

有限 Floquet 自旋链与公共浴耦合体系的对称性与热流分析

施昊哲, 谢昀城

团队: Glaudex

摘要

周期驱动持续向开放量子系统注入能量; 当多个自旋通过同一集体算符耦合到公共浴时, 不同自旋的耗散振幅可以相长或相消, 甚至形成环境完全看不见的暗态。本文研究与零温公共浴耦合的周期驱动 Ising 开链, 以已发表的单自旋热谱为基准, 计算 $N = 2, 3, 4$ 的频率分辨热谱与总热流。我们证明: $N = 2$ 的反射奇区是完全暗的 $S = 0$ 单重态; $N = 3$ 的反射奇区精确等价于一个与相互作用无关的活跃单自旋通道; $N = 4$ 的反射奇区由两个活跃的 $S = 1$ 副本组成; 反射偶区则从 $N = 2$ 的单一 $S = 1$ 亮通道变为 $N = 3, 4$ 的多成分混合通道。Ising 相互作用只在固定反射宇称区内混合总自旋成分, 而不混合奇偶区; 完整热谱及其线性恒等式与这一分解逐频率一致。参数平均后的总热流从 $N = 2$ 到 4 近似线性增长, 但分区热流由各区包含的总自旋表示决定。这些结果表明, 在有限公共浴 Floquet 自旋链中, 对称性选择的耗散通道比自旋数或最低能隙更直接地决定热谱与热流。

关键词: 周期驱动开放量子系统; 公共浴; 频率分辨热流; 反射宇称; 总自旋; 影响泛函

1 研究背景与模型

周期驱动为量子系统提供了一种持续而可控的能量输入。对于孤立体系, 这种驱动可以改变有效能带、产生新的共振并重排准能级; 对于开放体系, 驱动输入的能量还会不断流向环境, 最终形成随驱动周期重复的非平衡状态。环境在不同频率上吸收多少能量, 不仅反映系统的跃迁结构, 也直接关系到耗散 Floquet 态能否长期稳定。因此, 频率分辨热流是连接周期动力学、环境响应和能量传输的一项自然观测量 [5, 6, 1]。

当每个自旋分别连接独立环境时, 一个自旋的耗散通常不会与另一个自旋的耗散振幅直接相加。公共浴则不同: 所有自旋通过同一个集体算符与环境耦合, 环境无法区分能量来自哪个站点。不同自旋的振幅因而可以相长, 也可以相消, 甚至形成环境完全看不见的暗态 [7, 8]。在这样的体系中, 增加一个自旋并不等于简单增加一条独立放热通道。哪些态能够向环境放热, 首先取决于系统的对称性和公共浴耦合算符在各对称子空间中的作用。

本文考虑包含 N 个自旋的开边界链。以单自旋横场强度 Ω 为能量单位, 系统哈密顿量取为

$$H_N(t) = -J \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z + \frac{\Omega}{2} \sum_{i=1}^N \sigma_i^x + \epsilon_d \cos(\omega_d t) \sum_{i=1}^N \sigma_i^z. \quad (1)$$

最近邻 Ising 相互作用的强度为 J , ϵ_d 和 ω_d 分别是驱动振幅和驱动频率。所有自旋通过

$$H_{SB} = S_N \otimes B, \quad S_N = \sum_{i=1}^N \sigma_i^z \quad (2)$$

耦合到同一个零温玻色浴。浴谱密度取为

$$J_{\text{bath}}(\omega) = \alpha \omega e^{-\omega/\omega_c}, \quad \omega > 0. \quad (3)$$

主计算固定 $\Omega = \epsilon_d = 1$ 、 $\alpha = 0.05$ 和 $\omega_c = 2.5$ ，并扫描

$$J/\Omega = \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}, \quad \omega_d/\Omega = \{0.5, 1, 1.5, 2, 2.5\}.$$

每个参数点分别从最大混合初态 $\rho_0 = I/2^N$ 和全对称乘积初态 $|-x\rangle^{\otimes N}$ 出发。为比较相互作用符号，另在 $N = 2, 3$ 对同一组驱动频率补充了 $J/\Omega = -0.5$ 的扫描（附录 D.1）；改变驱动方向的对照见附录 A。正文的跨尺寸统计只使用 $J \geq 0$ 的纵向驱动数据。

本文把单位时间流入浴的能量记为总热流 Q 。它由连续热谱和严格周期谱线两部分组成：

$$Q = \int_{0.005\Omega}^{15\Omega} j_{\text{cont}}(\omega) d\omega + \sum_n W_n. \quad (4)$$

其中 $j_{\text{cont}}(\omega)$ 描述具有有限线宽的非弹性能量传输， W_n 是位于驱动整数倍频率处的无限窄谱线的积分权重。正的 Q 表示驱动和系统净向环境放热。在本文的全部参数点上，严格周期谱线的权重 $\sum_n W_n$ 都远小于连续谱的积分，因此后文的分析以连续热谱 $j_{\text{cont}}(\omega)$ 为主。式 (4) 是全文比较不同尺寸、不同相互作用和不同对称子空间时使用的统一定义；相关函数的具体计算放在附录 B。

