_n d\mu \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n\|_p M_q(g) = \|f\|_p M_q(g).$$

Consideriamo separatamente i casi $p > 1$ e $p = 1$.

Nel caso $p > 1$, sia ϕ_n una successione di funzioni semplici tali che $\phi_n \rightarrow g$ puntualmente e $|\phi_n| \leq |g|$ e poniamo:

$$f_n = \begin{cases} \frac{|\phi_n|^{q-1} g^*(x)}{\|\phi_n\|_q^{q-1} |g(x)|} & g(x) \neq 0, \\ 0 & g(x) = 0. \end{cases}$$

Abbiamo $\|f_n\|_p = 1$ e, dal lemma di Fatou:

$$\begin{aligned} \|g\|_q^q &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\phi_n\|_q^q \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\int_X |f_n \phi_n| d\mu \right)^q \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\int_X |f_n g| d\mu \right)^q \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \int_X f_n g d\mu \right|^q \\ &\leq M_q^q \end{aligned}$$

il che dimostra la tesi per il caso $q < \infty$.

Per il caso $p = 1$, fissiamo $\varepsilon > 0$ e poniamo:

$$A = \{x \mid |g(x)| \geq M_\infty(g) + \varepsilon\}.$$

Se $\mu(A) > 0$, esiste $B \subseteq A$ tale che $0 < \mu(B) < \infty$. Se $f = \frac{1}{\mu(B)} \chi_B \frac{g^*}{|g|}$, allora:

$$\left| \int_X g f d\mu \right| = \frac{1}{\mu(B)} \int_B |g| d\mu \geq M_\infty(g) + \varepsilon,$$

il che contraddice quanto detto all'inizio della dimostrazione. Ne segue che $\mu(A) = 0$ e, di conseguenza:

$$\|g\|_\infty \leq M_\infty(g) + \varepsilon$$

per ogni $\varepsilon > 0$, da cui:

$$\|g\|_\infty \leq M_\infty(g)$$

e, poichè la disuguaglianza opposta è immediata, ciò dimostra il Lemma. \square

Teorema 11.32. Siano (X, \mathcal{M}, μ) uno spazio di misura σ -finito, $1 \leq p < \infty$ e $\Phi: L^p(\mu) \rightarrow \mathbb{C}$ un funzionale lineare continuo. Allora esiste un'unica $g \in L^q(\mu)$ tale che $\Phi = \langle g, \cdot \rangle$.

Dimostrazione. Supponiamo prima la misura μ finita. Allora, se $E \in \mathcal{M}$, la funzione $\chi_E \in L^p(\mu)$ e possiamo definire:

$$\nu(E) \equiv \Phi(\chi_E) \quad (E \in \mathcal{M}).$$

Si verifica facilmente che la ν così definita è una misura complessa. Infatti, se

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i,$$

è un'unione disgiunta di insiemi misurabili, si ha:

$$\chi_E = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n},$$

dove il limite si può intendere nel senso della norma L^p , per il teorema della convergenza dominata. Poichè Φ è continuo:

$$\nu(E) = \Phi\left(\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(\chi_{E_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n).$$

Quindi ν è numerabilmente additiva e, poichè $\nu(\emptyset) = \Phi(0) = 0$, è una misura complessa. Inoltre, ν è assolutamente continua rispetto a μ , in quanto se $\mu(E) = 0$, allora $\chi_E = 0$ quasi ovunque, per cui χ_E è un rappresentante di $0 \in L^p(\mu)$ e, di conseguenza:

$$\nu(E) = \Phi(0) = 0.$$

Per il Teorema di Radon-Nikodym:

$$\nu(E) = \int_X g^* \chi_E d\mu = \langle g, \chi_E \rangle$$

per qualche $g \in L^1(\mu)$. Quindi:

$$\Phi(\chi_E) = \langle g, \chi_E \rangle$$

per ogni E misurabile, da cui, per linearità:

$$\Phi(s) = \langle g, s \rangle$$

per ogni funzione semplice s .

Poichè:

$$|\langle g, s \rangle| = |\Phi(s)| \leq \|\Phi\|_{p'} \|s\|_p,$$

dal Lemma 11.31 segue $g \in L^q(\mu)$. Dunque, Φ e $\langle g, \cdot \rangle$ sono funzionali lineari continui che coincidono sulle funzioni semplici. Poichè queste ultime sono dense in $L^p(\mu)$, si ha:

$$\Phi = \langle g, \cdot \rangle,$$

il che dimostra l'esistenza nel caso in cui μ è finita.

Se ora μ è σ -finita, poniamo

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

dove $X_i \cap X_j$ per $i \neq j$ e $\mu(X_n) < \infty$, e indichiamo con $\mu_n = \mu(\cdot \cap X_n)$. Esiste un'inclusione isometrica canonica di $L^p(\mu_n)$ in $L^p(\mu)$, data da:

$$L^p(\mu_n) \ni f \mapsto \chi_{X_n} f \in L^p(\mu).$$

Chiaramente $\Phi|_{L^p(\mu_n)}$ è ancora un funzionale lineare e continuo e, per il teorema nel caso finito, esiste $g_n \in L^q(\mu_n)$ tale che:

$$\Phi(f) = \langle g_n, f \rangle$$

per ogni $f \in L^p(\mu_n)$. Poichè

$$\Phi|_{L^q(\mu_n)}(\chi_E) = 0$$

se $E \in X \setminus X_n$, si ha

$$\langle g_n, \chi_E \rangle = 0,$$

da cui $g_n(x) = 0$ quasi ovunque in $X \setminus X_n$ e, a meno di ridefinire $g_n(x)$ in un insieme di misura nulla, $g_n(x) = 0$ ovunque in $X \setminus X_n$.

Poniamo:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$$

(poichè gli X_n sono disgiunti, per ogni $x \in X$ soltanto un membro della somma a destra è diverso da zero). Notiamo che:

$$\sum_{n=1}^N g_n(x)$$

rappresenta il funzionale

$$\Phi|_{L^q(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_N)},$$

per cui è $\sum_{n=1}^N g_n \in L^q(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_N)$ e, poichè ogni g_1, g_2, \dots, g_N è nulla fuori da

$$X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_N,$$

si ha $\sum_{n=1}^N g_n \in L^q(\mu)$. Dal lemma di Fatou:

$$\int_X |g|^q d\mu \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \int_X \sum_{n=1}^N |g_n|^q = \liminf_{N \rightarrow \infty} \int_X \left| \sum_{n=1}^N g_n \right|^q.$$

Ma:

$$\int_X \left| \sum_{n=1}^N g_n \right|^q = \left\| \Phi|_{L^q(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_N)} \right\|^q \leq \|\Phi\|^q,$$

per cui:

$$\int_X |g|^q d\mu \leq \|\Phi\|^q,$$

da cui $g \in L^q(\mu)$. Infine, se $f \in L^p(\mu)$, allora:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| f - \left(\sum_{n=1}^N \chi_{X_n} \right) f \right\|_p = 0,$$

per cui

$$\Phi(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(\chi_{X_n} f) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X g_n f d\mu = \int_X g f d\mu,$$

dove l'ultima uguaglianza segue da:

$$\begin{aligned} |g_n f| &\leq |g f| \in L^1(\mu), \\ g_n(x) f(x) &\rightarrow g(x) f(x). \end{aligned}$$

Per concludere, dobbiamo dimostrare l'unicità di g . Supponiamo che g_1 e g_2 siano funzioni in $L^q(\mu)$ tali che:

$$\int_X g_1^* f d\mu = \Phi(f) = \int_X g_2^* f d\mu$$

per ogni $f \in L^p(\mu)$. Allora:

$$\int_X (g_1 - g_2)^* f d\mu = 0$$

per ogni $f \in L^p(\mu)$. In particolare, ciò è vero per ogni f semplice e dal Lemma segue:

$$\|g_1 - g_2\|_q = 0,$$

ovvero $g_1 = g_2$. □

11.5.1 Caso $p = \infty$

Si dimostra che l'inclusione $L^1(\mu) \subseteq L^\infty(\mu)$ è un'inclusione stretta, a meno che X non sia costituito da un numero finito di atomi. Vediamo qui esplicitamente il caso $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Consideriamo il funzionale $\Phi_0: C_c(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ definito da:

$$\Phi_0(f) = f(0).$$

Questo funzionale è lineare e continuo rispetto alla norma $p = \infty$ su $C_c(\mathbb{R}^n)$ e si può estendere, per il teorema di Hahn-Banach, a un funzionale lineare continuo Φ definito su tutto $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Mostriamo che, per questo funzionale, non esiste $g \in L^1(\mu)$ tale che:

$$\Phi(f) = \langle g, f \rangle$$

per ogni $f \in L^\infty(\mu)$. Infatti, se esistesse una tale g , per ogni funzione continua a supporto compatto in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ si avrebbe:

$$\langle g, f \rangle = 0$$

che, per il Teorema 11.29, implica $g = 0$ per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Di conseguenza $g = 0$ quasi ovunque e:

$$\Phi(f) = \langle g, f \rangle = 0$$

per ogni $f \in L^\infty(\mu)$. In particolare, si avrebbe $\Phi_0(f) = 0$ per ogni $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$, il che è chiaramente un assurdo.

11.5.2 Appendice: duale di uno spazio vettoriale normato

In quanto segue, indicheremo con E un generico spazio vettoriale normato sul campo complesso.

Definizione 11.33. Sia $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ un funzionale lineare. Poniamo:

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|. \quad (11.3)$$

Un funzionale f tale che $\|f\| < \infty$ si dice limitato.

Osservazione 11.34. Notiamo che:

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|},$$

da cui segue in particolare:

$$|f(x)| \leq \|f\| \|x\|$$

per ogni $x \in E$.

Proposizione 11.35. *Il funzionale f è limitato se e solo se è continuo se e solo se è continuo in un punto.*

Dimostrazione. Se f è limitato, allora:

$$|f(x) - f(y)| = |f(x - y)| = \|f\| \|x - y\|,$$

per cui f è Lipschitziano, quindi continuo e, naturalmente, continuo in ciascun punto. Supponiamo che f sia continuo in $x_0 \in E$. Esiste un $\delta > 0$ tale che:

$$|f(x) - f(x_0)| < 1$$

se

$$\|x - x_0\| < \delta.$$

Se $\|y\| < \delta$:

$$|f(y)| = |f(y + x_0) - f(x_0)| < 1,$$

per cui, se $\|z\| = 1$:

$$\delta |f(z)| = |f(\delta z)| < 1, \quad |f(z)| < \frac{1}{\delta},$$

ovvero f è limitato, come volevasi dimostrare. □

Definizione 11.36. Il duale E' di E è lo spazio dei funzionali lineari limitati su E .

Teorema 11.37. *Il duale E' , con la norma (11.3), è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. Chiaramente E' è uno spazio vettoriale complesso e si vede facilmente che la (11.3) definisce una norma. Mostriamo che E' è completo nella norma (11.3).

Sia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E'$ una successione di Cauchy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_{n+p} - f_n\| = 0$$

per ogni $p \geq 0$. Per ogni $x \in E$, la successione $f_n(x)$ è di Cauchy e, poichè \mathbb{C} è completo, converge a un limite $f(x)$.

Il funzionale f così definito è chiaramente lineare. Inoltre, fissato $\varepsilon > 0$, se $\|x\| = 1$:

$$\begin{aligned} |(f - f_n)(x)| &= |f(x) - f_{n+p}(x)| + |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \\ &= |f(x) - f_{n+p}(x)| + \|f_{n+p} - f_n\| \\ &\leq |f(x) - f_{n+p}(x)| + \varepsilon \end{aligned}$$

per n sufficientemente grande. Passando al limite per $p \rightarrow \infty$:

$$|(f - f_n)(x)| \leq \varepsilon$$

e, poichè la stima non dipende da x :

$$\|f - f_n\| \leq \varepsilon.$$

Ne segue che f è limitato e $f_n \rightarrow f$, il che conclude la dimostrazione del teorema. □

Parte IV

Appendici

A Teoria della probabilità

In questa appendice discutiamo alcuni teoremi base di teoria della probabilità, che sono conseguenze più o meno immediate della teoria della misura sviluppata in queste note. Introduciamo la seguente terminologia:

Definizione A.1. Una terna (Ω, \mathcal{E}, P) , dove Ω è un insieme, \mathcal{E} una σ -algebra e P una misura positiva è detta *spazio di probabilità* se:

$$P(\Omega) = 1.$$

I sottoinsiemi misurabili $E \subseteq \Omega$ vengono chiamati *eventi*. Due eventi E_1, E_2 si dicono incompatibili se $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. L'evento Ω è chiamato l'*evento certo*, mentre \emptyset è chiamato l'*evento impossibile*. Le funzioni misurabili $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (oppure \mathbb{R}, \mathbb{C}) sono chiamate *variabili casuali*.

A.1 Funzioni di distribuzione

Esempio A.2. Sia $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una variabile casuale reale. Sia $P_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ la misura di probabilità boreliana definita da:

$$P_X(E) = P(X^{-1}(E)) \quad E \subseteq \mathbb{R}.$$

Sia $F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ definita da:

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x]). \quad (\text{A.1})$$

La F_X è detta funzione di distribuzione della variabile X . Se F_X è assolutamente continua, allora la funzione:

$$f_X = F_X'$$

è detta densità di probabilità della variabile X .

Osservazione A.3. La F_X è per definizione continua a sinistra e la misura di Stieltjes definita da F_X coincide con P_X . Di conseguenza possiamo scrivere la probabilità dell'evento $\{X \in E\}$ come:

$$P_X(E) = \int_E dF_X(x).$$

La misura di Stieltjes è assolutamente continua se e solo se lo è F_X . In tal caso, per il teorema di Lebesgue-Radon-Nikodym, possiamo scrivere $dF_X(x) = f_X(x)dx$, dove

$$f_X(x) = F_X'(x) \quad \text{q.o. } [m].$$

La probabilità dell'evento $\{X \in E\}$ si scrive in tal caso:

$$P_X(E) = \int_E f_X(x)dx.$$

A.2 Valori attesi

Definizione A.4. Sia $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una variabile casuale. Se $X \in L^1(P)$, si definisce il valore atteso della variabile X :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega). \quad (\text{A.2})$$

Osservazione A.5. Se la variabile X è positiva, indicheremo sempre con $\mathbb{E}(X)$ il membro destro della (A.2), a prescindere che questo sia finito o meno.

Notiamo che se X ha un valore atteso finito (vale a dire, $X \in L^1(P)$), allora si ha:

$$P(\{|X| \geq n\}) = o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Di fatti:

$$nP(\{|X| \geq n\}) = n \int_{\{|X| \geq n\}} dP \leq \int_{\{|X| \geq n\}} |X| dP$$

e l'ultimo membro per $n \rightarrow \infty$ se $X \in L^1(P)$.

Teorema A.6. *Sia $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una variabile casuale e sia F_X la sua funzione di distribuzione. Se $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione boreliana allora $g(X) \in L^1(P)$ se e solo se $g \in L^1(F_X)$ e, in tal caso:*

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{\mathbb{R}} g(x) dF_X(x). \quad (\text{A.3})$$

Dimostrazione. Se $g = \chi_E$ è la funzione caratteristica di un insieme di Borel, la (A.3) segue dalla definizione della misura di Stieltjes dF_X . Quindi il teorema è vero per le funzioni caratteristiche e, per linearità, per le funzioni semplici. Se ora g è una funzione positiva e (s_n) è una successione di funzioni semplici convergenti monotonamente a g , allora dal teorema della convergenza monotona si ha:

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{\Omega} g(X(\omega)) dP(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} s_n(X(\omega)) dP(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} s_n(x) dF_X(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x) dF_X(x).$$

Se ora g è una funzione complessa arbitraria, per quanto visto, $|g(X)| \in L^1(P)$ se e solo se $|g| \in L^1(F_X)$. In tal caso, lavorando separatamente con la parte immaginaria e reale (positiva e negativa), otteniamo la tesi. \square

A.3 Disuguaglianze

Teorema A.7 (Disuguaglianze di Chebychev). *Sia $g: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ una funzione boreliana pari.*

(i) *Se $f(x) \geq b > 0$ per $|x| \geq a > 0$, allora:*

$$P(\{|X| \geq a\}) \leq \frac{\mathbb{E}(f(X))}{b}. \quad (\text{A.4})$$

Se $f(x)$ è non decrescente e $f(a) \neq 0$, la tesi vale con $b = f(a)$.

(ii) *Se $f(x) \leq M$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $f(x) \leq b$ per $|x| < a$, allora:*

$$P(\{|X| \geq a\}) \geq \frac{\mathbb{E}(f(X)) - b}{M}. \quad (\text{A.5})$$

Se $f(x)$ è non decrescente e $\|X\|_{\infty} < \infty$, la tesi vale con $b = f(a)$ e $M = f(\|X\|_{\infty})$.