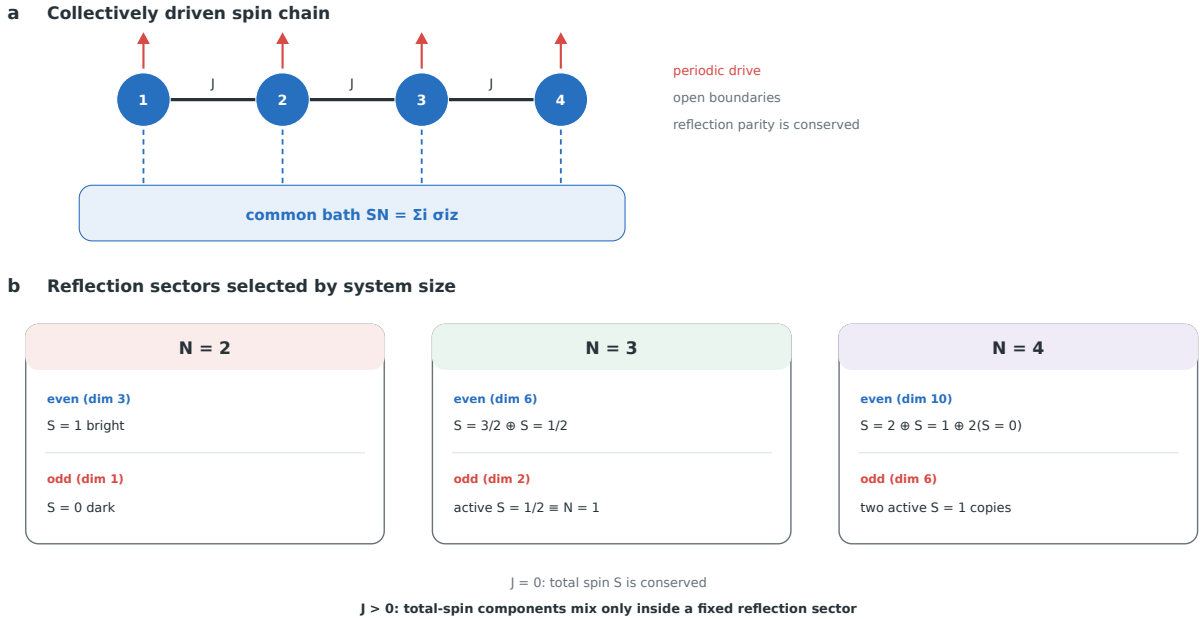


图 1: 模型及反射对称通道。 **a** 开边界自旋链受到周期驱动，并通过集体算符 $S_N = \sum_i \sigma_i^z$ 与公共浴耦合。**b** $N = 2, 3, 4$ 的反射奇偶分解。 $J = 0$ 时总自旋同时守恒； $J \neq 0$ 时不同总自旋成分只能在同一反射宇称区内混合。

本文的核心图像由图 1 概括为两条随 N 演化的主线。反射奇区从不存在 ($N = 1$) 变为完全暗的单重态 ($N = 2$)，再变为活跃的单自旋通道 ($N = 3$)，最后变为由两个 $S = 1$ 副本组成的多自旋通道 ($N = 4$)。反射偶区则从单自旋本身 ($N = 1$) 变为单一的 $S = 1$ 亮通道 ($N = 2$)，再变为含多个总自旋成分的混合通道 ($N = 3, 4$)。联系两条主线的规则是： $J = 0$ 时各总自旋表示彼此独立， $J \neq 0$ 时它们只能在固定反射宇称区内混合。下面先用已发表的单自旋热谱检验计算约定，再推导三个尺寸的精确分解，最后用完整热谱和热流展示这些通道如何控制能量传输。

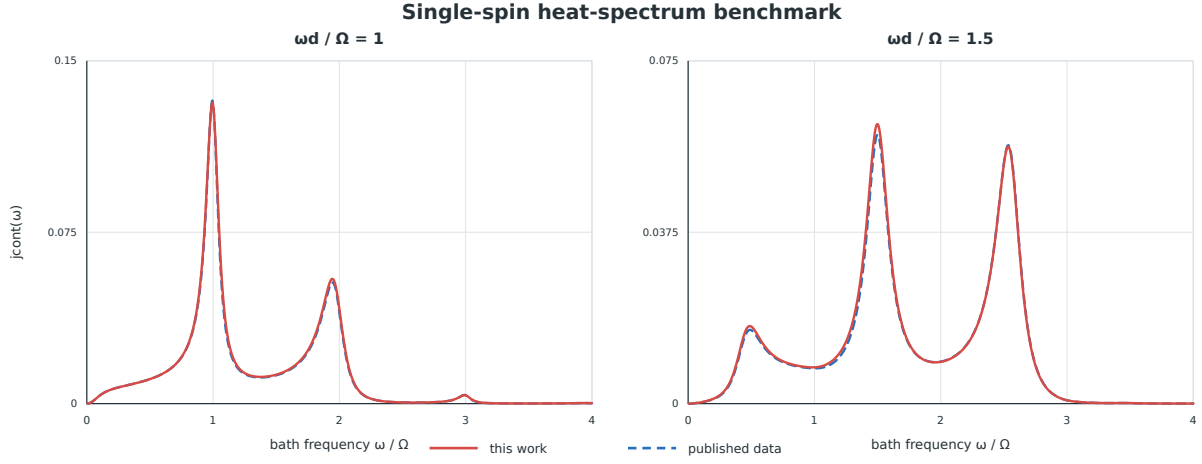


图 2: 单自旋连续热谱与公开数据的比较。红色实线为本文结果, 蓝色虚线为已发表数据 [1]; 左、右两图分别对应 $\omega_d/\Omega = 1$ 和 1.5。

2 从单自旋基准到双自旋暗态

2.1 单自旋热谱基准

强耗散驱动单自旋的长期动力学已经可以用周期影响泛函直接计算 [1, 2]。在讨论多自旋结果之前, 我们采用相同的浴谱、时间步和驱动方式, 重新计算原工作图 3 中横向驱动连续热谱; 图 2 展示 $\omega_d/\Omega = 1$ 和 1.5 两个驱动频率下的比较。

两个驱动频率下, 两条曲线在显示频率窗内的相对 L^2 差异分别为 2.92% 和 3.67%, 全部可见峰的位置一致。这说明本文的热谱定义、单位约定和长期相关函数处理能够再现已发表结果。原工作的双自旋部分主要讨论公共浴对纠缠的稳定作用, 未给出相同定义的多自旋热谱; 以下 $N \geq 2$ 的结果均为本文的新计算。

2.2 $N = 2$ 的公共浴暗态

对两个自旋, 反射操作就是交换站点 1 和 2。反射奇区只有一个态,

$$|s\rangle = \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (5)$$

即总自旋为零的单重态。它满足

$$(\sigma_1^z + \sigma_2^z)|s\rangle = 0, \quad (\sigma_1^x + \sigma_2^x)|s\rangle = 0, \quad (6)$$

以及

$$-J\sigma_1^z\sigma_2^z|s\rangle = J|s\rangle.$$

因此完整哈密顿量在这个一维子空间中只产生整体相位, 而系统-浴相互作用 $H_{\text{SB}} = S_2 \otimes B$ 在该态上严格为零。这个结论比 $\langle S_2 \rangle = 0$ 更强: 它意味着 $S_2|s\rangle = 0$, 所有从单重态出发的浴耦合跃迁矩阵元都消失。

所以, $N = 2$ 奇区不吸收驱动功, 也不向环境放热, 其连续热谱和严格周期谱线均为零。最大混合初态在反射偶区和奇区中的权重分别为 3/4 和 1/4, 而 $|-x\rangle^{\otimes 2}$ 完全位于偶区。若把完全制备

在偶区时的热流记为 $q_+^{(2)}$, 便有

$$q_-^{(2)} = 0, \quad Q_{\text{mix}}^{(2)} = \frac{3}{4}q_+^{(2)}. \quad (7)$$

这条关系对全部 J 和 ω_d 都成立。

3 $N = 2, 3, 4$ 的对称性分解

3.1 反射宇称为何始终守恒

对于开边界链, 反射算符 R_N 把站点 i 映射到 $N + 1 - i$ 。式 (1) 中的横场、纵向驱动和最近邻 Ising 相互作用都关于链中心对称, 公共浴算符 S_N 也具有同样的对称性。因此

$$[H_N(t), R_N] = 0, \quad [S_N, R_N] = 0. \quad (8)$$

投影算符

$$P_{\pm} = \frac{I \pm R_N}{2}$$

把希尔伯特空间分成反射偶区和反射奇区。系统哈密顿量、驱动和公共浴都不能把态从一个区带到另一个区。初态落在两个区中的概率因而被长期保留, 总热流也按这两个概率线性相加。

$J = 0$ 时, 对称性更强。定义总自旋

$$\mathcal{J}_a = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sigma_i^a, \quad a = x, y, z,$$

则

$$H_N(t) = \mathcal{J}_x + 2 \cos(\omega_d t) \mathcal{J}_z, \quad S_N = 2\mathcal{J}_z.$$

此时 $\mathcal{J}^2$ 守恒, 不同总自旋表示彼此独立。当 $J \neq 0$ 时, 最近邻 Ising 项一般不再与 $\mathcal{J}^2$ 对易, 但式 (8) 仍严格成立。这一区别是理解相互作用效应的关键: 相互作用可以在同一反射宇称区内混合不同总自旋成分, 却不能跨越奇偶区。

3.2 $N = 2$: 完全暗的奇单重态

两个自旋的空间分解为

$$\mathcal{H}_{N=2} = (S = 1)^{(3)} \oplus (S = 0)^{(1)}.$$

三维三重态属于反射偶区, 一维单重态属于反射奇区。上一节已经证明 S_2 在单重态上严格为零, 因此 $N = 2$ 奇区对公共浴完全暗。这个结论不依赖 J , 因为 Ising 项在一维奇区中只改变能量零点。

3.3 $N = 3$: 嵌入式活跃单自旋通道

三个自旋的反射操作 R_{13} 交换两个边缘站点。反射奇区由外侧自旋单重态

$$|s_{13}\rangle = \frac{|\uparrow_1 \downarrow_3\rangle - |\downarrow_1 \uparrow_3\rangle}{\sqrt{2}} \quad (9)$$

与中心自旋的两个状态张成, 因此维数为 2。外侧单重态满足

$$(\sigma_1^a + \sigma_3^a)|s_{13}\rangle = 0, \quad a = x, z.$$

同时, 三自旋 Ising 项可以写成

$$-J\sigma_2^z(\sigma_1^z + \sigma_3^z),$$

所以它在该子空间中也消失。投影后得到

$$P_- H_3(t) P_- = \frac{1}{2}\sigma_2^x + \cos(\omega_d t)\sigma_2^z, \quad P_- S_3 P_- = \sigma_2^z. \quad (10)$$

式 (10) 说明, $N = 3$ 奇区不是暗态, 而是一个由中心自旋承担的活跃单自旋通道: 它与 $N = 1$ 具有相同的哈密顿量和浴耦合算符, 并且完全不含 J 。

在 $J = 0$ 时, 完整八维空间还可以按总自旋写成

$$\mathcal{H}_{N=3} = (S = 3/2)^{(4)} \oplus (S = 1/2)_e^{(2)} \oplus (S = 1/2)_o^{(2)}. \quad (11)$$

下标 e, o 表示反射偶、奇。两个 $S = 1/2$ 副本都具有与单自旋相同的动力学, 其中一个位于偶区, 另一个就是式 (10) 的奇区。全对称乘积初态只占据 $S = 3/2$, 最大混合初态则有一半权重位于 $S = 3/2$, 另一半分布在两个 $S = 1/2$ 副本中。 $J = 0$ 时的初态依赖, 正是来自这些互不转化的总自旋表示。

3.4 $N = 4$: 两个受保护的 $S = 1$ 通道

四自旋的反射同时交换 $1 \leftrightarrow 4$ 和 $2 \leftrightarrow 3$ 。偶区和奇区的维数分别为

$$\dim \mathcal{H}_+ = 10, \quad \dim \mathcal{H}_- = 6. \quad (12)$$

$J = 0$ 时, 总自旋分解为

$$\mathcal{H}_{N=4} = (S = 2)^{(5)} \oplus 3(S = 1)^{(3)} \oplus 2(S = 0)^{(1)}. \quad (13)$$

其中反射偶区包含一个 $S = 2$ 、一个 $S = 1$ 和两个 $S = 0$ 副本; 反射奇区包含另外两个 $S = 1$ 副本。两个 $S = 0$ 态被 S_4 湮灭, 是严格暗态; 六维奇区则是两个活跃 $S = 1$ 通道的直和。

这一结构与 $N = 3$ 有本质差别。 $N = 3$ 奇区精确等价于一个二维单自旋, 而 $N = 4$ 奇区为六维, 不能再称为嵌入式 $N = 1$ 。即使 $J \neq 0$, 反射奇区仍完全位于两个 $S = 1$ 副本张成的空间中; 相互作用只能重新混合这两个副本。偶区中的 $S = 2$ 、 $S = 1$ 和 $S = 0$ 成分则可以彼此混合。详细的成对单重态-三重态推导见附录 C。

3.5 相互作用如何改变总自旋成分

图 3 直接展示 $N = 3$ 偶区中的总自旋成分。 $J = 0$ 时, 每个闭合系统 Floquet 态的权重都位于 $(w_{3/2}, w_{1/2,e}) = (1, 0)$ 或 $(0, 1)$ 两个端点, 表明两个总自旋表示互不混合。 $J = 0.5$ 时, 所有点移入两端之间, 单个 Floquet 态同时含有 $S = 3/2$ 和偶宇称 $S = 1/2$ 成分。

我们用

$$A_{\text{mix}} = \sqrt{w_{3/2}w_{1/2,e}}$$

度量一个态同时占据两种表示的程度。 $J = 0$ 时它只有 2.6×10^{-5} 量级的数值残留, 而所有 $J > 0$ 的参数点都出现明显混合, 中位值介于 0.165–0.477。影响泛函周期态表现出同样的变化: $J = 0$ 时总自旋权重在一个周期内保持不变, $J > 0$ 后权重随时间变化, 并伴随中心与边缘磁化的差别。