Dimostrazione. La (i) segue da:

$$\mathbb{E}(f(X)) = \int_{\Omega} f(X) dP \geq \int_{\{|X| \geq a\}} f(X) dP \geq bP(\{|X| \geq a\}),$$

mentre la (ii) segue da:

$$\mathbb{E}(f(X)) = \int_{\{|X| \geq a\}} f(X) dP + \int_{\{|X| < a\}} f(X) dP \leq K \cdot P(\{|X| \geq a\}) + b.$$

I casi particolari indicati si verificano immediatamente. \square

Corollario A.8. Sia $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una variabile casuale reale. Allora:

$$P(\{|X - \mathbb{E}(X)| \geq a\}) \leq \frac{\sigma^2(X)}{a^2}, \quad (\text{A.6})$$

dove:

$$\sigma^2(X) \equiv \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) \quad (\text{A.7})$$

è la varianza di X . Se inoltre $|X(\omega)| \leq C$ per ogni $\omega \in \Omega$, allora:

$$P(\{|X - \mathbb{E}(X)| \geq a\}) \geq \frac{\sigma^2(X) - a^2}{C^2} \quad (\text{A.8})$$

Dimostrazione. Segue immediatamente dal teorema precedente con $X \rightarrow X - \mathbb{E}(X)$ e $f(x) = x^2$. \square

Teorema A.9 (Disuguaglianza di Paley-Zygmund). Sia $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una variabile casuale tale che $\mathbb{E}(X^2) < \infty$ e $\mathbb{E}(X) > 0$. Se $0 \leq \theta \leq 1$, allora:

$$P(\{X > \theta \mathbb{E}(X)\}) \geq (1 - \theta)^2 \frac{\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)}. \quad (\text{A.9})$$

Dimostrazione. Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwartz, abbiamo:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X)(1 - \theta) &= \int_{\Omega} (X(\omega) - \theta \mathbb{E}(X)) dP(\omega) \\ &\leq \int_{\{X > \theta \mathbb{E}(X)\}} (X(\omega) - \theta \mathbb{E}(X)) dP(\omega) \\ &\leq \sqrt{P(\{X > \theta \mathbb{E}(X)\}) \int_{\{X > \theta \mathbb{E}(X)\}} (X(\omega) - \theta \mathbb{E}(X))^2 dP(\omega)} \end{aligned}$$

per cui:

$$\mathbb{E}(X)^2(1 - \theta)^2 \leq P(\{X > \theta \mathbb{E}(X)\}) \int_{\{X > \theta \mathbb{E}(X)\}} (X(\omega) - \theta \mathbb{E}(X))^2 dP(\omega).$$

D'altra parte:

$$\begin{aligned} \int_{\{X > \theta \mathbb{E}(X)\}} (X(\omega) - \theta \mathbb{E}(X))^2 dP(\omega) &\leq \int_{\Omega} (X(\omega) - \theta \mathbb{E}(X))^2 dP(\omega) \\ &= \mathbb{E}(X^2) - 2\theta \mathbb{E}(X)^2 + \theta^2 \mathbb{E}(X)^2 \\ &\leq \mathbb{E}(X^2) - \theta^2 \mathbb{E}(X)^2 \\ &\leq \mathbb{E}(X^2). \end{aligned}$$

Mettendo tutto insieme, si ottiene la \square

A.4 Generalizzazioni a vettori casuali

Definizione A.10. Sia $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_N): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$, dove le X_k sono variabili casuali reali. Sia $P_{\mathbf{X}}$ la misura di probabilità boreliana su \mathbb{R}^N definita da:

$$P_{\mathbf{X}}(E) = P(\mathbf{X}^{-1}(E)).$$

La funzione di distribuzione di \mathbf{X} è la $F_{\mathbf{X}}: \mathbb{R}^N \rightarrow [0, 1]$ definita da:

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_N) = P_{\mathbf{X}}((-\infty, x_1) \times (-\infty, x_2) \times \dots \times (-\infty, x_N)).$$

Osservazione A.11. Analogamente al caso unidimensionale, la misura di probabilità $P_{\mathbf{X}}$ coincide con la misura di Stieltjes su \mathbb{R}^N definita dalla funzione continua a sinistra $F_{\mathbf{X}}$. Inoltre, per ogni $1 \leq M \leq N$, la funzione $F_{\mathbf{X}}^{(M)}: \mathbb{R}^M \rightarrow [0, 1]$ definita da:

$$F_{\mathbf{X}}^{(M)}(x_1, x_2, \dots, x_M) = F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_M, +\infty, \dots, +\infty)$$

definisce una funzione di distribuzione su \mathbb{R}^M che coincide con la funzione di distribuzione di $\mathbf{X}^{(M)} = (X_1, X_2, \dots, X_M)$, come si verifica immediatamente dalla definizione. Di conseguenza, la misura di Stieltjes associata a $F_{\mathbf{X}}^{(M)}$ coincide con la misura di probabilità $P_{\mathbf{X}^{(M)}}$ introdotta qui sopra. In questo contesto, la $F_{\mathbf{X}}^{(M)}$ è detta una *funzione di distribuzione marginale*.

In modo analogo al caso unidimensionale, se la $F_{\mathbf{X}}$ è differenziabile con continuità, si può introdurre la *densità di probabilità*:

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_N) = \frac{\partial^N F_{\mathbf{X}}}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_N}(x_1, x_2, \dots, x_N).$$

Quest'ultima è positiva, come si verifica integrando $f_{\mathbf{X}}$ in un quadrato di lato $\varepsilon > 0$ arbitrario e notando che $F_{\mathbf{X}}$ soddisfa

$$\sum_{\{\alpha_k=0,1\}} (-1)^{\sum_k \alpha_k} F_{\mathbf{X}}(x_1 - \alpha_1 \varepsilon_1, x_2 - \alpha_2 \varepsilon_2, \dots, x_M - \alpha_N \varepsilon_N) \geq 0$$

per ogni $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N > 0$.

Come nel caso unidimensionale, i valori attesi di una variabile casuale della forma $g(\mathbf{X}) \in L^1(P)$ si possono scrivere:

$$\mathbb{E}(g(\mathbf{X})) = \int_{\mathbb{R}^N} g(\mathbf{x}) dF_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}),$$

e, nel caso in cui la $F_{\mathbf{X}}$ sia differenziabile con continuità:

$$\mathbb{E}(g(\mathbf{X})) = \int_{\mathbb{R}^N} g(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d^N \mathbf{x}.$$

A.5 Indipendenza

Definizione A.12. Sia $\mathfrak{A} = \{A_i\}$ una collezione di eventi (finita o numerabile). Allora \mathfrak{A} si dice una decomposizione di Ω se $A_i \cap A_j = \emptyset$ per $i \neq j$ e $\cup_i A_i = \Omega$.

Definizione A.13. Siano $\mathfrak{A}^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, N$, delle decomposizioni di Ω . Le decomposizioni si dicono *indipendenti* se vale la condizione:

$$P(A_{i_1}^{(1)} \cap A_{i_2}^{(2)} \cap \dots \cap A_{i_N}^{(N)}) = P(A_{i_1}^{(1)})P(A_{i_2}^{(2)}) \dots P(A_{i_N}^{(N)}) \quad (\text{A.10})$$

dove $A_{i_k}^{(k)} \in \mathfrak{A}^{(k)}$ per $k = 1, 2, \dots, N$. In particolare, se A e B sono due eventi, questi si dicono indipendenti se le decomposizioni $\mathfrak{A} = \{A, \Omega \setminus A\}$ e $\mathfrak{B} = \{B, \Omega \setminus B\}$ sono indipendenti, il che ammonta a richiedere:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \quad (\text{A.11})$$

Definizione A.14. Siano X_i , $i = 1, 2, \dots, N$ delle variabili casuali reali. Queste si dicono indipendenti se:

$$P(\{X_1 \in E_1, X_2 \in E_2, \dots, X_N \in E_N\}) = P(\{X_1 \in E_1\})P(\{X_2 \in E_2\}) \dots P(\{X_N \in E_N\}) \quad (\text{A.12})$$

dove E_i sono sottoinsiemi boreliani della retta reale.

Osservazione A.15. Più in generale, se $u: \Omega \rightarrow \Omega'$ è una funzione arbitraria, possiamo definire una σ -algebra su Ω' dichiarando misurabili gli insiemi $A' \subseteq \Omega'$ per i quali $A \equiv u^{-1}(A')$ è misurabile. Per questi insiemi, possiamo definire una probabilità tramite $P'(A') = P(A)$, e si vede facilmente che P' è una misura di probabilità su Ω' . In questo modo, la definizione di indipendenza di variabili casuali (A.12) può essere estesa a funzioni arbitrarie.

Osservazione A.16. Il concetto di indipendenza di N decomposizioni $\mathfrak{U}^{(k)}$ si può formulare in termini di indipendenza di variabili casuali. Infatti, sia:

$$\mathfrak{U}^{(k)} = \left\{ A_{i_k}^{(k)}, 1 \leq i_k \leq r_k \right\}.$$

Definiamo le variabili casuali:

$$X_k = \sum_{i_k=1}^{r_k} i_k \cdot \chi_{A_{i_k}} \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

Abbiamo:

$$P(\{X_1 \in E_1, X_2 \in E_2, \dots, X_N \in E_N\}) = P\left(\bigcap_{k=1}^N \bigcup_{i_k \in E_k} A_{i_k}^{(k)}\right) = \sum_{\{i_k \in E_k, k=1,2,\dots,N\}} P\left(\bigcap_{k=1}^N A_{i_k}^{(k)}\right).$$

Se le decomposizioni $\mathfrak{U}^{(k)}$ sono indipendenti, allora il membro destro è:

$$\begin{aligned} \sum_{\{i_k \in E_k, k=1,2,\dots,N\}} P\left(\bigcap_{k=1}^N A_{i_k}^{(k)}\right) &= \sum_{\{i_k \in E_k, k=1,2,\dots,N\}} P(A_{i_1}^{(1)})P(A_{i_2}^{(2)}) \cdots P(A_{i_N}^{(N)}) \\ &= \left[\sum_{i_1 \in E_1} P(A_{i_1}^{(1)}) \right] \left[\sum_{i_2 \in E_2} P(A_{i_2}^{(2)}) \right] \cdots \left[\sum_{i_N \in E_N} P(A_{i_N}^{(N)}) \right] \\ &= P(\{X_1 \in E_1\})P(\{X_2 \in E_2\}) \cdots P(\{X_N \in E_N\}), \end{aligned}$$

ovvero le variabili casuali X_k sono indipendenti. Viceversa, se le X_k sono indipendenti, allora il membro sinistro è:

$$P(\{X_1 \in E_1, X_2 \in E_2, \dots, X_N \in E_N\}) = P(\{X_1 \in E_1\})P(\{X_2 \in E_2\}) \cdots P(\{X_N \in E_N\}) = \left[\sum_{i_1 \in E_1} P(A_{i_1}^{(1)}) \right] \left[\sum_{i_2 \in E_2} P(A_{i_2}^{(2)}) \right] \cdots \left[\sum_{i_N \in E_N} P(A_{i_N}^{(N)}) \right]$$

per cui, scegliendo $E_k = \{i_k\}$, si vede che le decomposizioni $\mathfrak{U}^{(k)}$ sono indipendenti.

Proposizione A.17. (i) Siano X_1, X_2, \dots, X_N delle variabili casuali indipendenti. Allora, per ogni $1 \leq M \leq N$, le variabili X_1, X_2, \dots, X_M sono indipendenti.

(ii) Siano $\mathfrak{U}^{(1)}, \mathfrak{U}^{(2)}, \dots, \mathfrak{U}^{(N)}$ delle decomposizioni indipendenti. Allora, per ogni $1 \leq M \leq N$, le decomposizioni $\mathfrak{U}^{(1)}, \mathfrak{U}^{(2)}, \dots, \mathfrak{U}^{(M)}$ sono indipendenti.

Dimostrazione. La (ii) segue immediatamente dalla (i) per l'osservazione precedente. Abbiamo:

$$\begin{aligned} P(\{X_1 \in E_1, X_2 \in E_2, \dots, X_M \in E_M\}) &= P(\{X_1 \in E_1, X_2 \in E_2, \dots, X_M \in E_M, X_{M+1} \in \Omega, \dots, X_N \in \Omega\}) \\ &= P(\{X_1 \in E_1\})P(\{X_2 \in E_2\}) \cdots P(\{X_M \in E_M\})P(\{X_{M+1} \in \Omega\}) \cdots P(\{X_N \in \Omega\}) \\ &= P(\{X_1 \in E_1\})P(\{X_2 \in E_2\}) \cdots P(\{X_M \in E_M\}), \end{aligned}$$

dato che $P(\{X_k \in \Omega\}) = 1$. Il teorema è dimostrato. \square

Proposizione A.18. Siano X_1, X_2, \dots, X_N delle variabili casuali indipendenti e sia $F_{\mathbf{X}}$ la funzione di distribuzione del vettore casuale $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_N)$. Allora:

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_N) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2) \cdots F_{X_N}(x_N),$$

dove le F_{X_i} sono le funzioni di distribuzione delle singole X_i .

Dimostrazione. Per definizione²¹:

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) &= P(\{\mathbf{X} \in (-\infty, \mathbf{x})\}) \\ &= P(\{X_1 \in (-\infty, x_1)\})P(\{X_2 \in (-\infty, x_2)\}) \cdots P(\{X_N \in (-\infty, x_N)\}) \\ &= F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2) \cdots F_{X_N}(x_N). \end{aligned}$$

\square

²¹Con la notazione (\mathbf{a}, \mathbf{b}) indichiamo l'intervallo:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n).$$

Proposizione A.19. Siano $X_i, i = 1, \dots, N$, delle variabili casuali indipendenti (reali o complesse) e $f_i, i = 1, \dots, N$ funzioni boreliane (a valori reali o complessi).

- (i) Le variabili casuali $f_i(X_i), i = 1, \dots, N$ sono indipendenti.
(ii) Se $f_i(X_i) \in L^1(P)$, allora $Y_1 Y_2 \cdots Y_N \in L^1(P)$ e:

$$\mathbb{E}(Y_1 Y_2 \cdots Y_N) = \mathbb{E}(Y_1) \mathbb{E}(Y_2) \cdots \mathbb{E}(Y_N).$$

- (iii) Se $S = \sum_{i=1}^N X_i$, allora:

$$\sigma^2(S) = \sum_{i=1}^N \sigma^2(X_i)$$

Dimostrazione. (i) Se $E_i, i = 1, 2, \dots, N$ sono insiemi di Borel, allora:

$$\begin{aligned} P(\{Y_1 \in E_1, Y_2 \in E_2, \dots, Y_N \in E_N\}) &= P(\{X_1 \in f_1^{-1}(E_1), X_2 \in f_2^{-1}(E_2), \dots, X_N \in f_N^{-1}(E_N)\}) \\ &= \prod_{i=1}^N P(\{X_i \in f_i^{-1}(E_i)\}) \\ &= \prod_{i=1}^N P(\{Y_i \in E_i\}), \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare.

- (ii) Segue facilmente per induzione dal teorema (4.4).
(iii) Abbiamo:

$$\begin{aligned} \sigma^2(S) &= \mathbb{E}((\sum_{i=1}^N X_i - \mathbb{E}(X_i))^2) \\ &= \sum_{i,j=1}^N \mathbb{E}((X_i - \mathbb{E}(X_i))(X_j - \mathbb{E}(X_j))) \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbb{E}((X_i - \mathbb{E}(X_i))^2) \\ &= \sum_{i=1}^N \sigma^2(X_i) \end{aligned}$$

□

A.6 Tipi di convergenza

Definizione A.20. Sia $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di variabili casuali. Diciamo che la successione $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge quasi certamente alla variabile casuale X se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega) \quad \text{q.o. } [P]. \quad (\text{A.13})$$

Diciamo invece che $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge in probabilità ad X se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\{|X_n - X| > \varepsilon\}) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (\text{A.14})$$

Proposizione A.21. La successione $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge in probabilità ad X se e soltanto se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che:

$$P(\{|X_n - X| > \varepsilon\}) < \varepsilon \quad (\text{A.15})$$

per ogni $n > N_\varepsilon$.

Dimostrazione. Se vale la (A.14), allora la (A.15) è chiaramente soddisfatta. Viceversa, supponiamo che valga la (A.15). Fissati $\varepsilon > \delta > 0$ esiste un N_δ tale che:

$$P(\{|X_n - X| > \delta\}) < \delta$$

per $n > N_\delta$. Di conseguenza:

$$P(\{|X_n - X| > \varepsilon\}) \leq P(\{|X_n - X| > \delta\}) < \delta$$

per ogni $n > N_\delta$, da cui:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P(\{|X_n - X| > \varepsilon\}) < \delta.$$

Poichè $\delta > 0$ è arbitrario, ne segue la tesi. \square

Teorema A.22. Sia $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di variabili casuali, convergente in probabilità ad una variabile casuale X . Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ e $p \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\{|X_n - X_{n+p}| > \varepsilon\}) = 0. \quad (\text{A.16})$$

Viceversa, se vale la (A.16), allora $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge in probabilità ad una variabile casuale X .

Dimostrazione. Supponiamo che $X_n \rightarrow X$ in misura. Fissato $\varepsilon > 0$, esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che:

$$P\left(\left\{|X_{n+p} - X| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) < \frac{\varepsilon}{2},$$

per $p = 0, 1, 2, \dots$. Poichè:

$$\{|X_n - X_{n+p}| > \varepsilon\} \subseteq \left\{|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{|X_{n+p} - X| > \frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

si ha:

$$P(\{|X_n - X_{n+p}| > \varepsilon\}) < \varepsilon.$$

Ma questa è chiaramente equivalente alla (A.16), in quanto per ogni $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ si ha:

$$P(\{|X_n - X_{n+p}| > \varepsilon\}) < P(\{|X_n - X_{n+p}| > \varepsilon'\}),$$

da cui:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P(\{|X_n - X_{n+p}| > \varepsilon\}) \leq \varepsilon',$$

che implica la (A.16) (l'implicazione opposta è ovvia).

Viceversa, supponiamo che valga la (A.16). Per ogni $k \in \mathbb{N}$ scegliamo una X_{n_k} tale che $n_{k+1} > n_k$ e se:

$$E_k = \{|X_{n_k} - X_{n_{k+1}}| > 2^{-k}\},$$

allora $P(E_k) < 2^{-k}$.

Poniamo $F_j = \cup_{k=j}^{\infty} E_k$ e $F = \cap_{j=1}^{\infty} F_j$. Abbiamo:

$$P(F_j) \leq \sum_{k=j}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-(j-1)},$$

$$P(F) = 0.$$

Se $\omega \notin F$, allora $\omega \notin F_j$ per qualche j . Se $l \geq m \geq j$, allora:

$$|X_{n_l}(\omega) - X_{n_m}(\omega)| \leq \sum_{k=m}^{l-1} |X_{n_{k+1}}(\omega) - X_{n_k}(\omega)| \leq \sum_{k=m}^{l-1} 2^{-k} \leq 2^{-(m-1)}.$$

Quindi la successione $X_{n_l}(\omega)$ è di Cauchy, ovvero X_{n_k} è puntualmente di Cauchy su $\Omega \setminus F$ e converge puntualmente a una X su $\Omega \setminus F$ (possiamo porre $X(\omega) = 0$ per $\omega \in F$).

A questo punto notiamo che, fissato $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \{|X - X_n| > \varepsilon\} &\subseteq \left\{ |X - X_{n_k}| > \frac{\varepsilon}{2} \right\} \cup \left\{ |X_n - X_{n_k}| > \frac{\varepsilon}{2} \right\}, \\ P(\{|X - X_n| > \varepsilon\}) &\leq P\left(\left\{ |X - X_{n_k}| > \frac{\varepsilon}{2} \right\}\right) + P\left(\left\{ |X_n - X_{n_k}| > \frac{\varepsilon}{2} \right\}\right). \end{aligned}$$

Per ipotesi su $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, e poichè $X_{n_k} \rightarrow X$ puntualmente quasi ovunque, entrambi i membri destri si possono rendere arbitrariamente piccoli per n e k sufficientemente grandi. Il teorema è dimostrato. \square

Teorema A.23. *Siano X, X_1, X_2, \dots variabili casuali reali.*

(i) *Se $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge quasi certamente ad X , allora $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge in probabilità ad X .*

(ii) *Se $1 \leq p$, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(P)$ e $\|X_n - X\|_p \rightarrow 0$, allora $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge in probabilità ad X .*

(iii) *Se $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ad X in probabilità, allora esiste una sottosuccessione $(X_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente quasi certamente ad X .*

Dimostrazione. (i) Poniamo

$$\begin{aligned} E_{n,p}^{(m)} &= \left\{ \omega \mid |X_{n+p}(\omega) - X(\omega)| \geq \frac{1}{m} \right\}, \\ E &= \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{p=0}^{\infty} E_{n,p}^{(m)} \end{aligned}$$

Se la successione di numeri reali $X_n(\omega)$ converge ad $X(\omega)$, allora per ogni $m \in \mathbb{N}$ esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che:

$$|X_{n+p}(\omega) - X(\omega)| < \frac{1}{m}$$

per ogni $p = 0, 1, \dots$. Dunque, per ogni $m \in \mathbb{N}$,

$$\omega \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{p=0}^{\infty} E_{n,p}^{(m)},$$

ovvero $\omega \notin E$. D'altra parte, se $X_n(\omega)$ non converge ad X , esiste un $m \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$|X_{n+p}(\omega) - X(\omega)| \geq \frac{1}{m}$$

per qualche $p \geq 0$. Dunque, esiste un $m \in \mathbb{N}$ tale che:

$$\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{p=0}^{\infty} E_{n,p}^{(m)}$$

e quindi $\omega \in E$. Poichè X_n converge quasi ovunque ad X , si ha:

$$P(E) = 0$$

e quindi:

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{p=0}^{\infty} E_{n,p}^{(m)}\right) = 0$$

per ogni $m \in \mathbb{N}$.

Sia dato ora $\varepsilon > 0$. Se $\frac{1}{m} < \varepsilon$ allora:

$$P(\{|X_k - X| > \varepsilon\}) \leq P\left(\left\{ |X_k - X| \geq \frac{1}{m} \right\}\right).$$

Ora, notando che $E_{n,p}^{(m)} \supseteq E_{n+1,p}^{(m)}$ per ogni n , abbiamo:

$$\begin{aligned}
0 &= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{p=0}^{\infty} E_{n,p}^{(m)}\right) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{n=1}^k \bigcup_{p=0}^{\infty} E_{n,p}^{(m)}\right) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{p=0}^{\infty} E_{k,p}^{(m)}\right) \\
&\geq \lim_{k \rightarrow \infty} P(E_{k,0}^{(m)}) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} P\left(\left\{|X_k - X| \geq \frac{1}{n}\right\}\right).
\end{aligned}$$

Dunque:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} P(\{|X_k - X| > \varepsilon\}) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} P\left(\left\{|X_k - X| \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = 0,$$

il che dimostra la tesi.

(ii) Per il Teorema 10.16, abbiamo $X_k \in L^1(P)$ per ogni k e:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|X_k - X\|_1 = 0.$$

Ora:

$$P(\{|X_k - X| > \varepsilon\}) = \int_{|X_k - X| > \varepsilon} dP \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{|X_k - X| > \varepsilon} |X_k - X| dP \leq \frac{\|X_k - X\|_1}{\varepsilon}.$$

Passando al limite per $k \rightarrow \infty$ si ottiene la tesi.

(iii) La costruzione della sottosuccessione (X_{n_k}) è data nella dimostrazione del Teorema A.22. □

Teorema A.24 (Criteri di convergenza). *Sia $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di variabili casuali e sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione non negativa, pari e strettamente crescente per $x > 0$.*

(i) Se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(f(X_n - X_{n+p})) = 0$$

per ogni $p > 0$, allora $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge in probabilità ad una variabile casuale X .

(ii) Se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(f(X_n - X)) = 0$$

allora $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge in probabilità ad X .

(iii) Se f è continua in $x = 0$, $f(0) = 0$, ed è limitata, allora le (i) e (ii) sono condizioni necessarie e sufficienti alla convergenza in probabilità.

(iv) Se f è continua in $x = 0$, $f(0) = 0$ e $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è uniformemente limitata, allora (i) e (ii) sono condizioni necessarie e sufficienti alla convergenza in probabilità.

Dimostrazione. Per la prima disuguaglianza di Chebychev, equazione (A.4), per ogni $\varepsilon > 0$ si ha:

$$\begin{aligned}
P(\{|X_{n+p} - X_n| \geq \varepsilon\}) &\leq \frac{\mathbb{E}(f(X_{n+p} - X_n))}{f(\varepsilon)} \\
P(\{|X_n - X| \geq \varepsilon\}) &\leq \frac{\mathbb{E}(f(X_n - X))}{f(\varepsilon)}
\end{aligned}$$

da cui seguono immediatamente le (i) e (ii).

Se ora f è continua in $x = 0$ con $f(0) = 0$, e se f è limitata, oppure $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è uniformemente limitata, per la seconda disuguaglianza di Chebychev, equazione (A.5), per ogni $\varepsilon > 0$ si ha:

$$P(\{|X_{n+p} - X_n| \geq \varepsilon\}) \geq \frac{\mathbb{E}(f(X_{n+p} - X_n)) - f(\varepsilon)}{M},$$

$$P(\{|X_n - X| \geq \varepsilon\}) \geq \frac{\mathbb{E}(f(X_n - X)) - f(\varepsilon)}{M}.$$

Supponendo che i membri a sinistra tendano a zero nel limite $n \rightarrow \infty$, si ha:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(f(X_{n+p} - X_n)) \leq f(\varepsilon),$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(f(X_n - X)) \leq f(\varepsilon).$$

Passando al limite $\varepsilon \downarrow 0$ e usando il fatto che f è continua in $x = 0$ si ottiene la tesi. \square

Teorema A.25 (Legge dei grandi numeri). *Siano $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ variabili casuali indipendenti distribuite con varianza uniformemente limitata:*

$$\sigma^2(X_i) \leq M < \infty \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Allora la successione:

$$Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}(X_i))$$

converge in probabilità a zero.

Osservazione A.26. Se le variabili casuali X_i hanno un valor medio comune μ , la conclusione è che la successione delle medie:

$$S_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

converge in probabilità al valor medio μ .

Dimostrazione. Poichè le X_i sono indipendenti e $\mathbb{E}(Z_n) = 0$, si ha:

$$\sigma^2(Z_n) = \frac{\sum_{i=1}^n \sigma^2(X_i)}{n^2} \leq \frac{M}{n}.$$

Fissato $\varepsilon > 0$, per la disuguaglianza di Chebychev:

$$P(\{|Z_n| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{M}{n\varepsilon^2} \rightarrow 0$$

per $n \rightarrow \infty$. \square

A.7 Variabili casuali dipendenti da parametri

Teorema A.27. *Sia data $X: [0, 1] \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ e supponiamo che, per ogni $t \in [0, 1]$, $X(t) \equiv X(t, \cdot)$ sia una variabile casuale con $\mathbb{E}(|X_t|) < \infty$.*

(i) *Supponiamo che esista $Y \in L^1(P)$ tale che:*

$$|X(t)(\omega)| \leq Y(\omega). \quad q.o. [P]$$

Se $t_0 \in [0, 1]$ e

$$\lim_{t \rightarrow t_0} X(t)(\omega) = X(t_0)(\omega) \quad q.o. [P]$$

allora:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbb{E}(X(t)) = \mathbb{E}(X(t_0)). \quad (\text{A.17})$$

(ii) Supponiamo che, per ogni $\omega \in \Omega$ e per ogni $t \in [0, 1]$, esista il limite:

$$\dot{X}(t)(\omega) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{X(t+h)(\omega) - X(t)(\omega)}{h}.$$

Supponiamo inoltre che esista $Y \in L^1(P)$ tale che:

$$\left| \dot{X}(t)(\omega) \right| \leq Y(\omega) \quad q.o. [P].$$

Allora:

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}(X(t)) = \mathbb{E}(\dot{X}(t)). \quad (\text{A.18})$$

Dimostrazione. Segue immediatamente dai Teoremi 5.71 e 5.73. □

A.8 Funzione generatrice dei momenti

Definizione A.28. Sia $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una variabile casuale reale. La funzione:

$$G_X(t) = \mathbb{E}(e^{-itX}) \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (\text{A.19})$$

è chiamata *funzione generatrice dei momenti* di X .

Teorema A.29. Sia $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una variabile casuale reale. Se $n \in \mathbb{N}$ e $X \in L^n(P)$, allora:

$$\mathbb{E}(X^k) = i^k \left. \frac{d^k}{dt^k} \right|_{t=0} G_X(t) \quad (\text{A.20})$$

per ogni $k = 0, 1, \dots, n$.

Dimostrazione. Notiamo che la funzione generatrice è infinitamente differenziabile e:

$$\left(\frac{d}{dt} \right)^k e^{-itX} = (-iX)^k e^{-itX}.$$

Per ipotesi si ha:

$$\left| \left(\frac{d}{dt} \right)^k e^{-itX} \right| \leq |X|^k \in L^1(P)$$

per $k = 0, 1, \dots, n$.

Supponiamo che, per $0 \leq k \leq m \leq n-1$, valga:

$$\mathbb{E}\left(\left(\frac{d}{dt}\right)^k e^{-itX}\right) = \left(\frac{d}{dt}\right)^k \mathbb{E}(e^{-itX}).$$

Allora, per il teorema precedente:

$$\mathbb{E}\left(\left(\frac{d}{dt}\right)^{m+1} e^{-itX}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt}\right)^m e^{-itX}\right) = \frac{d}{dt} \mathbb{E}\left(\left(\frac{d}{dt}\right)^m e^{-itX}\right) = \left(\frac{d}{dt}\right)^{m+1} \mathbb{E}(e^{-itX}).$$

Per induzione si ha quindi:

$$\mathbb{E}\left(\left(\frac{d}{dt}\right)^k e^{-itX}\right) = \left(\frac{d}{dt}\right)^k \mathbb{E}(e^{-itX})$$

per ogni $0 \leq k \leq n$ e, in particolare:

$$\mathbb{E}((-iX)^k) = \mathbb{E}\left(\left(\frac{d}{dt}\right)^k e^{-itX}\right) = \left(\frac{d}{dt}\right)^k \Big|_{t=0} \mathbb{E}(e^{-itX}).$$

Il teorema è dimostrato. □

Teorema A.30. Supponiamo che le variabili casuali X e Y siano indipendenti. Allora:

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t).$$

Dimostrazione. Per la Proposizione A.19, le variabili casuali e^{-itX} e e^{-itY} sono indipendenti e:

$$G_{X+Y}(t) = \mathbb{E}(e^{-it(X+Y)}) = \mathbb{E}(e^{-itX} e^{-itY}) = \mathbb{E}(e^{-itX}) \mathbb{E}(e^{-itY}) = G_X(t)G_Y(t). \quad \square$$

A.9 Applicazioni della funzione generatrice

La funzione generatrice della variabili X non è altro che la trasformata di Fourier della misura di Stieltjes $dF_X(x)$:

$$G_X(t) = \int_{X(\Omega)} e^{-itx} dF_X(x).$$

Questo permette chiaramente di estrarre molte informazioni sulla distribuzione dF_X .

Supponiamo che X sia una variabile casuale discreta²², la cui misura di Stieltjes sia data da:

$$\frac{dF_X}{dx}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \delta(x - k),$$

La successione $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ è un elemento di $\ell^p(\mathbb{Z})$ per ogni $1 \leq p \leq \infty$. Questo segue dal fatto che $(a_k) \in \ell^1(\mathbb{Z}) \cap \ell^\infty(\mathbb{Z})$, in quanto

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k = 1, \quad 0 \leq a_k \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Di conseguenza, la funzione $G_X(t)$ individua univocamente la successione a_k , e quindi la misura di Stieltjes dF_X . Se ora Y è una seconda variabile casuale discreta, con:

$$\frac{dF_Y}{dy}(y) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} b_m \delta(y - m),$$

se X e Y sono indipendenti, dal teorema precedente abbiamo:

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t).$$

Ma $G_X(t)G_Y(t)$ è l'antitrasformata di Fourier della convoluzione:

$$c_l = \sum_k a_{l-k} b_k.$$

Ne segue che la variabile casuale $Z = X + Y$ (che è chiaramente a valori in \mathbb{Z}), ha una "densità di probabilità":

$$\frac{dF_Z}{dz}(z) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_l \delta(z - l).$$

Supponiamo ora che X e Y siano variabili casuali reali, con misure di Stieltjes assolutamente continue $dF_X(x) = f_X(x)dx$ e $dF_Y(y) = f_Y(y)dy$. Le funzioni f_X e f_Y , sebbene non siano necessariamente elementi di $L^p(\mathbb{R})$ per p arbitrario, sono certamente elementi di $L^1(\mathbb{R})$. Di nuovo, le G_X e G_Y sono le trasformate di Fourier di f_X e f_Y . Poichè la trasformata di Fourier è iniettiva su $L^1(\mathbb{R})$ ²³, se le X e Y sono indipendenti, allora:

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$$

è la trasformata di Fourier di $f_Z(z)$ ²⁴, dove $Z = X + Y$. Di conseguenza,

$$f_Z(z) = (f_X * f_Y)(z)$$

è la convoluzione di f_X e f_Y .

Consideriamo alcuni esempi concreti:

²²In generale, diciamo che una variabile casuale è discreta se $X(\Omega)$ è un sottoinsieme discreto della retta reale (o del piano complesso se X è complessa).

²³Vedi Rudin W., "Real and Complex Analysis", pag. 185, 9.12.

²⁴Notiamo che la misura di Stieltjes $dF_Z(z)$ è assolutamente continua, in quanto se $N \subseteq \mathbb{R}$ ha misura di Lebesgue nulla:

$$\int_N dF_Z(z) = P(\{Z \in N\}) = P(\{X + Y \in N\}) = \int_{x+y \in N} f_X(x) f_Y(y) dx dy = 0,$$

per cui $dF_Z(z) = f_Z(z)dz$ per qualche $f_Z \in L^1(\mathbb{R})$ (Teorema di Lebesgue-Radon-Nikodym).