这种混合有直接的动力学后果。 $J = 0$ 时, 初态落在各总自旋表示中的权重被永久冻结, 暗表示中的权重永远不参与放热, 长期热流因此明显依赖初态。 $J \neq 0$ 后, 同一反射区内的权重可以重新分

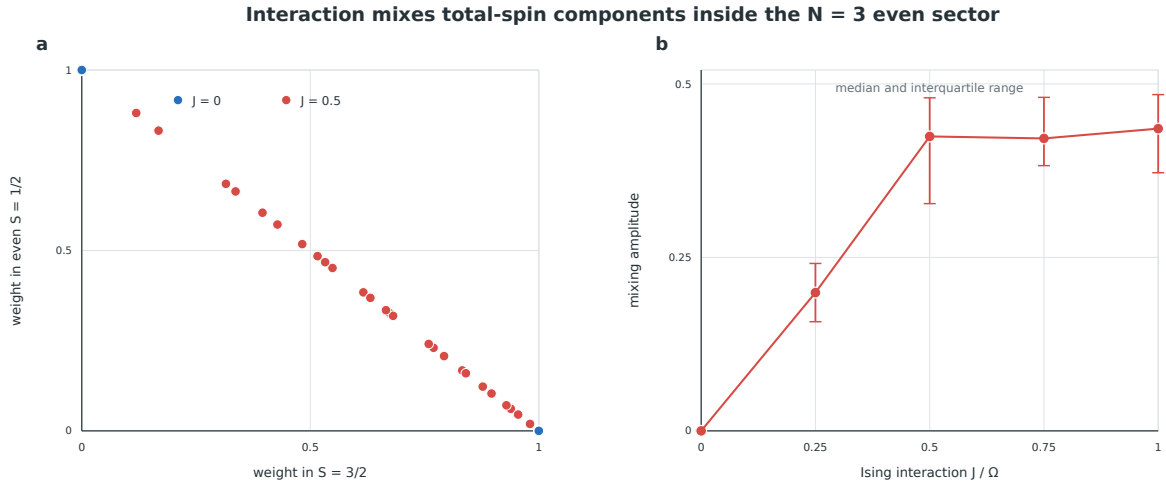


图 3: $N = 3$ 反射偶区内的总自旋成分混合。**a** $J = 0$ 时 Floquet 态属于纯 $S = 3/2$ 或纯偶宇称 $S = 1/2$ 表示； $J = 0.5$ 时两种成分在同一个态中同时出现。**b** 对五个驱动频率和偶区 Floquet 态汇总得到的混合幅度中位数及四分位范围。

表 1: $N = 1-4$ 反射偶、奇区的通道内容。 $J = 0$ 时各总自旋表示独立演化； $J \neq 0$ 时同一反射区内的表示相互混合，奇偶区之间始终不混合。

N	反射偶区	反射奇区
1	单自旋通道	不存在
2	单一 $S = 1$ 亮通道	$S = 0$ 单重态，完全暗
3	$S = 3/2 \oplus (S = 1/2)_e$ ，混合通道	活跃单自旋通道 ($\equiv N = 1$ ，与 J 无关)
4	$S = 2 \oplus (S = 1)_e \oplus 2(S = 0)$ ，含暗成分的混合通道	两个 $S = 1$ 副本，多自旋通道

配：原本互不往来的表示汇成一条混合通道，被冻结在低总自旋成分中的权重得以进入活跃动力学，不同初态在偶区内趋于同一个长期状态（第五节将给出数值证据）。换言之，相互作用不仅移动谱峰位置，还决定每个反射区内有效通道的数目和初态记忆能否保留。

表 1 汇总 $N = 1-4$ 的偶、奇区通道内容。随着 N 增大，奇区沿“不存在 $\rightarrow$ 完全暗 $\rightarrow$ 单自旋通道 $\rightarrow$ 多自旋通道”演化；偶区则从单自旋本身变为单一的 $S = 1$ 亮通道，再变为含多个总自旋成分的混合通道， $N = 4$ 时还包含两个暗的 $S = 0$ 副本。 $J = 0$ 时表中各总自旋表示彼此独立； $J \neq 0$ 时它们只在同一反射区内混合。后面两节的热谱恒等式和热流分区都建立在这张表之上。

4 $N = 2, 3, 4$ 的热谱与对称性恒等式

4.1 三种尺寸的连续热谱

图 4-6 给出 $\alpha = 0.05$ 下的完整连续热谱，横向依次改变驱动频率，纵向依次增大 Ising 相互作用。连续谱未经平滑；黑色三角标出严格周期谱线的位置。

$N = 2$ 的两条初态曲线在所有参数点都只相差固定的 $3/4$ 权重：最大混合初态有 $1/4$ 权重停留在暗单重态中，两条曲线因此形状相同而整体权重不同。 $N = 3$ 中，最大混合初态额外保留一个活跃