Esempio A.31 (Distribuzione di Poisson). Supponiamo che X sia descritta dalla distribuzione di Poisson²⁵:

$$p_X(n) = \frac{\lambda_X^n}{n!} e^{-\lambda_X},$$

$$p_Y(m) = \frac{\lambda_Y^m}{m!} e^{-\lambda_Y}.$$

Calcoliamo la funzione generatrice:

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-itn} \frac{\lambda_X^n}{n!} e^{-\lambda_X} = e^{-\lambda_X} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_X e^{-it})^n}{n!} = \exp[\lambda_X(e^{-it} - 1)].$$

Da questa possiamo calcolare immediatamente i primi momenti della distribuzione:

$$i \frac{d}{dt} G_X(t) = \lambda_X e^{-it} G_X(t),$$

$$i^2 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 G_X(t) = \lambda_X e^{-it} G_X(t) + \lambda_X^2 e^{-2it} G_X(t),$$

da cui otteniamo:

$$\mathbb{E}(X) = \lambda_X,$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \lambda_X + \lambda_X^2,$$

$$\sigma^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \lambda_X.$$

Se Y è un'altra variabile poissoniana indipendente da X , la funzione generatrice di $Z = X + Y$ è:

$$G_Z(t) = \exp[(\lambda_X + \lambda_Y)(e^{-it} - 1)],$$

per cui Z è ancora una variabile poissoniana, con parametro $\lambda_Z = \lambda_X + \lambda_Y$. Notiamo che questo risultato segue anche dal teorema generale che afferma che la funzione di massa di Z è la convoluzione di p_X e p_Y :

$$p_Z(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_X(n) p_Y(k-n)$$

$$= e^{-(\lambda_X + \lambda_Y)} \sum_{n=0}^k \frac{\lambda_X^n}{n!} \frac{\lambda_Y^{k-n}}{(k-n)!}$$

$$= e^{-(\lambda_X + \lambda_Y)} \frac{(\lambda_X + \lambda_Y)^k}{k!},$$

dove $p_X(n)$ e $p_Y(m)$ sono convenzionalmente posti uguali a zero per valori negativi dell'argomento.

Esempio A.32. Sia X una variabile casuale gaussianacon densità di probabilità:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} e^{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}}.$$

La trasformata di Fourier di una gaussiana è ancora una gaussiana:

$$G_X(t) = e^{-it\mu_X} e^{-\frac{\sigma_X^2 t^2}{2}}.$$

²⁵Per una variabile discreta X a valori naturali (o interi) indichiamo con $p_X(n)$ la *funzione di massa*:

$$dF_X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_X(n) \delta(x-n).$$

Da qui possiamo estrarre i primi momenti della distribuzione:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= i\dot{G}_X(0) = \mu_X, \\ \mathbb{E}(X^2) &= -\ddot{G}_X(0) = \mu_X^2 + \sigma_X^2,\end{aligned}$$

per cui μ_X e σ_X^2 sono rispettivamente il valore atteso e la varianza di X . Se ora Y è una seconda variabile gaussiana, indipendente da X , la funzione generatrice di $Z = X + Y$ è:

$$G_Z(t) = e^{-it(\mu_X + \mu_Y)} e^{-\frac{(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)t^2}{2}},$$

per cui Z è una variabile gaussiana con valore atteso $\mu_Z = \mu_X + \mu_Y$ e varianza $\sigma_Z^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$.

Esempio A.33 (Distribuzione esponenziale). Sia X una variabile casuale con densità di probabilità:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_X} e^{-\frac{x}{\lambda_X}} & x \geq 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

La sua funzione generatrice è data da:

$$G_X(t) = \frac{1}{\lambda_X} \int_0^{\infty} e^{-(it + \frac{1}{\lambda_X})x} dx = \frac{1}{i\lambda_X t + 1}$$

la quale, notiamo, non è una funzione L^1 . I momenti della distribuzione si calcolano immediatamente:

$$\mathbb{E}(X^n) = n! \lambda_X^n.$$

In particolare:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \lambda_X, \\ \sigma^2(X) &= \lambda_X^2.\end{aligned}$$

La funzione di distribuzione di $Z = X + Y$ si ottiene più facilmente effettuando direttamente la convoluzione:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\lambda_X \lambda_Y} \int_0^z e^{-\frac{x}{\lambda_X}} e^{-\frac{z-x}{\lambda_Y}} dx$$

Se qui $\lambda_X = \lambda_Y \equiv \lambda$, allora:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\lambda^2} z e^{-\frac{z}{\lambda}}.$$

Se $\lambda_X \neq \lambda_Y$, invece:

$$f_Z(z) = \frac{e^{-\frac{z}{\lambda_X}} - e^{-\frac{z}{\lambda_Y}}}{\lambda_X - \lambda_Y}.$$

A.10 Probabilità condizionale

Definizione A.34. Dato un evento $A \subseteq \Omega$ con $P(A) > 0$, si definisce la *probabilità condizionale* dell'evento B rispetto all'evento A come:

$$P(B|A) \equiv \frac{P(B \cap A)}{P(A)}. \quad (\text{A.21})$$

Osservazione. Notiamo che la terna (A, \mathcal{E}_A, P_A) , dove:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_A &\equiv \{E \cap A | E \in \mathcal{E}\} \\ P_A &\equiv P(\cdot | A)\end{aligned}$$

definisce un nuovo spazio di probabilità. Inoltre, se f è una funzione \mathcal{E} -misurabile, allora la restrizione di f ad A definisce una funzione \mathcal{E}_A -misurabile su A , in quanto:

$$f|_A^{-1}(E) = f^{-1}(E) \cap A$$

è \mathcal{E}_A -misurabile se E (e quindi $f^{-1}(E)$) è misurabile. In particolare, data una variabile casuale X su Ω , possiamo sempre considerare questa come una variabile casuale su A .

In quanto segue, adotteremo la notazione:

$$\int_E f(\omega) dP(\omega|A) \equiv \int_{E \cap A} f(\omega) dP_A(\omega)$$

per gli integrali di funzioni in $L^1(P_A)$.

Proposizione A.35. *Siano $A, B, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{E}$. Valgono i seguenti teoremi:*

(i) *Se $P(A), P(B) > 0$, allora:*

$$P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A) = P(A \cap B).$$

(ii) *(Teorema della moltiplicazione) Se $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) > 0$ allora:*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}). \quad (\text{A.22})$$

(iii) *(Teorema delle alternative) Se $\{A_i, i = 1, 2, \dots\}$ è una decomposizione di $A = \cup_i A_i$ e $P(A_i) > 0$ per ogni $i = 1, 2, \dots$ allora:*

$$P(B|A) = \frac{\sum_i P(B|A_i)P(A_i)}{P(A)}. \quad (\text{A.23})$$

(iv) *(Teorema di Bayes) Se $\{A_i, i = 1, 2, \dots\}$ è una decomposizione di Ω e $P(A_i) > 0$ per ogni $i = 1, 2, \dots$, se $P(B) > 0$ allora:*

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_i P(B|A_i)P(A_i)}. \quad (\text{A.24})$$

Dimostrazione. (i) Segue immediatamente dalla definizione di $P(A|B)$.

(ii) Per $n = 2$, la (ii) segue dalla (i). Poichè:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

il teorema segue per induzione.

(iii) Dalla (i) abbiamo:

$$P(B|\cup_i A_i)P(\cup_i A_i) = P(B \cap (\cup_i A_i)) = \sum_i P(B \cap A_i) = \sum_i P(B|A_i)P(A_i).$$

(iv) Dalla (i) e dalla (iii) abbiamo:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_i P(B|A_i)P(A_i)}.$$

□

Definizione A.36. Sia $A \subseteq \Omega$ un evento di probabilità non nulla e sia X una variabile casuale definita in Ω . Se X è positiva su A , oppure $X \in L^1(P_A)$, definiamo il valore atteso condizionale di X :

$$\mathbb{E}_A(X) = \int_A X(\omega) dP(\omega|A). \quad (\text{A.25})$$

Proposizione A.37. *Se $P(A) > 0$, allora $X \in L^1(P_A)$ se e solo se $\chi_A X \in L^1(P)$ e, in tal caso:*

$$\mathbb{E}_A(X) = \frac{1}{P(A)} \int_A X(\omega) dP(\omega). \quad (\text{A.26})$$

Dimostrazione. Se $X = \chi_E$, dove E è un evento, allora il membro sinistro della (A.26) è:

$$\mathbb{E}_A(X) = \int_{E \cap A} dP(\omega|A) = P(E \cap A|A) = P(E|A),$$

mentre il membro destro è:

$$\frac{1}{P(A)} \int_A \chi_E(\omega) dP(\omega) = \frac{P(E \cap A)}{P(A)} = P(E|A).$$

Dunque la (A.26) è valida per le funzioni caratteristiche e per le funzioni semplici, e si estende alle funzioni positive tramite il teorema della convergenza monotona. Infine, notando che:

$$\int_A |X(\omega)| dP(\omega|A) = \frac{1}{P(A)} \int_A |X(\omega)| dP = \frac{1}{P(A)} \int_{\Omega} |(\chi_A \cdot X)(\omega)| dP,$$

si ottiene facilmente il resto dell'enunciato. \square

Osservazione A.38. Notiamo che, per quanto detto finora, è essenziale l'ipotesi $P(A) > 0$ per l'evento condizionante A . Per estendere la teoria al condizionamento tramite eventi di probabilità nulla, dobbiamo essenzialmente considerare il condizionamento rispetto a variabili casuali.

La dimostrazione del teorema precedente suggerisce il modo di ottenere la generalizzazione richiesta. Infatti, questa mostra che la probabilità condizionale $P(E|A)$ è data da:

$$P(B|A) = \int_A \chi_B(\omega) dP(\omega|A)$$

Poniamo ora $A = \{X \in E\}$, dove X è una variabile casuale. Se $P(X^{-1}(E)) > 0$, dalla precedente si ottiene:

$$P(B|\{X \in E\}) = \int_{\{X \in E\}} \chi_B(\omega) dP(\omega|\{X \in E\}) = \frac{1}{P(\{X \in E\})} \int_{\{X \in E\}} \chi_B(\omega) dP(\omega)$$

Supponiamo ora che esista funzione boreliana $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\phi(X(\omega)) = \chi_B(\omega)$. Allora il membro destro si può riscrivere come un integrale di Stieltjes:

$$\frac{1}{P(\{X \in E\})} \int_{\{X \in E\}} \chi_{B \cap \{X \in E\}}(\omega) dP(\omega) = \frac{\int_E \phi(x) dF_X(x)}{\int_E dF_X(x)}.$$

Denoteremo la funzione ϕ con $P(B|x)$. Abbiamo dunque l'identità:

$$P(B|\{X \in E\}) = \frac{\int_E P(B|x) dF_X(x)}{\int_E dF_X(x)} \quad (\text{A.27})$$

per ogni $E \subseteq \mathbb{R}$ tale che $P(\{X \in E\}) > 0$. Il teorema seguente mostra che la (A.28) definisce, a meno di equivalenze, una funzione borel-misurabile su \mathbb{R} (ovvero una variabile casuale sullo spazio di probabilità $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P^{(X)})$).

Teorema A.39. *Sia X una variabile casuale reale e sia $B \subseteq \Omega$ un evento. Allora esiste un'unica (a meno di equivalenza $[P^{(X)}]$) funzione misurabile $P(B|\cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che, per ogni $E \in \mathbb{R}$ con $P(\{X \in E\}) > 0$, si ha:*

$$P(B|\{X \in E\}) = \mathbb{E}_{\{X \in E\}}(P(B|X)) = \frac{\int_E P(B|x) dF_X(x)}{\int_E dF_X(x)}. \quad (\text{A.28})$$

Inoltre, indicati con $P(B|x)$ i valori di $P(B|x)$, valgono le seguenti affermazioni:

(i) Fissato l'evento B :

$$0 \leq P(B|x) \leq 1 \quad q.o. [P^{(X)}].$$

(ii) Se $B_i \cap B_j = \emptyset$ per $i \neq j$, allora

$$P(\cup_i B_i|x) = \sum_i P(B_i|x) \quad q.o. [P^{(X)}].$$

Osservazione A.40. Notiamo che la forma della funzione composta $P(B|X)$ è banale:

$$P(B|X(\omega)) = \chi_B(\omega).$$

Il punto sta nel dimostrare che questa posizione definisce una funzione misurabile su $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Dimostrazione. Iniziamo col dimostrare l'unicità della funzione $P(B|\cdot)$. Se $P(X^{-1}(E)) > 0$, moltiplicando la (A.28) per $P(X^{-1}(E)) = \int_E dF_X(x)$ si ottiene:

$$P(B \cap X^{-1}(E)) = \int_E P(B|x) dF_X(x).$$

La stessa equazione è identicamente soddisfatta se $P(X^{-1}(E)) = \int_E dF_X(x) = 0$. Di conseguenza, se $P(B|\cdot)$ e $Q(B|\cdot)$ sono funzioni misurabili soddisfacenti la (A.28), si ha:

$$\int_E P(B|x) dF_X(x) = \int_E Q(B|x) dF_X(x),$$

da cui segue:

$$P(B|x) = Q(B|x) \quad \text{q.o. } [P^{(X)}]$$

e l'unicità a meno di equivalenze è dimostrata.

Per l'esistenza, si noti che

$$E \mapsto P(B \cap X^{-1}(E))$$

è una misura boreliana positiva. Inoltre, da $P^{(X)}(E) = 0$ segue:

$$P(B \cap X^{-1}(E)) \leq P(X^{-1}(E)) = P^{(X)}(E) = 0,$$

per cui questa misura è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue-Stieltjes $P^{(X)}$. Per il teorema di Lebesgue-Radon-Nikodym, esiste una funzione $P(B|\cdot) \in L^1(P^{(X)})$ tale che:

$$P(B \cap X^{-1}(E)) = \int_E P(B|x) dF_X(x)$$

per ogni boreliano E e ciò dimostra l'esistenza di $P(B|\cdot)$.

Ora, fissiamo l'evento B e poniamo:

$$E_n = \left\{ x | P(B|x) \geq 1 + \frac{1}{n} \right\}$$

e supponiamo per assurdo $P^{(X)}(E_n) > 0$ per qualche $n \in \mathbb{N}$. Allora:

$$1 \geq P(B | \{X \in E_n\}) = \frac{\int_{E_n} P(B|x) dF_X(x)}{\int_{E_n} dF_X(x)} \geq 1 + \frac{1}{n},$$

contraddizione. Ne segue che dev'essere $P^{(X)}(E_n) = 0$ per ogni n , e quindi:

$$P^{(X)}(\{x | P(B|x) > 1\}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P^{(X)}(E_n) = 0.$$

Similmente si dimostra che

$$P^{(X)}(\{x | P(B|x) < 0\}) = 0,$$

il che equivale alla (i).

Sia ora $B = \cup_i B_i$ un'unione disgiunta di eventi. Se $P^{(X)}(E) > 0$ abbiamo, da un lato:

$$P(B | \{X \in E\}) = \sum_i P(B_i | \{X \in E\}),$$

mentre dall'altro, per convergenza monotona:

$$\int_E \sum_i P(B_i|x) dF_X(x) = \sum_i \int_E P(B_i|x) dF_X(x) = \sum_i P(B_i|\{X \in E\}) = P(B|\{X \in E\})$$

Dall'unicità di $P(B|\cdot)$ segue quindi la (ii). \square

Osservazione A.41. Supponiamo che la funzione di distribuzione F_X sia assolutamente continua, e poniamo $dF_X(x) = f_X(x)dx$. Dalla definizione di $P(B|x)$, si ha:

$$\int_{-\infty}^x P(B|x') f_X(x') dx' = P(B|\{X < x\})P(\{X < x\}) = P(\{X < x\}|B)P(B) = F_X(x|B)P(B).$$

La funzione $P(B|\cdot)f_X \in L^1(\mathbb{R})$, per cui quasi ogni $x \in \mathbb{R}$ è un punto di Lebesgue. Per tali x , si ha:

$$P(B|x)f_X(x) = P(B) \frac{d}{dx} F_X(x|B).$$

Se inoltre x è anche un punto di Lebesgue di f_X , allora abbiamo $f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$ e quindi:

$$P(B|x) \frac{d}{dx} F_X(x) = P(B) \frac{d}{dx} F_X(x|B).$$

Infine, se $f_X(x) \neq 0$, si ha:

$$P(B|x) = P(B) \frac{\frac{d}{dx} F_X(x|B)}{\frac{d}{dx} F_X(x)}$$

Notiamo ora che l'insieme dei punti di Lebesgue di entrambe f_X e $P(B|\cdot)f_X$ ha misura di Lebesgue piena, e quindi anche misura piena rispetto a $P^{(X)}$. Inoltre si ha $f_X(x) \neq 0$ quasi ovunque $[P^{(X)}]$, in quanto:

$$P^{(X)}(\{f_X(x) = 0\}) = \int_{\{f_X(x)=0\}} dF_X(x) = \int_{\{f_X(x)=0\}} f_X(x) dx = 0.$$

Da questa discussione, concludiamo che la funzione $P(B|x)$ è determinata quasi ovunque $[P^{(X)}]$ da:

$$P(B|x) = P(B) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_X(x+h|B) - F_X(x|B)}{F_X(x+h) - F_X(x)} = P(B) \frac{f_X(x|B)}{f_X(x)}. \quad (\text{A.29})$$

Notando che:

$$P(B) = P(B|X \in \mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} P(B|x') f_X(x') dx',$$

possiamo scrivere la (A.29) nella forma:

$$f_X(x|B) = \frac{P(B|x)f_X(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} P(B|x') f_X(x') dx'}, \quad (\text{A.30})$$

che si riconosce essere una generalizzazione del teorema di Bayes.

Osservazione A.42. Supponiamo che valga $\mathbb{E}(|Y|) < \infty$. Una costruzione del tutto analoga a quella fatta sopra per la probabilità condizionale $P(B|x)$ mostra che l'equazione

$$\mathbb{E}_{\{X \in A\}}(Y) = \mathbb{E}_A \{\mathbb{E}_x(Y)\} \quad (\text{A.31})$$

per ogni $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tale che $P(X^{-1}(A)) > 0$, definisce a meno di equivalenze un'unica funzione boreliana $\mathbb{E}_x(Y)$, che chiamiamo il *valore atteso condizionale* di Y rispetto ad X . Più esplicitamente, la (A.31) equivale alla richiesta:

$$\int_{\{X \in A\}} Y(\omega) dP(\omega) = \int_A \mathbb{E}_x(Y) dF_X(x).$$

Notiamo che se qui $X = \chi_E$ per qualche evento E di probabilità non nulla, posto $A = \{1\}$ e $A = \{0\}$ e $A = \{0,1\}$ rispettivamente si trova:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_E(Y) &= \mathbb{E}_1(Y) \\ \mathbb{E}_{\Omega \setminus E}(Y) &= \mathbb{E}_0(Y) \\ \mathbb{E}(Y) &= P(\Omega \setminus E)\mathbb{E}_0(Y) + P(E)\mathbb{E}_1(Y)\end{aligned}$$

dato che in questo caso:

$$dF(x) = P(\Omega \setminus E)\delta(x) + P(E)\delta(x-1).$$

Notiamo infine che tutte le costruzioni di questa sezione si generalizzano immediatamente a un vettore \mathbf{X} di n variabili casuali X_i . In questo caso, la probabilità condizionale $P(B|\mathbf{x})$ e il valore atteso condizionale $\mathbb{E}_{\mathbf{x}}(Y)$ sono funzione boreliane in \mathbb{R}^n .

Proposizione A.43. *Il valore atteso condizionale gode delle seguenti proprietà:*

(i) *Linearità:*

$$\mathbb{E}_x(aY + bZ) = a\mathbb{E}_x(Y) + b\mathbb{E}_x(Z),$$

(ii) *Positività:*

$$\mathbb{E}_x(Y) \geq 0 \quad \text{q.o. } [P^{(X)}]$$

se $Y(\omega) \geq 0$ q.o. $[P]$.

(iii) *Se $Y \in L^1(P)$:*

$$|\mathbb{E}_x(Y)| \leq \mathbb{E}_x(|Y|).$$

(iv) *Se $Z \in L^1(P)$:*

$$\mathbb{E}_X(\mathbb{E}_{(X,Y)}(Z)) = \mathbb{E}_X(Z).$$

(v) *Se $Y_n \rightarrow Y$ puntualmente q.o. $[P]$ ed esiste $g \in L^1(P)$ tale che:*

$$|Y_n(\omega)| \leq g(\omega) \quad \text{q.o. } [P],$$

allora esiste una sottosuccessione Y_{n_k} tale che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x(Y_{n_k}) = \mathbb{E}_x(Y) \quad \text{q.o. } [P]$$

Osservazione A.44. Nell'enunciato, la $\mathbb{E}_{(X,Y)}(Z)$ si deve considerare come la funzione $\omega \mapsto \mathbb{E}_{(X(\omega), Y(\omega))}(Z)$, dove $\mathbb{E}_{(x,y)}(Y)$ è il valore atteso condizionale sopra definito.

Dimostrazione. La (i) e la (ii) sono conseguenze immediate della definizione di $\mathbb{E}_x(Y)$. Per la (iii), si noti che scrivendo:

$$\begin{aligned}Y &= Y^+ - Y^- \\ |Y| &= Y^+ + Y^-\end{aligned}$$

si ha:

$$\mathbb{E}_x(Y) = \mathbb{E}_x(Y^+) - \mathbb{E}_x(Y^-) \quad \text{q.o. } [P^{(X)}]$$

dove $\mathbb{E}_x(Y^\pm) \geq 0$, e quindi:

$$\mathbb{E}_x(|Y|) = \mathbb{E}_x(Y^+) + \mathbb{E}_x(Y^-) \geq |\mathbb{E}_x(Y)| \quad \text{q.o. } [P^{(X)}]$$

in virtù della proprietà minimizzante della parte positiva e negativa di $\mathbb{E}_x(Y)$.

Per la (iv) osserviamo che la funzione $\mathbb{E}_{(X,Y)}$ soddisfa all'equazione:

$$\mathbb{E}_{\{(X,Y) \in E\}}(Z) = \mathbb{E}_{\{(X,Y) \in E\}}(\mathbb{E}_{(X,Y)}(Z))$$

per ogni sottoinsieme $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ tale che $P(\{(X, Y) \in E\}) > 0$. Se in particolare $E = E_1 \times \mathbb{R}$, con $E_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, abbiamo:

$$\mathbb{E}_{\{X \in E_1\}}(Z) = \mathbb{E}_{\{X \in E_1\}}(\mathbb{E}_{(X, Y)}(Z)) = \mathbb{E}_{\{X \in E_1\}}(\mathbb{E}_X(\mathbb{E}_{(X, Y)}(Z))),$$

dove la seconda uguaglianza segue dalla definizione di \mathbb{E}_X . Questo implica che:

$$\mathbb{E}_x(\mathbb{E}_{(X, Y)}(Z)) = \mathbb{E}_x(Z) \quad \left[P^{(X)} \right]$$

che è quanto si voleva dimostrare.

Infine, per la (v), abbiamo:

$$\begin{aligned} \int_A |\mathbb{E}_x(Y_n) - \mathbb{E}_x(Y)| dF_X(x) &= \int_A |\mathbb{E}_x(Y_n - Y)| dF_X(x) \\ &\leq \int_A \mathbb{E}_x |Y_n - Y| dF_X(x) \\ &= \int_{\{X \in A\}} |Y_n(\omega) - Y(\omega)| dP(\omega), \end{aligned}$$

Per il teorema della convergenza dominata, il secondo membro tende a zero per $n \rightarrow \infty$. Se $m \in \mathbb{N}$, abbiamo:

$$P^{(X)}\left(\left\{|\mathbb{E}_x(Y_n) - \mathbb{E}_x(Y)| > \frac{1}{m}\right\}\right) \frac{1}{m} < \int_A |\mathbb{E}_x(Y_n) - \mathbb{E}_x(Y)| dF_X(x) \leq \int_{\{X \in A\}} |Y_n(\omega) - Y(\omega)| dP(\omega).$$

Dunque $\mathbb{E}_x(Y_n) \rightarrow \mathbb{E}_x(Y)$ in probabilità, per cui esiste una sottosuccessione tale che $\mathbb{E}_x(Y_{n_k}) \rightarrow \mathbb{E}_x(Y)$ puntualmente quasi ovunque. \square

Proposizione A.45. *Siano X e Y variabili casuali, sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione boreliana e supponiamo $\mathbb{E}(|f(X)Y|) < \infty$ e $\mathbb{E}(|Y|) < \infty$. Allora:*

$$\mathbb{E}_x(f(X)Y) = f(x)\mathbb{E}_x(Y) \quad q.o. \left[P^{(X)} \right].$$

Dimostrazione. La tesi equivale all'asserto che:

$$\int_A \mathbb{E}_x(f(X)Y) dF(x) = \int_A f(x)\mathbb{E}_x(Y) dF(x) \quad (\text{A.32})$$

per ogni A misurabile. Questa è banalmente vera se $P^{(X)}(A) = 0$, per cui possiamo direttamente supporre $P^{(X)}(A) > 0$.

Supponiamo prima che

$$f = \chi_E$$

per qualche E boreliano. Allora, per definizione:

$$\begin{aligned} \int_A \mathbb{E}_x(\chi_E(X)Y) dF(x) &= P(\{X \in A\})\mathbb{E}_{\{X \in A\}}(\chi_E(X)Y) \\ &= \int_{\{X \in A \cap E\}} Y(\omega) dP(\omega) \\ &= P(\{X \in A \cap E\})\mathbb{E}_{\{X \in A \cap E\}}(Y) \\ &= \int_{A \cap E} \mathbb{E}_x(Y) dF(x) \\ &= \int_A \chi_E(x)\mathbb{E}_x(Y) dF(x). \end{aligned}$$

Quindi la tesi è valida per le funzioni caratteristiche. Entrambi i membri della (A.32) sono lineari in $f(X)$, quindi la tesi è valida per le funzioni semplici.

Supponiamo ora che f sia una funzione positiva e sia s_n una successione di funzioni semplici convergenti monotonamente a f . Abbiamo:

$$\begin{aligned} \int_A |\mathbb{E}_x(f(X)Y) - s_n(x)\mathbb{E}_x(Y)| dF_X(x) &= \int_A |\mathbb{E}_x(f(X)Y - s_n(X)Y)| dF_X(x) \\ &\leq \int_A \mathbb{E}_x(|f(X) - s_n(X)| |Y|) dF_X(x) \\ &= \int_{\{X \in A\}} |f(X) - s_n(X)| |Y| dP(\omega). \end{aligned}$$

L'ultimo membro tende a zero per convergenza dominata. Di conseguenza:

$$s_n(x)\mathbb{E}_x(Y) \rightarrow \mathbb{E}_x(f(X)Y)$$

in probabilità, per cui esiste una sottosuccessione $s_{n_k}(x)\mathbb{E}_x(Y)$ puntualmente convergente a $\mathbb{E}_x(f(X)Y)$ quasi ovunque. Ma la successione $s_n(x)\mathbb{E}_x(Y)$ converge puntualmente quasi ovunque a $f(x)\mathbb{E}_x(Y)$. Per l'unicità del limite, dobbiamo concludere che:

$$\mathbb{E}_x(f(X)Y) = f(x)\mathbb{E}_x(Y) \quad \text{q.o. } [P^{(X)}].$$

Il caso di una f arbitraria segue per linearità. □

Teorema A.46. *Supponiamo che le variabili casuali X e Y siano mutuamente indipendenti e sia $Y \in L^1(P)$. Allora:*

$$\mathbb{E}_x(Y) = \mathbb{E}(Y) \quad \text{q.o. } [P^{(X)}].$$

Dimostrazione. Per definizione:

$$\begin{aligned} \int_A \mathbb{E}_x(Y) dF_X(x) &= P(\{X \in A\})\mathbb{E}_{\{X \in A\}}(Y) \\ &= P(\{X \in A, Y \in \mathbb{R}\})\mathbb{E}_{\{X \in A, Y \in \mathbb{R}\}}(Y) \\ &= \int_{A \times \mathbb{R}} y dF_X(x) dF_Y(y) \\ &= \int_A \left\{ \int_{\mathbb{R}} y dF_Y(y) \right\} dF_X(x) \\ &= \int_A \mathbb{E}(Y) dF_X(x). \end{aligned}$$

Ne segue la tesi. □

B Misure di Borel su \mathbb{R}

Teorema B.1 (Lebesgue-Radon-Nykodym). *Sia (X, \mathcal{M}) uno spazio misurabile, μ una misura positiva σ -finita e λ una misura complessa su X . Allora esistono uniche misure λ_a e λ_s su X tali che:*

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s,$$

dove λ_a e λ_s sono rispettivamente assolutamente continua e singolare rispetto a μ . Inoltre, esiste $h \in L^1(\mu)$ tale che:

$$\lambda_a(E) = \int_E h d\mu$$

per ogni $E \in \mathcal{M}$.

Osservazione B.2. Si vede facilmente che la funzione h è essenzialmente unica.

Corollario B.3. *Sia λ una misura complessa di Borel su \mathbb{R} . Questa si decompone in modo unico come:*

$$\lambda = \lambda_{a.c.} + \lambda_{s.c.} + \lambda_{p.p.},$$

dove le tre misure sono rispettivamente: assolutamente continua, singolare continua, puramente puntuale rispetto alla misura di Lebesgue.

Dimostrazione. Dobbiamo far vedere che la parte singolare di λ si decompone in modo unico in una parte singolare continua e una parte puramente puntuale.

Sia $E_n = \{x \in \mathbb{R} \mid |\lambda_s|(\{x\}) > \frac{1}{n}\}$. Se $x_1, \dots, x_k \in E_n$ sono punti distinti, allora:

$$\frac{k}{n} \leq |\lambda_s|(\{x_1\}) + \dots + |\lambda_s|(\{x_k\}) \leq |\lambda_s|(E_n) < \infty.$$

Di conseguenza, ogni E_n è finito e

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid |\lambda_s|(\{x\}) > 0\} = \cup_n E_n$$

è numerabile. Per ogni $M \in \mathcal{M}$, definiamo:

$$\begin{aligned} \lambda_{p.p.}(M) &= \lambda_s(M \cap E), \\ \lambda_{s.c.}(M) &= \lambda_s(M) - \lambda_{p.p.}(M). \end{aligned}$$

Chiaramente $\lambda_{p.p.}$ è puramente puntuale. Inoltre, poichè $|\lambda_s(M)| \leq |\lambda_s|(M)$, abbiamo:

$$\lambda_{s.c.}(\{x\}) = 0$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$, il che prova l'esistenza della decomposizione.

Supponiamo ora che $\lambda_s = \tilde{\lambda}_{p.p.} + \tilde{\lambda}_{s.c.}$ sia un'altra decomposizione. Se $x \in \mathbb{R}$, allora:

$$\tilde{\lambda}_{p.p.}(\{x\}) = \lambda(\{x\}) = \lambda_{p.p.}(\{x\}).$$

Poichè $\tilde{\lambda}_{p.p.}$ e $\lambda_{p.p.}$ sono puramente puntuali, si ha

$$\tilde{\lambda}_{p.p.} = \lambda_{p.p.}.$$

Inoltre

$$\tilde{\lambda}_{s.c.} = \lambda_s - \tilde{\lambda}_{p.p.} = \lambda_s - \lambda_{p.p.} = \lambda_{s.c.}$$

e ci siamo. □

Corollario B.4. *Se λ è una misura reale positiva assolutamente continua e $f \in L^1(\mu)$, dove μ denota la misura di Lebesgue, allora $f \in L^1(\lambda)$ e:*

$$\int_E f d\lambda = \int_E f h d\mu \tag{B.1}$$

per ogni $E \in \mathcal{M}$.

Dimostrazione. Notiamo innanzitutto che, se λ è reale e positiva, allora $h \geq 0$. Infatti, se $E_n = \{x \in X \mid h(x) < -\frac{1}{n}\}$ allora:

$$0 \leq \lambda(E_n) = \int_{E_n} h d\mu \leq -\frac{1}{n} \mu(E_n),$$

da cui $\mu(E_n) = 0$ e, di conseguenza:

$$\mu(\{x \in X \mid h(x) < 0\}) = \mu(\cup_n E_n) = 0.$$

Poichè h è definita a meno di un insieme di misura nulla, possiamo direttamente assumere $h \geq 0$ ovunque.

La definizione di h mostra che la (B.1) vale per le funzioni caratteristiche e quindi per le funzioni semplici. Se f è una funzione positiva, esiste una successione s_n di funzioni semplici positive convergenti monotonamente a f (Rudin, 1.17). Poichè $h \geq 0$, si ha $s_n h \rightarrow f h$ monotonamente. Per il teorema della convergenza monotona si ha allora:

$$\int_E f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E s_n d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E s_n h d\mu = \int_E f d\mu.$$

Di conseguenza, se $f \in L^1(\mu)$, allora $f \in L^1(\lambda)$, e la (B.1) segue dal caso precedente (f positiva) applicati alle parti reali/immaginarie positive/negative di f . \square

Lemma B.5. *Siano μ_1 e μ_2 due misure di Borel positive finite su \mathbb{R} , tali che $\mu_1(I) = \mu_2(I)$ per ogni intervallo semiaperto $I = [a, b)$. Allora $\mu_1(B) = \mu_2(B)$ per ogni insieme di Borel B .*

Dimostrazione. Osserviamo che le due misure sono regolari, in quanto finite (Thm. 2.18, Rudin). Di conseguenza, se dimostriamo l'uguaglianza delle misure sugli aperti, otteniamo l'uguaglianza su tutti i Borel.

Le misure dei punti, e quindi degli intervalli in generale, coincidono, in quanto:

$$\mu_1(\{a\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_1\left(\left[a, a + \frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_2\left(\left[a, a + \frac{1}{n}\right)\right) = \mu_2(\{a\}).$$

Se V è un'unione finita di intervalli aperti, allora è necessariamente un'unione finita di intervalli aperti *disgiunti* (eventualmente un solo intervallo), e in tal caso $\mu_1(V) = \mu_2(V)$ per l'additività delle due misure. Se V è un'unione numerabile di intervalli aperti, $V = I_1 \cup I_2 \cup \dots$, allora $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots$, dove $V_k = \cup_{i=1}^k I_i$. Pertanto (Thm. 1.19c, Rudin):

$$\mu_1(V) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_1(V_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_2(V_k) = \mu_2(V).$$

Poichè ogni aperto V è unione numerabile di intervalli aperti, ciò dimostra la tesi. \square

C Integrali a valori in uno spazio di Banach separabile

In quest'appendice definiamo l'integrale di Lebesgue di funzioni a valori in uno spazio di Banach separabile.