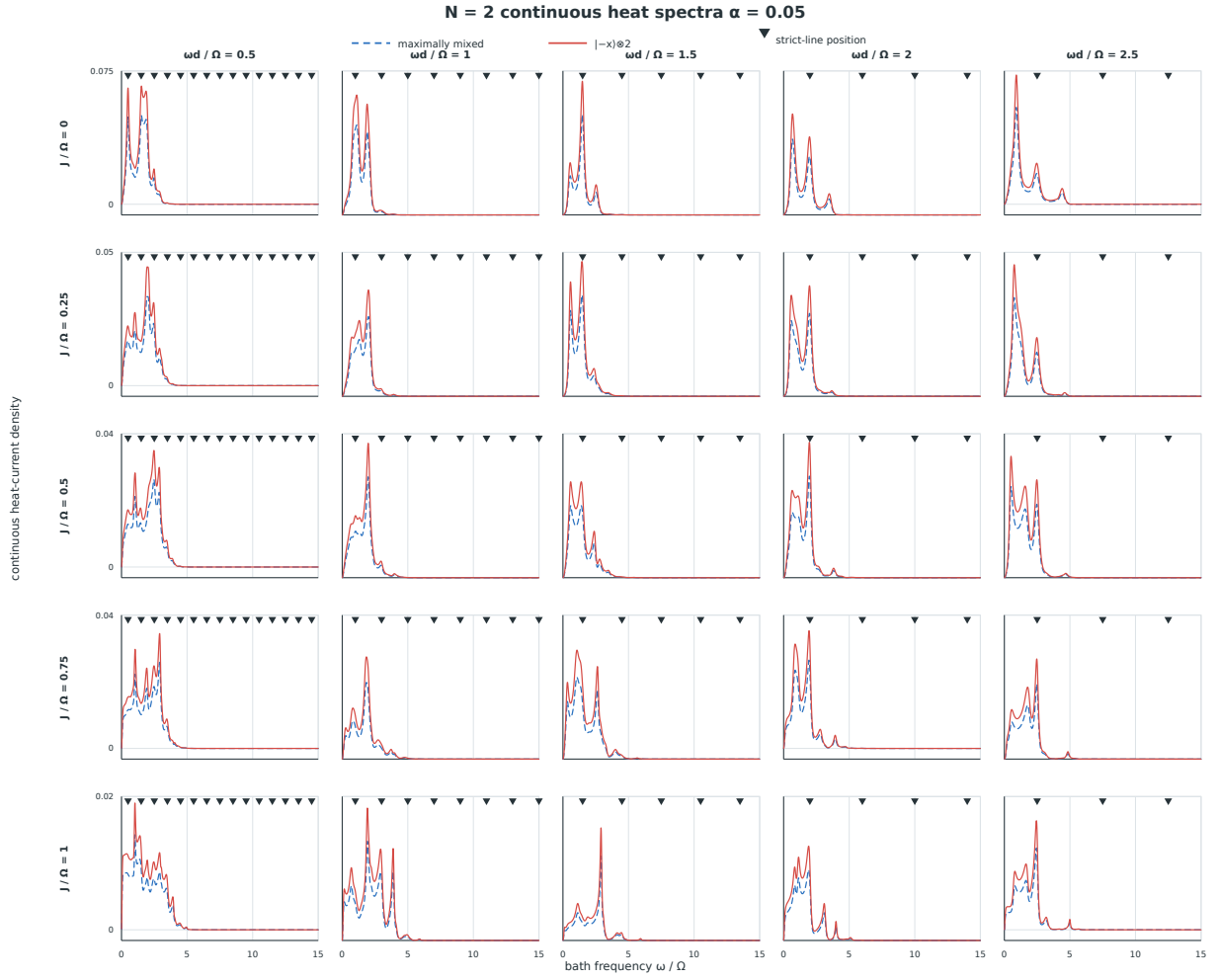


图 4: $N = 2$ 的连续热谱。蓝色虚线为最大混合初态，红色实线为 $|-x\rangle^{\otimes 2}$ 。

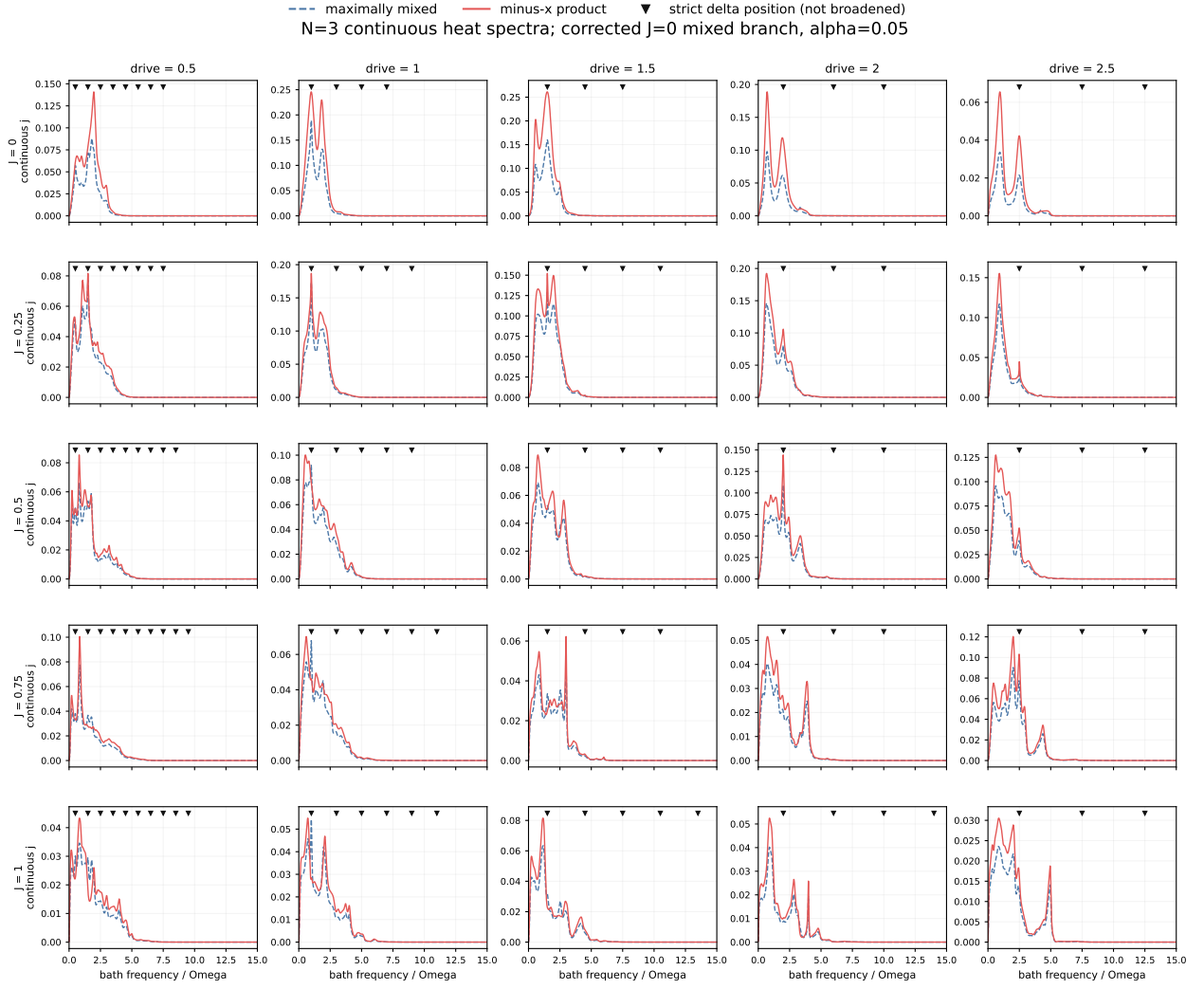
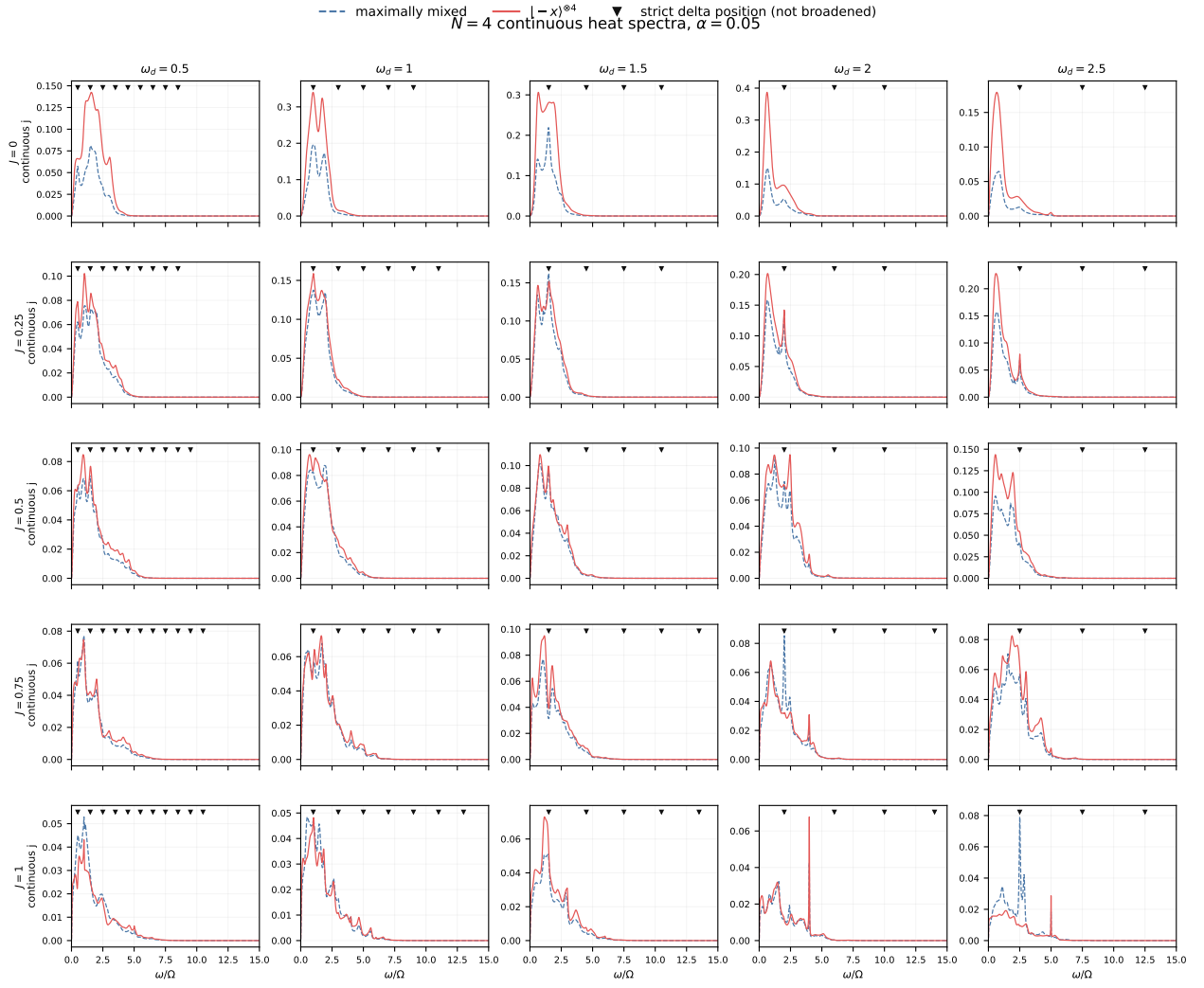