Siano (X, \mathcal{M}, μ) uno spazio di misura e $(B, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach separabile sul campo complesso. Consideriamo B come spazio misurabile con la σ -algebra dei Boreliani. Se $f: X \rightarrow B$ è misurabile, allora $\|f\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ è misurabile (dato che $\|\cdot\|$ è continua). Diremo che $f \in L^1(\mu; B)$ se $\|f\| \in L^1(\mu)$, ovvero:

$$\|f\|_1 \equiv \int_X \|f\| d\mu < \infty.$$

Si vede facilmente che $L^1(\mu; B)$ è uno spazio vettoriale e $\|\cdot\|_1$ una seminorma, che diventa una norma se identifichiamo le funzioni uguali quasi ovunque.

Indichiamo con \mathcal{S}_B lo spazio delle funzioni $s: X \rightarrow B$ della forma:

$$s = \sum_{i=1}^n \chi_{E_i} y_i,$$

dove $y_i \in B$ e $E_i \in \mathcal{M}$ e $\mu(E_i) < \infty$.

Lemma C.1. Se $f \in L^1(\mu; B)$, esiste una successione $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_B$ tale che:

$$\begin{aligned} s_n(x) &\rightarrow f(x) & q.o. [\mu] \\ \|s_n - f\|_1 &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Se $\{y_1, y_2, \dots\}$ è un sottoinsieme numerabile denso di B , per ogni $\varepsilon > 0$ si ha²⁶:

$$B \setminus \{0\} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^\varepsilon,$$

dove:

$$B_n^\varepsilon \equiv \{y \in B \mid \|y - y_n\| < \varepsilon \|y_n\|\}.$$

Poniamo:

$$\begin{aligned} A_{nj} &= B_n^{\frac{1}{j}} \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k^{\frac{1}{j}}, \\ E_{nj} &= f^{-1}(A_{nj}), \\ g_j &= \sum_{n=1}^{\infty} y_n \chi_{E_{nj}}. \end{aligned}$$

Notiamo che $0 \notin B_n^{\frac{1}{j}}$ per ogni $j = 1, 2, \dots$. Di conseguenza, se $f(x) = 0$, allora:

$$g_j(x) = 0 = f(x)$$

per $j = 1, 2, \dots$. Se $f(x) \neq 0$, allora $f(x) \in A_{nj}$ per qualche $n_j \in \mathbb{N}$, per cui $x \in E_{n_j j}$ e:

$$\|g_j(x) - f(x)\| = \|y_{n_j} - f(x)\| < \frac{1}{j} \|y_{n_j}\| = \frac{1}{j} \|g_j(x)\|.$$

Notiamo che:

$$\|g_j(x)\| \leq \|g_j(x) - f(x)\| + \|f(x)\| \leq \frac{1}{j} \|g_j(x)\|,$$

da cui:

$$\|g_j(x)\| \leq \frac{j}{j-1} \|f(x)\| \leq 2 \|f(x)\|$$

per ogni $j = 2, 3, \dots$. Ne segue che:

$$\|g_j(x) - f(x)\| \leq \frac{2}{j} \|f(x)\|$$

per ogni $x \in X$ e quindi:

$$\int_X \|g_j(x) - f(x)\| \, d\mu \leq \frac{2}{j} \int_X \|f(x)\| \, d\mu = \frac{2 \|f\|_1}{j}$$

Notiamo ora che, poichè ogni $g_j \in L^1(\mu; B)$:

$$\int_X \|g_j(x)\| \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\| \mu(E_{nj}) < \infty,$$

da cui segue che la successione delle somme parziali

$$s_j^{(n)} = \sum_{k=1}^n y_k \chi_{E_{kj}}$$

²⁶Infatti, dato $y \in B$, esiste una sottosuccessione y_{n_k} tale che $y_{n_k} \rightarrow y$. Se $y \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^\varepsilon$, allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha $\|y_{n_k}\| \leq \frac{1}{\varepsilon} \|y - y_{n_k}\|$, da cui segue $y_{n_k} \rightarrow 0$ e, per l'unicità del limite, $y = 0$.

tende a g_j in norma $L^p(\mu)$. Pertanto per ogni $j = 1, 2, \dots$ esiste un n_j tale che:

$$\|g_j - s_j^{(n_j)}\|_1 \leq \frac{\|f\|_1}{j}.$$

Perciò:

$$\|f - s_j^{(n_j)}\|_1 \leq \|f - g_j\|_1 + \|g_j - s_j^{(n_j)}\|_1 \leq \frac{3\|f\|_1}{j} \rightarrow 0$$

per $j \rightarrow \infty$, come volevasi dimostrare. Per il Teorema 5.77, a meno di scegliere una sottosuccessione j_k , si ha anche:

$$\|f(x) - s_j^{(n_j)}(x)\| \rightarrow 0$$

per quasi ogni $x \in X$. Il teorema è dimostrato. \square

Teorema C.2. *Esiste un'unica applicazione lineare $\int_X d\mu: L^1(\mu; B) \rightarrow B$ tale che:*

(i) $\int_X y \chi_E d\mu = \mu(E)y$ per ogni $y \in B$ ed $E \in \mathcal{M}$ con $\mu(E) < \infty$.

(ii) $\|\int_X f d\mu\| \leq \int_X \|f\| d\mu$ per ogni $f \in L^1(\mu; B)$.

Inoltre, $\int_X d\mu$ gode delle seguenti proprietà:

(iii) (Teorema della convergenza dominata) Se $f_n(x) \rightarrow f(x)$ puntualmente quasi ovunque, $\|f_n(x)\| \leq g(x)$ quasi ovunque e $g \in L^1(\mu)$, allora $f \in L^1(\mu; B)$ e:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

(iv) Se $T: B \rightarrow B'$ è un operatore lineare limitato fra spazi di Banach separabili e $f \in L^1(\mu; B)$, allora $T \circ f \in L^1(\mu; B')$ e:

$$\int_X T \circ f d\mu = T\left(\int_X f d\mu\right).$$

Dimostrazione. La proprietà (i) implica:

$$\int_X s d\mu = \sum_{i=1}^n \mu(E_i) y_i$$

per ogni

$$s = \sum_{i=1}^n \chi_{E_i} y_i \in \mathcal{S}_B.$$

La proprietà (ii) implica in particolare che $\int_X d\mu$ è continuo (rispetto alla norma $\|\cdot\|_1$ su $L^1(\mu; B)$). Poichè, per il lemma precedente, l'insieme \mathcal{S}_B è denso in $L^1(\mu; B)$, si vede che le proprietà (i) e (ii) determinano univocamente l'integrale su $\int_X d\mu$ su tutto $L^1(\mu; B)$.

Per dimostrare la proprietà (iii), notiamo che dalle ipotesi segue:

$$\|f_n - f\| \leq 2\|g\| \in L^1(\mu)$$

e dal teorema della convergenza dominata ordinario si ottiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \|f_n - f\| d\mu = 0.$$

Di conseguenza, dalla (ii) segue:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu \right\| = 0,$$

cioè la tesi.

Infine, per dimostrare la (iv), notiamo che questa è senz'altro vera per le funzioni $s \in \mathcal{S}_B$. Il caso generale si ottiene notando che entrambi i funzionali

$$\int_X T \circ (\cdot) d\mu \quad \text{e} \quad T\left(\int_X (\cdot) d\mu\right)$$

sono continui e che \mathcal{S}_B è denso in $L^1(\mu; B)$. \square

D Problemi

D.1 Misura di Peano-Jordan e integrale di Riemann

Problema D.1. [?, Ex. 1.1.3] Supponiamo che $\mu: \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty)$ sia una funzione finitamente additiva e invariante per traslazioni sull'insieme \mathcal{E} dei polirettangoli in \mathbb{R}^n . Allora $\mu = c \cdot m$, dove $c \geq 0$ è una costante e m è la misura di PJ dei polirettangoli.

Soluzione D.2. Consideriamo per semplicità il caso $n = 1$. Sia $S = \cup_k I_k$ un poli-intervallo. Allora, dalla (1), abbiamo:

$$\begin{aligned}\mu(S) &= \sum_k \mu(I_k), \\ m(S) &= \sum_k m(I_k).\end{aligned}$$

Di conseguenza, se dimostriamo la tesi per i rettangoli abbiamo finito.

Soluzione. Poniamo $c \equiv \mu([0, 1])$. Dalla (1) e dalla (6) si ha:

$$c = \sum_{k=0}^{n-1} \mu\left(\left[k, \frac{k+1}{n}\right)\right) = n \cdot \mu\left(\left[0, \frac{1}{n}\right)\right),$$

per cui:

$$\mu\left(\left[0, \frac{1}{n}\right)\right) = \frac{c}{n} = c \cdot m\left(\left[0, \frac{1}{n}\right)\right).$$

Più in generale p, q sono interi positivi, allora, usando ancora la (1) e la (6):

$$\mu\left(\left[0, \frac{p}{q}\right)\right) = \sum_{k=0}^{p-1} \mu\left(\left[\frac{k}{q}, \frac{k+1}{q}\right)\right) = p \mu\left(\left[0, \frac{1}{q}\right)\right) = c \cdot p \cdot m\left(\left[0, \frac{1}{q}\right)\right) = c \cdot m\left(\left[0, \frac{p}{q}\right)\right).$$

Se $t > 0$ è un numero reale, sia $r_n > 0$ un razionale tale che:

$$r_n < t < r_n + \frac{1}{n}.$$

Poichè la (1) implica la (3), abbiamo:

$$\mu([0, r_n]) \leq \mu([0, t]) \leq \mu\left(\left[0, r_n + \frac{1}{n}\right)\right),$$

ovvero:

$$c \cdot m([0, r_n]) \leq \mu([0, t]) \leq c \cdot m([0, r_n]) + \frac{c}{n}.$$

Passando al limite per $n \rightarrow \infty$, $r_n \rightarrow t$ e:

$$c \cdot m([0, t]) \leq \mu([0, t]) \leq c \cdot m([0, t]).$$

Dunque:

$$\mu([0, t]) = c \cdot m([0, t])$$

e, dall'invarianza per traslazioni:

$$\mu([a, b]) = c \cdot m([a, b]),$$

per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Notiamo infine che la $\mu(\{x\}) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, in quanto:

$$\mu(\{x\}) \leq \mu\left(\left[x, x + \frac{1}{n}\right)\right) = \frac{c}{n}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ne concludiamo perciò:

$$\mu(I) = c \cdot m(I)$$

per ogni intervallo.

Problema D.3 ([?, Ex. 1.1.5]. Caratterizzazione della misurabilità secondo PJ.). Sia m la misura di PJ su \mathbb{R}^n e $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato. Mostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti

- (1) E è PJ-misurabile.
- (2) Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due insiemi elementari P, S tali che

$$P \subseteq E \subseteq S, \quad m(S) - m(P) < \varepsilon.$$

- (3) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme elementare A tale che:

$$m^*(A\Delta E) \leq \varepsilon.$$

Soluzione. Mostreremo che (1) \implies (2) \implies (3). Se E è PJ misurabile, allora:

$$\sup_{P \subseteq E} m(P) = m(E) = \inf_{E \subseteq S} m(S).$$

Dato $\varepsilon > 0$, esistono $P \subseteq E \subseteq S$, tali che:

$$m(P) \geq m(E) - \frac{\varepsilon}{2}, \quad m(S) \leq m(E) + \frac{\varepsilon}{2},$$

da cui $m(S) - m(P) \leq \varepsilon$. Quindi (1) \implies (2).

Supponiamo che valga (2), sia dato $\varepsilon > 0$ e siano P e S come nell'enunciato di (2). Allora:

$$S \setminus P \supseteq E \setminus P = E \Delta P.$$

Poichè $S \setminus P$ è un insieme elementare, si ha:

$$m^*(E \Delta P) \leq m(S \setminus P) = m(S) - m(P) = \varepsilon.$$

Quindi (2) \implies (3).

Supponiamo infine che valga (3), sia dato $\varepsilon > 0$ e A come nell'enunciato di (3). Poichè $m^*(A\Delta E) \leq \varepsilon$, esiste un insieme elementare S tale che:

$$A\Delta E \subseteq S, \quad m(S) \leq 2\varepsilon.$$

Poniamo:

$$\begin{aligned} S_1 &= A \cup S, \\ P_1 &= A \setminus S. \end{aligned}$$

Poichè:

$$S \supseteq (A \setminus E) \cup (E \setminus A),$$

si ha:

$$P_1 \subseteq A \setminus (A \setminus E) \subseteq E \subseteq A \cup (E \setminus A) \subseteq S_1.$$

Ma:

$$\begin{aligned} m(S_1) &= m(A \cup S) \\ &= m(A \setminus S) + m(S \setminus A) + m(A \cap S) \\ &\leq m(P_1) + 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Pertanto:

$$m^*(E) - m_*(E) \leq m(S_1) - m(P_1) \leq 4\varepsilon.$$

Poichè $\varepsilon > 0$ è arbitrario, si ha $m^*(E) = m_*(E)$ e quindi (3) \implies (1).

Problema D.4 ([?, Ex. 1.1.6] I sottografici sono PJ misurabili.). Sia $f: [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua non negativa.

- (1) Mostrare che il grafico $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ di f è PJ-misurabile ed ha misura zero.
- (2) Mostrare che il sottografico $\tilde{\Gamma}$ di f è PJ-misurabile.

Soluzione. Sia dato $\varepsilon > 0$. Dividiamo la cella $[0, 1]^n$ in tante sotto-celle $\{I_k, k = 1, 2, \dots, N^n\}$ cubiche di lato $\frac{1}{N}$, poniamo:

$$M_k = \max_{I_k} f, \quad m_k = \min_{I_k} f.$$

Poichè f è uniformemente continua sul compatto $[0, 1]^n$, se N è sufficientemente grande si ha:

$$M_k - m_k \leq \varepsilon$$

per ogni k . Di conseguenza, il polirettangolo $A = \cup_k (I_k \times [m_k, M_k])$ ricopre il grafico Γ . Poichè:

$$m(A) \leq \varepsilon$$

e ε è arbitrario, concludiamo che Γ è PJ-misurabile e $m(\Gamma) = 0$. Inoltre, posti:

$$P = \cup_k (I_k \times [0, m_k]), \quad S = \cup_k (I_k \times [0, M_k]),$$

si ha:

$$P \subseteq \tilde{\Gamma} \subseteq S, \quad m(S) - m(P) = m(A) \leq \varepsilon$$

e, di nuovo, poichè ε è arbitrario, $\tilde{\Gamma}$ è PJ-misurabile.

Problema D.5. [?, Ex. 1.1.11] Sia $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare.

(1) Mostrare che esiste un numero non negativo D tale che:

$$m(L(E)) = Dm(E)$$

per ogni insieme elementare E .

(2) Mostrare che se E è PJ-misurabile, anche $L(E)$ è PJ misurabile e $m(L(E)) = Dm(E)$.

(3) Mostrare che $D = |\det L|$.

Soluzione. Se $\det L = 0$, allora $L(\mathbb{R}^n)$ è contenuto in un iperpiano. E è un qualsiasi insieme limitato, allora $L(E)$ è un insieme limitato contenuto in un iperpiano di \mathbb{R}^n , per cui ha misura nulla e le (1), (2) e (3) sono vere.

Supponiamo $\det L \neq 0$. Notiamo innanzitutto che, se E è un unione di rettangoli, allora $L(E)$ è un unione di parallelepipedi, per cui $L(E)$ è PJ misurabile.

Siano E_1 e E_2 due insiemi elementari. Abbiamo:

$$L(E_1 \cup E_2) = L(E_1) \cup L(E_2).$$

Poichè L è invertibile, se E_1 e E_2 sono insiemi disgiunti, allora anche $L(E_1)$ e $L(E_2)$ sono insiemi disgiunti. Per l'additività di m si ha:

$$m(L(E_1 \cup E_2)) = m(L(E_1)) + m(L(E_2)).$$

Se E è un insieme elementare e $x \in \mathbb{R}^n$, allora:

$$L(E + x) = L(E) + L(x)$$

e dall'invarianza per traslazioni di m segue:

$$m(L(E + x)) = m(L(E)).$$

Di conseguenza, $E \mapsto m(L(E))$ è una funzione positiva e invariante per traslazioni definita sulla collezione \mathcal{E} degli insiemi elementari. Ne segue la (1) per qualche $D \geq 0$.

Supponiamo che E sia PJ-misurabile e sia dato $\varepsilon > 0$. Siano $P \subseteq E \subseteq S$ polirettangoli soddisfacenti:

$$m(S) - m(P) \leq \varepsilon.$$

Allora $L(P) \subseteq L(E) \subseteq L(S)$ e:

$$m(L(S)) - m(L(P)) \leq D\varepsilon.$$

Esistono allora due polirettangoli $P' \subseteq L(P) \subseteq L(E) \subseteq L(S) \subseteq S'$ tali che:

$$m(S') - m(P') \leq (D + 1)\varepsilon.$$

Ne segue che $L(E)$ è PJ-misurabile. Inoltre:

$$\begin{aligned} m(L(E)) - Dm(E) &= m(L(E)) - m(L(S)) + m(L(S)) - Dm(E) \\ &\leq m(L(E)) - m(L(S)) + D[m(S) - m(E)] \\ &\leq 2D\varepsilon. \end{aligned}$$

Poichè ε è arbitrario, si ha $m(L(E)) = Dm(E)$.

Per mostrare che $D = |\det L|$, consideriamo innanzitutto i seguenti casi particolari: se $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, allora $\Lambda([0, 1]^n) = \prod_i [0, \lambda_i]$, per cui $D(\Lambda) = m(\Lambda([0, 1]^n)) = |\det \Lambda|$; se $R \in O(n)$, allora $RS^{n-1} = S^{n-1}$, per cui $D(R) = \frac{m(RS^{n-1})}{m(S^{n-1})} = 1 = |\det R|$.

Nel caso generale, se $L \in GL(n, \mathbb{R})$, esiste una decomposizione polare:

$$L = SR = B^T \Lambda B R,$$

dove Λ è diagonale e $B, R \in O(n)$ (S è simmetrica definita positiva). Poichè i fattori D associati a una trasformazione lineare sono moltiplicativi, si ha:

$$\begin{aligned} D(L) &= D(B^T)D(\Lambda)D(B)D(R) \\ &= |\det B^T| |\det \Lambda| |\det B| |\det R| \\ &= |\det L| \end{aligned}$$

e abbiamo finito.

Problema D.6 ([?, Ex. 1.1.13]). Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme PJ-misurabile. Dimostrare la formula:

$$m(E) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^n} \text{Card}(E \cap \frac{\mathbb{Z}^n}{N}), \quad (\text{D.1})$$

dove $\frac{\mathbb{Z}^n}{N} \equiv \{x = \frac{m}{N}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$.

Soluzione. Dimostriamo innanzitutto la formula per la n -cella $E = \prod_i [0, t_i]$, dove $t_1, \dots, t_n > 0$. Fissato $N \in \mathbb{N}$, siano $m_i^{(N)}$ interi non negativi tali che:

$$\frac{m_i^{(N)}}{N} \leq t_i \leq \frac{m_i^{(N)} + 1}{N}$$

e sia I_N la n -cella $I_N = \prod_i \left[0, \frac{m_i^{(N)}}{N}\right]$. Notiamo che:

$$I_N \cap \frac{\mathbb{Z}^n}{N} = E \cap \frac{\mathbb{Z}^n}{N},$$

per cui:

$$\text{Card}(E \cap \frac{\mathbb{Z}^n}{N}) = \text{Card}(I_N \cap \frac{\mathbb{Z}^n}{N}) = \prod_{i=1}^n m_i^{(N)}.$$

Di conseguenza:

$$\frac{1}{N^n} \text{Card}(E \cap \frac{\mathbb{Z}^n}{N}) = \frac{1}{N^n} \prod_{i=1}^n m_i^{(N)} = \prod_{i=1}^n \left(\frac{m_i^{(N)}}{N}\right).$$

Ma:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{m_i^{(N)}}{N} = t_i.$$

Di conseguenza:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^n} \text{Card}(E \cap \frac{\mathbb{Z}^n}{N}) = \prod_i t_i = m(E).$$

Se $E = \prod_i [a_i, b_i]$ è una n -cella arbitraria e $\tilde{E} = \prod_i [0, b_i - a_i]$, allora:

$$\text{Card}(\tilde{E} \cap \frac{\mathbb{Z}^n}{N}) = \text{Card}(E \cap \frac{\mathbb{Z}^n}{N}) + O(N^{n-1}),$$

per cui

$$\begin{aligned} m(E) &= m(\tilde{E}) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^n} \text{Card}(\tilde{E} \cap \frac{\mathbb{Z}^n}{N}) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^n} \text{Card}(E \cap \frac{\mathbb{Z}^n}{N}). \end{aligned}$$

Se $E = \cup R_k$ è un insieme elementare:

$$\begin{aligned} m(E) &= \sum_k m(R_k) \\ &= \sum_k \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^n} \text{Card}(R_k \cap \frac{\mathbb{Z}^n}{N}) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^n} \text{Card}((\cup_k R_k) \cap \frac{\mathbb{Z}^n}{N}) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^n} \text{Card}(E \cap \frac{\mathbb{Z}^n}{N}). \end{aligned}$$

Infine, se E è un insieme PJ misurabile, siano $\{P_k\}$ e $\{S_k\}$ due successioni di insiemi elementari tali che $P_k \subseteq E \subseteq S_k$ e:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m(P_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(S_k) = m(E).$$

Poichè:

$$\text{Card}(P_k \cap \frac{\mathbb{Z}^n}{N}) \leq \text{Card}(E \cap \frac{\mathbb{Z}^n}{N}) \leq \text{Card}(S_k \cap \frac{\mathbb{Z}^n}{N}),$$

si ha:

$$\begin{aligned} m(P_k) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^n} \text{Card}(P_k \cap \frac{\mathbb{Z}^n}{N}) \\ &\leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^n} \text{Card}(E \cap \frac{\mathbb{Z}^n}{N}) \\ &\leq \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^n} \text{Card}(E \cap \frac{\mathbb{Z}^n}{N}) \\ &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^n} \text{Card}(S_k \cap \frac{\mathbb{Z}^n}{N}) \\ &= m(S_k). \end{aligned}$$

Prendendo il limite per $k \rightarrow \infty$ della precedente catena di disuguaglianze, si trova che esiste:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^n} \text{Card}(E \cap \frac{\mathbb{Z}^n}{N}) = m(E).$$

e abbiamo finito.

Osservazione D.7. Un'altra formulazione della (D.1) è la seguente. Definiamo il cubo diadico:

$$\left[\frac{i_1}{2^N}, \frac{i_1 + 1}{2^N} \right) \times \left[\frac{i_2}{2^N}, \frac{i_2 + 1}{2^N} \right) \times \cdots \times \left[\frac{i_n}{2^N}, \frac{i_n + 1}{2^N} \right),$$

dove gli i_k sono interi. Dato un insieme limitato E , siano $\mathcal{E}_*(E, 2^{-N})$ e $\mathcal{E}^*(E, 2^{-N})$ il numero di cubi di lato 2^{-N} contenuti in E e che intersecano E rispettivamente. Allora E è PJ-misurabile se e solo se:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} 2^{-nN} (\mathcal{E}^*(E, 2^{-N}) - \mathcal{E}_*(E, 2^{-N})) = 0,$$

e in tal caso:

$$m(E) = \lim_{N \rightarrow \infty} 2^{-nN} \mathcal{E}_*(E, 2^{-N}).$$

La quantità $\mathcal{E}_*(E, 2^{-N})$ è chiamata “entropia metrica” di E (alla scala 2^{-N}).

Problema D.8 ([?, Ex. 1.1.15] Unicità della misura di Jordan.). Sia $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ la famiglia degli insiemi PJ-misurabili e $m': \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty)$ una funzione finitamente additiva e invariante per traslazioni. Mostrare che esiste una costante $c \geq 0$ tale che $m' = c \cdot m$.

Dimostrazione. Sappiamo già che esiste una costante $c \geq 0$ tale che $m'(E) = c \cdot m(E)$ per ogni E elementare. Se E è PJ misurabile, per ogni $k \in \mathbb{N}$ esistono $P_k \subseteq E \subseteq S_k$ elementari tali che

$$m(S_k) - m(P_k) \geq \frac{1}{k}.$$

Ma allora:

$$c \cdot m(S_k) = m'(S_k) \geq m'(E) \geq m'(P_k) = c \cdot m(P_k),$$

dove la monotonia di m' segue dall'ipotesi di additività. Passando al limite per $k \rightarrow \infty$, poichè

$$m(P_k), m(S_k) \rightarrow m(E),$$

si ottiene $m'(E) = c \cdot m(E)$ per ogni E misurabile secondo PJ. □

Problema D.9 ([?, Ex. 1.1.18]). Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme limitato.

- (1) Mostrare che E e la sua chiusura \overline{E} hanno la stessa misura di PJ esterna.
- (2) Mostrare che E e il suo interno E° hanno la stessa misura di PJ interna.
- (3) Mostrare che E è PJ-misurabile se e solo se la frontiera topologica ∂E ha misura nulla.

Soluzione. Tutte le affermazioni sono ovvie se E è un rettangolo. Sia $E = \cup_k R_k$ un polirettangolo, con R_k disgiunti. L'interno e la chiusura di E sono, per definizione, il più grande aperto contenuto in E e il più piccolo chiuso contenente E . Poichè $\cup_k R_k^\circ \subseteq E$ è aperto $\cup_k \overline{R_k} \supseteq E$ è chiuso si ha la seguente catena di inclusioni:

$$\cup_k R_k^\circ \subseteq E^\circ \subseteq E \subseteq \overline{E} \subseteq \cup_k \overline{R_k}.$$

L'intersezione delle chiusure $\overline{R_k}$ ha chiaramente misura nulla, per cui:

$$\sum_k m(R_k) = m(\cup_k R_k^\circ) \leq m_*(E^\circ) \leq m(E) \leq m^*(\overline{E}) \leq m(\cup_k \overline{R_k}) \leq \sum_k m(R_k).$$

Ne seguono la (1) e la (2) per i polirettangoli.

Sia ora E è un insieme limitato arbitrario. Per quanto visto sopra, per ogni polirettangolo A , esistono due polirettangoli $A_1 \subseteq A \subseteq A_2$ con A_1 aperto, A_2 chiuso e $m(A_1) = m(A_2) = m(A)$. Di conseguenza, nella definizione di $m^*(E)$ e $m_*(E)$ ci possiamo limitare ai polirettangoli chiusi e aperti rispettivamente:

$$m^*(E) = \inf_{E \subseteq S \text{ chiuso}} m(S)$$

$$m_*(E) = \sup_{E \supseteq P \text{ aperto}} m(P)$$

D'altra parte, se S è chiuso, $S \supseteq E$ se e solo se $S \supseteq \overline{E}$. Analogamente, se P è aperto, $P \subseteq E$ se e solo se $P \subseteq E^\circ$. Di conseguenza:

$$m^*(E) = \inf_{E \subseteq S \text{ chiuso}} m(S) = \inf_{\overline{E} \subseteq S \text{ chiuso}} m(S) = m^*(\overline{E}),$$

$$m_*(E) = \sup_{E \supseteq P \text{ aperto}} m(P) = \sup_{E^\circ \supseteq P \text{ aperto}} m(P) = m_*(E^\circ),$$

il che dimostra la (1) e la (2) nel caso generale.

Per la (3), si noti che se $P \subseteq E^\circ \subseteq \overline{E} \subseteq S$, allora $S \setminus P \supseteq \partial E = \overline{E} \setminus E^\circ$. Se l'insieme E è PJ misurabile, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $P \subseteq E^\circ \subseteq \overline{E} \subseteq S$, con P aperto e S chiuso tali che $m(S \setminus P) \leq \varepsilon$, per cui $m^*(\overline{E} \setminus E^\circ) = 0$. Se invece $m^*(\overline{E} \setminus E^\circ) = 0$, sia dato $\varepsilon > 0$ e sia $A \supseteq \overline{E} \setminus E^\circ$ un polirettangolo aperto²⁷ tale che $m(A) \leq \varepsilon$. Per ogni $x \in E^\circ$, sia $R_x \subseteq E^\circ$ un rettangolo aperto contenente x . Allora:

$$\{A, V_x \ x \in E^\circ\}$$

è un ricoprimento aperto di \overline{E} , per cui esistono x_1, x_2, \dots, x_N tali che:

$$\overline{E} \subseteq A \cup R_{x_1} \cup \dots \cup R_{x_N}.$$

Per costruzione si ha anche:

$$R_{x_1} \cup \dots \cup R_{x_N} \subseteq E^\circ.$$

Di conseguenza:

$$m(R_{x_1} \cup \dots \cup R_{x_N}) \leq m_*(E^\circ) \leq m^*(\overline{E}) \leq m(A \cup R_{x_1} \cup \dots \cup R_{x_N}) \leq m(R_{x_1} \cup \dots \cup R_{x_N}) + m(A).$$

Ovvero:

$$m^*(\overline{E}) - m_*(E^\circ) \leq m(A) \leq \varepsilon.$$

Poichè ε è arbitrario, ne concludiamo $m^*(\overline{E}) = m_*(E^\circ)$ e quindi E è misurabili per i punti (1)-(2).

Problema D.10 ([?, Ex. 1.1.19]Proprietà di Carathéodory). Sia E un insieme limitato e F un insieme elementare. Mostrare che:

$$m^*(E) = m^*(E \cap F) + m^*(E \setminus F) \quad (\text{D.2})$$

Soluzione. Sia $S \supseteq E$ un polirettangolo. Allora $S \cap F \supseteq E \cap F$ e $S \setminus F \supseteq E \setminus F$ sono polirettangoli, per cui:

$$\begin{aligned} m(S \cap F) &\geq m^*(E \cap F), \\ m(S \setminus F) &\geq m^*(E \setminus F). \end{aligned}$$

Di conseguenza:

$$m(S) = m(S \cap F) + m(S \setminus F) \geq m^*(E \cap F) + m^*(E \setminus F).$$

Ne segue che

$$m^*(E) \geq m^*(E \cap F) + m^*(E \setminus F).$$

Siano $S_1 \supseteq E \cap F$, $S_2 \supseteq E \setminus F$. Allora $S'_1 = S_1 \cap F \supseteq E \cap F$ e $S'_2 = S_2 \setminus F \supseteq E \setminus F$. Inoltre S'_1 e S'_2 sono polirettangoli disgiunti e $S'_1 \cup S'_2 \supseteq E$. Di conseguenza:

$$m(S_1) + m(S_2) \geq m(S'_1) + m(S'_2) = m(S_1 \cup S_2) \geq m^*(E).$$

Prendendo l'inf su tutti gli S_1 e S_2 otteniamo:

$$m^*(E \cap F) + m^*(E \setminus F) \geq m^*(E).$$

Ne segue la tesi.

Problema D.11. Sia $\mathcal{R}([a, b])$ lo spazio delle funzioni Riemann-integrabili sull'intervallo $[a, b]$ e sia $\Lambda: \mathcal{R}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ un funzionale lineare positivo tale che $\Lambda(\chi_E) = m(E)$ per ogni insieme PJ-misurabile. Mostrare che Λ è l'integrale di Riemann.

²⁷Per costruirlo, possiamo partire da un polirettangolo qualsiasi $S_0 = \cup_{k=1}^N R_k^{(0)}$, con $R_k^{(0)}$ disgiunti e $m(S_0) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Se $R_k \supseteq R_k^{(0)}$ sono rettangoli aperti tali che $m(R_k) - m(R_k^{(0)}) \leq \frac{\varepsilon}{2N}$, allora, posto $S = \cup_k R_k$, si ha:

$$m(S) \leq \sum_k m(R_k) \leq \sum_k (m(R_k^{(0)}) + \frac{\varepsilon}{2N}) \leq \varepsilon.$$

Soluzione. Vogliamo dimostrare che la formula

$$\Lambda(f) = \int_a^b f(x) dx$$

è valida per ogni $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Chiaramente, la formula è valida per le funzioni caratteristiche dei poli-intervalli e, per linearità, per le funzioni costanti a tratti.

Siano dati $f \in \mathcal{R}([a, b])$ e $\varepsilon > 0$ e siano φ e Φ due funzioni costanti a tratti tali che $\varphi \leq f \leq \Phi$:

$$\int \varphi \geq \int f - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \int \Phi \leq \int f + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Per linearità si ha:

$$\Lambda(\varphi) = \int \varphi \leq \Lambda(f), \quad \int f \leq \int \Phi = \Lambda(\Phi).$$

Di conseguenza

$$\left| \Lambda(f) - \int f \right| \leq \int \Phi - \int \varphi \leq \varepsilon$$

e, poichè $\varepsilon > 0$ è arbitrario, $\Lambda(f) = \int f$.

D.2 Misura di Lebesgue

Esercizio D.12 ([?, Ex. 1.2.3]). Dimostrare che la misura esterna di Lebesgue m^* è numerabilmente subadditiva:

$$m^*(\cup_i E_i) \leq \sum_i m^*(E_i).$$

Soluzione. Se $m^*(E_i) = \infty$ per qualche E_i , allora entrambi i membri della disuguaglianza sono ∞ . Altrimenti, sia dato $\varepsilon > 0$. Per $i = 1, 2, \dots$, sia $\{R_k^{(i)}, k = 1, 2, \dots\}$ una collezione di rettangoli ricoprenti E_i e tali che²⁸:

$$\sum_k m(R_k^{(i)}) \leq m^*(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Allora, la collezione $\{R_k^{(i)}, k = 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots\}$ ricopre $\cup_i E_i$ e, per il teorema di Tonelli sulle serie di numeri non negativi, si ha:

$$m^*(E) \leq \sum_i \sum_k m(R_k^{(i)}) \leq \sum_i m^*(E_i) + \varepsilon.$$

Poichè ε è arbitrario, segue la tesi.