图 5: $N = 3$ 的连续热谱。蓝色虚线为最大混合初态, 红色实线为 $|-x\rangle^{\otimes 3}$ 。 $J = 0$ 的最大混合曲线按精确总自旋权重重构, 其余曲线来自直接传播。

图 6: $N = 4$ 的连续热谱。线型约定与图 4 相同。

的奇宇称 $N = 1$ 通道，两条曲线不再只是整体倍数关系；可见峰数也普遍增多，中位峰数从 $N = 2$ 的 5 增至 7.5。

从 $N = 3$ 增加到 $N = 4$ 后，候选跃迁继续增多，可分辨峰数的中位值却从 7.5 降到 6.5（逐曲线统计见附录 E）。谱线数量并不是希尔伯特空间维数的简单函数：相互作用和驱动决定哪些允许通道接近共振，开放体系的长期布居和环境记忆决定这些通道最终有多亮；当多条通道靠得很近时，它们在连续谱中可能只形成一个宽峰。

因此，热谱也不能被理解为孤立系统最低能隙的直接读数。闭合系统 Floquet 分析表明，主要强峰会系统性靠近公共浴算符具有非零矩阵元的跃迁频率；但矩阵元只能判断通道是否允许，不能单独预测开放体系的峰高和线形。完整的 Floquet 通道比较放在附录 D。

4.2 $N = 2$ ：暗态给出的精确比例

式 (7) 不仅适用于总热流，也逐频率适用于连续热谱，并分别适用于每条严格周期谱线：

$$j_{\text{mix}}^{(2)}(\omega) = \frac{3}{4}j_{+}^{(2)}(\omega), \quad W_{n,\text{mix}}^{(2)} = \frac{3}{4}W_{n,+}^{(2)}. \quad (14)$$

这里 $j_{-}^{(2)} = 0$ ，因为反射奇区就是公共浴完全看不见的单重态。最大混合初态只有 3/4 的概率位于活跃偶区，所以它与偶区热谱形状相同，整体权重恰好缩小到 3/4。这一比例在全部 25 个参数点上成立。

4.3 $N = 3$ ：奇区继承单自旋热谱

最大混合三自旋初态在反射偶区和奇区的权重为 3/4 和 1/4。由于奇区严格等价于 $N = 1$ ，任意对初态线性的谱量 X 都满足

$$X_{\text{mix}}^{(3)} = \frac{3}{4}X_{+}^{(3)} + \frac{1}{4}X_{\text{mix}}^{(1)}. \quad (15)$$

这里的 X 可以是连续热谱、总热流、驱动功率、单条严格周期谱线，也可以是一个周期内的总磁化。

在 $J/\Omega = 0.5$ 的代表点，从偶区最大混合态和全对称乘积态出发得到的长期偶区结果在当前分辨率内相同。因此可以把直接计算的偶区谱和独立的单自旋奇区谱按 3:1 相加，重构完整最大混合谱。图 7e 中两条曲线的重合说明，有限相互作用虽然改变了偶区内的跃迁，却没有混合反射奇、偶区。

$J = 0$ 时，反射偶区还包含彼此不混合的 $S = 3/2$ 和偶宇称 $S = 1/2$ 表示，不能把整个偶区当成一个长期状态。利用式 (11) 的正确权重，可得

$$2X_{\text{mix}}^{(3)} - X_{\text{mix}}^{(1)} = X_{|-x\rangle \otimes 3}^{(3)}. \quad (16)$$

换句话说， $J = 0$ 时的最大混合谱有一半来自 $S = 3/2$ 通道，另一半来自两个彼此等价的单自旋通道。图 7b 直接画出了相应的奇区谱、偶区谱和完整混合谱。

4.4 $N = 4$ ：两个 $S = 1$ 副本的贡献

四自旋最大混合态在反射偶区和奇区的权重分别为 5/8 和 3/8，所以一般有

$$X_{\text{mix}}^{(4)} = \frac{5}{8}X_{+}^{(4)} + \frac{3}{8}X_{-}^{(4)}. \quad (17)$$

$J = 0$ 时, 三个 $S = 1$ 副本都具有与 $N = 2$ 三重态相同的集体自旋动力学, 两个 $S = 0$ 副本完全暗, 而 $|-x\rangle^{\otimes 4}$ 只占据 $S = 2$ 。因此可得到

$$16X_{\text{mix}}^{(4)} - 5X_{|-x\rangle^{\otimes 4}}^{(4)} - 12X_{\text{mix}}^{(2)} = 0. \quad (18)$$

因此, $J = 0$ 的反射奇区热谱就是两个等价 $S = 1$ 副本的谱, 也就是 $N = 2$ 三重态热谱; 反射偶区则同时包含 $S = 2$ 、一个 $S = 1$ 副本和两个不放热的 $S = 0$ 副本。图 7c 中按这些权重得到的重构谱与完整最大混合谱重合。

4.5 有限相互作用: 总自旋不再守恒, 但反射分区仍然成立

有限相互作用破坏总自旋守恒, 但保留左右反射对称性。此时需要检验的不再是固定的总自旋权重, 而是对任意 J 都成立的反射分区关系。实际体系中相互作用总是存在, 因此这些关系比 $J = 0$ 的总自旋恒等式更具一般性, 也是本文对称性图像的主要检验对象。对 $N = 2$, 奇区始终为暗态, 因此

$$j_{\text{mix}}^{(2)}(\omega) = \frac{3}{4}j_{+}^{(2)}(\omega). \quad (19)$$

对 $N = 3$, 奇区始终等价于 $N = 1$, 所以有限 J 的偶区热谱可由

$$j_{+, \text{rec}}^{(3)}(\omega) = \frac{4j_{\text{mix}}^{(3)}(\omega) - j_{\text{mix}}^{(1)}(\omega)}{3} \quad (20)$$

重构, 并与完全位于偶区的乘积初态直接比较。对 $N = 4$, 则有

$$X_{-}^{(4)} = \frac{8X_{\text{mix}}^{(4)} - 5X_{+}^{(4)}}{3}. \quad (21)$$

图 7 汇总了三个尺寸的代表性分区热谱: $N = 2$ 的奇区严格为零, $N = 3$ 的奇区就是单自旋谱, $N = 4$ 的奇区则是活跃的多体通道。黑线与橙线在六个面板中均在数值分辨率内重合, 说明第三节的反射分解不仅适用于状态空间, 也逐频率适用于开放体系热谱。Ising 相互作用只在每个反射区内部重排总自旋成分和谱峰, 而不把奇、偶区混在一起。

5 热流随系统尺寸和相互作用的变化

5.1 如何比较奇区、偶区和完整初态

为了比较不同反射区本身的放热能力, 先定义

$$p_{\pm} = \text{Tr}(P_{\pm}\rho), \quad \rho_{\pm} = \frac{P_{\pm}\rho P_{\pm}}{p_{\pm}}, \quad q_{\pm} = Q[\rho_{\pm}]. \quad (22)$$

$\rho_{\pm}$ 是把原状态投影到某个反射区后重新归一化的密度矩阵, $q_{\pm}$ 表示系统完全制备在该反射区时的热流。对于原来的完整状态, 该区贡献的热流是 $p_{\pm}q_{\pm}$, 因此

$$Q = p_{+}q_{+} + p_{-}q_{-}. \quad (23)$$

最大混合初态的 (p_{+}, p_{-}) 在 $N = 2, 3, 4$ 时分别为 $(3/4, 1/4)$ 、 $(3/4, 1/4)$ 和 $(5/8, 3/8)$ 。全对称乘积初态始终完全位于反射偶区。