D.3 Spazi L^p

Esercizio D.13. Sia $(f_n)_n$ una successione limitata in $L^p(\mu)$, $1 < p \leq \infty$. Dimostrare che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x)}{n} = 0 \quad \text{q.o. } [\mu].$$

Soluzione D.14. Supponiamo:

$$\|f_n\|_p \leq K < \infty$$

per ogni n .

²⁸L'esistenza di una tale collezione segue dall'assioma della scelta numerabile. Posto $\mathcal{R}(\varepsilon) = \{\mathcal{R}_i(\varepsilon)\}_{i=1,2,\dots}$, dove $\mathcal{R}_i(\varepsilon) = \{\{R_k^{(i)}\} \mid \sum_k m(R_k^{(i)}) \leq m^*(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}\}$, per l'assioma della scelta numerabile possiamo scegliere un elemento $\{R_k^{(i)}\}$ per ogni $i = 1, 2, \dots$, come richiesto dalla dimostrazione del teorema.

Consideriamo prima il caso $p = \infty$ e siano:

$$E_n = \{|f_n(x)| > K\},$$

$$E = \cup_n E_n.$$

Per ipotesi $\mu(E_n) = 0$ e quindi $\mu(E) = 0$. Se $x \notin E$, allora $|f_n(x)| < K$ per ogni n e quindi:

$$\frac{|f_n(x)|}{n} < \frac{K}{n} \rightarrow 0.$$

Supponiamo ora $p < \infty$ e fissiamo $\varepsilon > 0$. Poniamo:

$$E_n = \left\{ \frac{|f_n(x)|}{n} > \varepsilon \right\},$$

$$F_k = \bigcup_{n \geq k} E_n,$$

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k.$$

Abbiamo:

$$(n\varepsilon)^p \mu(E_n) \leq \int_{E_n} |f_n(x)|^p d\mu \leq K^p,$$

per cui:

$$\mu(E_n) \leq \left(\frac{\varepsilon K}{n}\right)^p.$$

Quindi:

$$\mu(F_k) \leq \sum_{n \geq k} \mu(E_n) \leq (\varepsilon K)^p \sum_{n \geq k} n^{-p}$$

e:

$$\mu(F) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(F_k) = 0.$$

Notiamo ora che:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|f_n(x)|}{n} > \varepsilon > 0$$

se e soltanto se per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste un $n \geq k$ tale che:

$$\frac{|f_n(x)|}{n} > \varepsilon,$$

vale a dire, se e soltanto se $x \in F$. Quindi:

$$\mu\left(\left\{x \mid \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|f_n(x)|}{n} > \varepsilon\right\}\right) = 0.$$

Poichè:

$$\left\{x \mid \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|f_n(x)|}{n} > 0\right\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{x \mid \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|f_n(x)|}{n} > \frac{1}{m}\right\},$$

si ha:

$$\mu\left(\left\{x \mid \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|f_n(x)|}{n} > 0\right\}\right) = 0,$$

ovvero:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f_n(x)|}{n} = 0$$

per quasi ogni $x \in X$.

Problema D.15. Siano date, per $i = 1, 2, \dots, N$, $f_i \in L^{p_i}(\mu)$, dove $1 \leq p_i \leq \infty$. Mostrare che $f = f_1 f_2 \cdots f_N \in L^p(\mu)$, dove:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_N},$$

e:

$$\|f\|_p = \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \cdots \|f_N\|_{p_N}.$$

Soluzione. Chiaramente la tesi segue, per induzione, dal caso $N = 2$. In tal caso, dalla disuguaglianza di Holder si ha:

$$\begin{aligned} \|f\|_p^p &= \int_X |f_1|^{\frac{p_1 p_2}{p_1 + p_2}} |f_2|^{\frac{p_1 p_2}{p_1 + p_2}} d\mu \\ &\leq \left\{ \int_X |f_1|^{p_1} d\mu \right\}^{\frac{p_2}{p_1 + p_2}} \left\{ \int_X |f_2|^{p_2} d\mu \right\}^{\frac{p_1}{p_1 + p_2}} \\ &= \|f_1\|_{p_1}^p \|f_2\|_{p_2}^p. \end{aligned}$$

Problema D.16. Siano $1 \leq p, q \leq \infty$.

(i) Dimostrare che $L^1(\mu) \cap L^\infty(\mu)$ è denso in $L^p(\mu)$.

(ii) Provare che l'insieme $\mathcal{F} = \{f \in L^p(\mu) \cap L^q(\mu) \mid \|f\|_q \leq 1\}$ è chiuso in $L^p(\mu)$.

(iii) Sia $(f_n)_n$ una successione in $L^p(\mu) \cap L^q(\mu)$ e sia $f \in L^p(\mu)$. Supponiamo che $f_n \rightarrow f$ in $L^p(\mu)$ e che $\sup_n \|f_n\|_q < \infty$. Dimostrare che $f \in L^r(\mu)$ e $f_n \rightarrow f$ in $L^r(\mu)$ per ogni $r \neq q$ compreso fra p e q .

Soluzione. (i) Notiamo che, per il teorema del confronto 10.16:

$$L^1(\mu) \cap L^\infty(\mu) \subseteq L^p(\mu).$$

Sia data $f \in L^p(\mu)$. Possiamo assumere senza perdita di generalità $f \geq 0$. Se:

$$s = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{E_k},$$

è una funzione semplice tale che $0 \leq s \leq f$, allora:

$$\sum_{k=1}^n a_k^p \mu(E_k) = \int_X s^p d\mu \leq \int_X f^p d\mu < \infty.$$

Ne segue che $\mu(E_k) < \infty$ se $a_k \neq 0$, per cui $s \in L^1(\mu) \cap L^\infty(\mu)$.

Sia:

$$0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n \leq f$$

una successione di funzioni semplici convergenti puntualmente ad f . Dal teorema della convergenza monotona segue:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X (f - s_n)^p d\mu = 0,$$

ovvero $s_n \rightarrow f$ in $L^p(\mu)$. Poichè $f \in L^p(\mu)$ è arbitraria (la restrizione $f \geq 0$ si rimuove facilmente), ciò dimostra la tesi.

(ii) Notiamo innanzitutto che l'insieme delle funzioni semplici s tali che:

$$\|s\|_q \leq 1$$

è denso in \mathcal{F} . Infatti, se $f \in \mathcal{F}$ e $f \geq 0$, esiste una successione di funzioni semplici tali che:

$$\begin{aligned} s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n \leq f, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n - f\|_p = 0, \end{aligned}$$

e dalla prima catena di disuguaglianze segue:

$$\|s_n\|_q \leq \|f\|_q \leq 1.$$

Dunque, se $f^* \in \overline{\mathcal{F}}$ e $f^* \geq 0$, esiste una successione di funzioni semplici $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ tale che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n - f^*\|_p = 0.$$

Dal teorema della convergenza monotona si ha quindi:

$$\int_X (f^*)^q d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X s_n^q d\mu \leq 1,$$

per cui $\|f^*\|_q \leq 1$ e $f^* \in \mathcal{F}$. Se ora $f^* \in \overline{\mathcal{F}}$ non è necessariamente positiva, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ e $f_n \rightarrow f$ in L^p , allora:

$$\| |f_n| - |f^*| \|_p^p = \int_X \| |f_n| - |f^*| \|^p d\mu \leq \int_X |f_n - f^*|^p d\mu \rightarrow 0$$

e, poichè la successione $(|f_n|)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$, si ha che $|f^*| \in \overline{\mathcal{F}}$. Quindi, il precedente ragionamento applicato a $|f^*|$ mostra che $\|f^*\|_q \leq 1$.

(iii) Il punto precedente mostra che se:

$$\sup_n \|f_n\|_q = K < \infty,$$

allora $\|f\|_q \leq K$. Di conseguenza $f \in L^p(\mu) \cap L^q(\mu)$ e, dall'inclusione:

$$L^p(\mu) \cap L^q(\mu) \subseteq L^r(\mu),$$

valida per $p \leq r \leq q$, segue $f \in L^r(\mu)$ per ogni $p \leq r \leq q$. Se inoltre $r < q$ e:

$$\frac{1}{r} = \frac{1-\lambda}{p} + \frac{\lambda}{q},$$

allora, dal teorema del confronto:

$$\|f - f_n\|_r \leq \|f - f_n\|_p^{1-\lambda} \|f - f_n\|_q^\lambda \leq \|f - f_n\|_p^{1-\lambda} (2K)^\lambda$$

e quindi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_r = 0$$

per $n \rightarrow \infty$.

Problema D.17. Sia:

$$\mathcal{F} = \left\{ u \in C_c(\mathbb{R}) \mid \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) dx = 0 \right\}.$$

Dimostrare che \mathcal{F} è denso in $L^p(\mathbb{R})$ per $1 < p < \infty$, ma non è denso in $L^1(\mathbb{R})$.

Soluzione. Sia data $f \in L^p(\mathbb{R})$, con $1 < p < \infty$ e sia $\varepsilon > 0$. Poichè $C_c(\mathbb{R})$ è denso in $L^p(\mathbb{R})$, esiste $g \in C_c(\mathbb{R})$ tale che:

$$\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Consideriamo la seguente successione di funzioni:

$$\rho_n(x) = C_n \begin{cases} \frac{1}{2n} & |x| \leq n, \\ \frac{1}{2n} - \frac{1}{2}(|x| - n) & n < |x| \leq n + \frac{1}{n}, \\ 0 & |x| > n + \frac{1}{n}, \end{cases}$$

dove C_n è tale che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(x) dx = 1.$$

Notiamo che:

$$\|\rho_n\|_p^p = \frac{A}{n^{p-1}}$$

per qualche costante $A > 0$ indipendente da n .

Poniamo:

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx$$

e

$$g_n = g - K\rho_n.$$

Chiaramente ogni $g_n \in \mathcal{F}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre:

$$\begin{aligned} \|f - g_n\|_p &\leq \|f - g\|_p + \|g - g_n\|_p \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + K \|\rho_n\|_p \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

per n sufficientemente grande. Poichè $\varepsilon > 0$ è arbitrario, ne segue che \mathcal{F} è denso in $L^p(\mathbb{R})$ per ogni $1 < p < \infty$.

Per dimostrare che \mathcal{F} non è denso in $L^1(\mathbb{R})$, notiamo che il funzionale:

$$L^1(\mathbb{R}) \ni f \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f dx$$

è continuo in $L^1(\mathbb{R})$. Se $f_n \in \mathcal{F}$ è una successione convergente a f in L^1 , allora:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n dx = 0.$$

Quindi, se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f dx \neq 0,$$

non esiste alcuna successione in \mathcal{F} convergente a f .

Problema D.18. Dimostrare il Lemma di Paley-Zygmund: se $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ è tale che

$$\int_0^1 f^2 dx = 1, \quad \int_0^1 f dx = \alpha > 0,$$

allora per ogni $0 < \beta < \alpha$ si ha:

$$(\alpha - \beta)^2 \leq \lambda(\{f(x) \geq \beta\}).$$

Soluzione. Abbiamo:

$$\alpha - \beta = \int_0^1 (f - \beta) dx \leq \int_{\{f \geq \beta\} \cap [0,1]} (f - \beta) dx.$$

Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwartz, otteniamo quindi:

$$(\alpha - \beta)^2 \leq \lambda(\{f(x) \geq \beta\}) \int_{\{f \geq \beta\} \cap [0,1]} (f - \beta)^2.$$

D'altra parte:

$$\begin{aligned} \int_{\{f \geq \beta\} \cap [0,1]} (f - \beta)^2 &\leq \int_0^1 (f - \beta)^2 dx \\ &= 1 - 2\alpha\beta + \beta^2 \\ &\leq 1 - \beta^2 \end{aligned}$$

per cui:

$$(\alpha - \beta)^2 \leq (1 - \beta^2)\lambda(\{f(x) \geq \beta\}) \leq \lambda(\{f(x) \geq \beta\})$$

Problema D.19. (i) Sia $E = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty \mid x_n = 0 \text{ definitivamente}\}$. Identificare la chiusura di E in ℓ^∞ .

(ii) Identificare la chiusura di $C_c(\mathbb{R})$ in $L^\infty(\mathbb{R})$.

Soluzione. (i) Sia $x^* = (x_n^*)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$ e sia:

$$l = \limsup_{n \rightarrow \infty} |x_n^*|.$$

Se $l > 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un $k \in \mathbb{N}$ tale che:

$$|x_{n+k}^*| \geq l.$$

Di conseguenza, se $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$, si ha:

$$|x_n - x_n^*| \geq l$$

per qualche $n \in \mathbb{N}$, ovvero:

$$\|x - x^*\|_\infty \geq l,$$

per cui x^* non è un punto di accumulazione di E . Se invece $l = 0$, si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n^*| = 0.$$

Di conseguenza, per ogni $m \in \mathbb{N}$, esiste un $N_m \in \mathbb{N}$ tale che:

$$|x_n^*| < \frac{1}{m}$$

se $n \geq N_m$. Ne segue che la successione:

$$x^{(m)} \equiv (\chi_{\{1,2,\dots,N_m\}} x_n^*)_{n \in \mathbb{N}} \in E$$

converge a x^* in norma ℓ^∞ . Quindi, la chiusura di E in ℓ^∞ consiste di tutte e sole le successioni $x^* = (x_n^*)$ tali che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n^*| = 0.$$

(ii) Data $f^* \in L^\infty(\mathbb{R})$, definiamo:

$$l = \lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{|x| \geq R} |f(x)|.$$

Se $l > 0$, come sopra concludiamo che:

$$\|f - f^*\|_\infty \geq l$$

per ogni $f \in C_c(\mathbb{R})$, per cui $f^* \notin \overline{C_c(\mathbb{R})}$.

Inoltre, se $f^* \notin C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ (vale a dire, se nella classe di equivalenza f^* non vi è una funzione continua), allora non esiste una successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tale che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f^*\|_\infty = 0,$$

in quanto il limite uniforme di funzioni continue è continuo.

Supponiamo, dunque, che f^* sia tale che:

$$f^* \in C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}), \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} |f(x)| = 0.$$

Dato $\varepsilon > 0$, fissiamo $R > 0$ in modo tale che:

$$|f^*(x)| \leq \varepsilon$$

per $|x| \geq R$. Sia $\rho_R: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞ tale che $0 \leq \rho_R(x) \leq 1$ e:

$$\begin{aligned} \rho_R(x) &= 1 & \text{se } |x| \leq R, \\ \rho_R(x) &= 0 & \text{se } |x| \geq 2R. \end{aligned}$$

Poichè f^* è continua, si ha:

$$\begin{aligned} \|f^* - \rho_R f^*\|_\infty &= \sup_{x \in \mathbb{R}} |(1 - \rho_R)f^*(x)| \\ &= \sup_{|x| \geq R} |(1 - \rho_R)f^*(x)| \\ &\leq \sup_{|x| \geq R} |f^*(x)| \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Poichè $\rho_R f^* \in C_c(\mathbb{R})$, e $\varepsilon > 0$ è arbitrario, ne concludiamo che f^* è un punto di accumulazione per $C_c(\mathbb{R})$.

Dunque, la chiusura di $C_c(\mathbb{R})$ rispetto alla norma L^∞ consiste dello spazio:

$$C_0(\mathbb{R}) = \left\{ f \in C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \mid \lim_{|x| \rightarrow \infty} |f(x)| = 0 \right\}.$$

Problema D.20. Sia $E = \{u \in C^0([0, 1]) \mid u(0) = 0\}$, $\|u\| = \sup_{[0, 1]} |u|$. Definiamo l'operatore:

$$Tu = \int_0^1 u(x) dx.$$

- (i) Verificare che T è limitato e calcolare $\|T\|$.
- (ii) Esiste $u \in E$, $\|u\| = 1$ tale che $|Tu| = \|T\|$?
- (iii) Indicare se E è uno spazio di Banach o meno.

Soluzione. (i) Per ogni $u \in E$ si ha:

$$|Tu| \leq \int_0^1 |u(x)| dx \leq \|u\|,$$

per cui $\|T\| \leq 1$. Se

$$u_n(x) = \begin{cases} nx & x \in [0, \frac{1}{n}], \\ 1 & x \in (\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

Poichè $\|u_n\| = 1$, si ha:

$$\|T\| \geq |Tu| = Tu \geq 1 - \frac{1}{n},$$

da cui $\|T\| = 1$.

(ii) Se $u \in E$, $\|u\| = 1$, esiste un $\delta > 0$ tale che $|u(x)| \leq \frac{1}{2}$ per $x \in [0, \delta]$. Di conseguenza:

$$|Tu| \leq \int_0^1 |u(x)| dx \leq \frac{\delta}{2} + \int_\delta^1 |u(x)| dx \leq 1 - \frac{\delta}{2}.$$

Di conseguenza, si ha $|Tu| < \|T\| = 1$ per ogni $u \in E$.

(iii) Una successione di funzioni $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uniformemente di Cauchy converge uniformemente ad un limite u . Inoltre, se le u_n sono continue e $u_n(0) = 0$, ciò vale anche per il limite u . Di conseguenza, una successione di Cauchy $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $(E, \|\cdot\|)$ converge a un limite $u \in E$, ovvero E è completo.