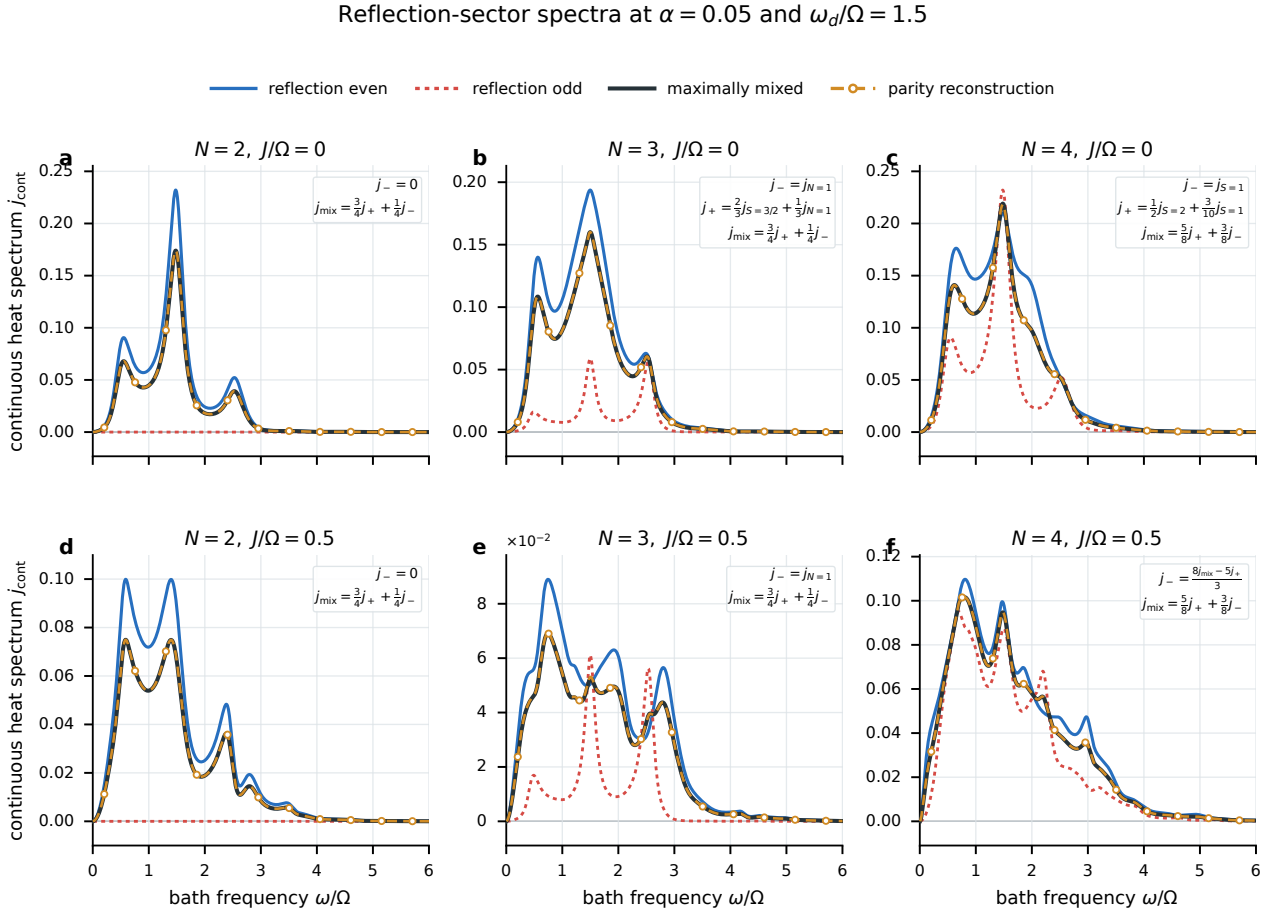


图 7: $N = 2, 3, 4$ 的反射奇偶区热谱及其重构。所有面板固定 $\alpha = 0.05$ 和 $\omega_d/\Omega = 1.5$ ；上排为 $J/\Omega = 0$ ，下排为 $J/\Omega = 0.5$ ，三列依次为 $N = 2, 3, 4$ 。蓝色实线和红色点线分别为系统完全制备在反射偶区和奇区时的热谱，黑色实线为最大混合初态的完整热谱，橙色虚线与空心圆为按图内等式重构的结果。 $N = 3$ 、 $J = 0$ 使用式 (16) 的总自旋组合； $N = 4$ 、 $J/\Omega = 0.5$ 的奇区谱由式 (21) 反推得到。

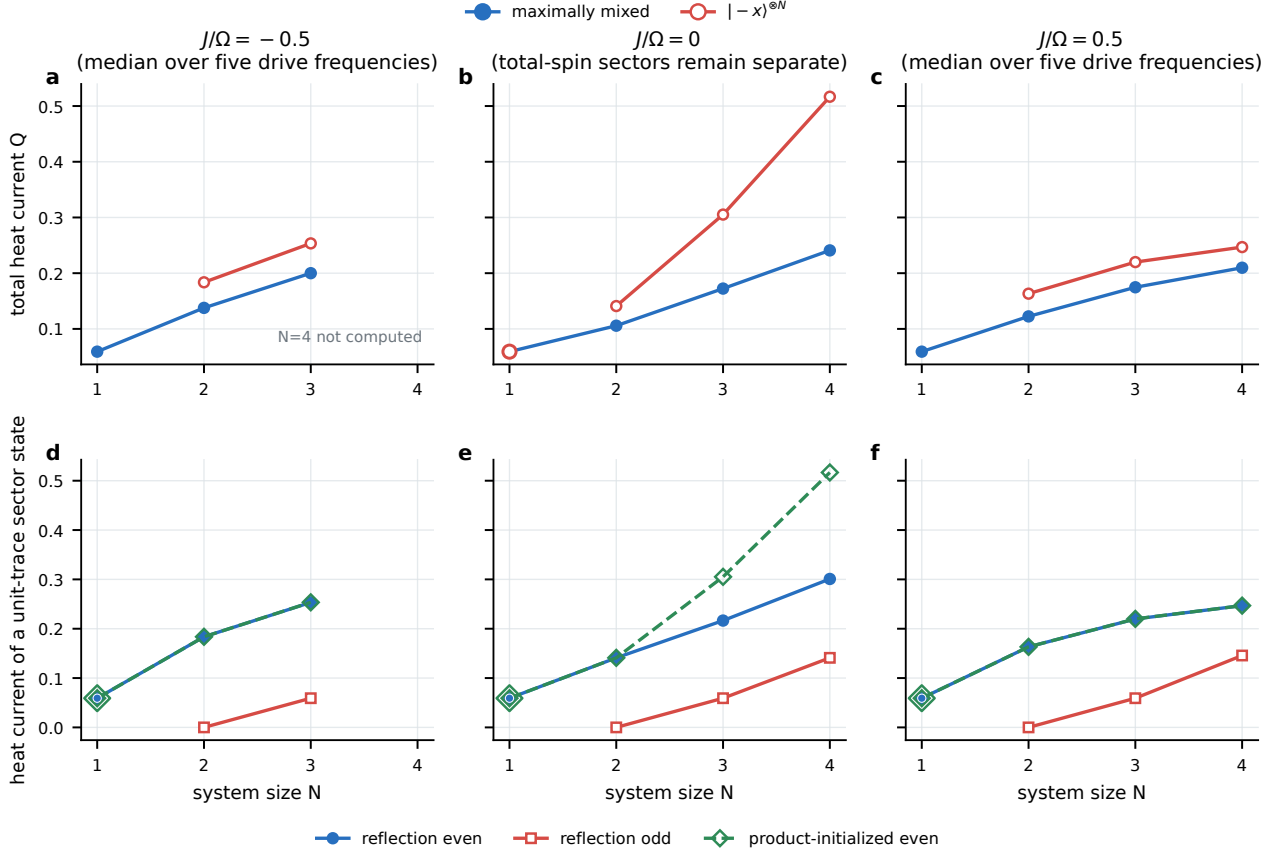
Heat current from $N = 1$ to $N = 4$: total states and reflection sectors

图 8: $N = 1, 2, 3, 4$ 的总热流和反射区热流。左、中、右三列依次为 $J/\Omega = -0.5, 0, +0.5$; 上排比较最大混合初态和全对称乘积初态, 下排比较完全制备在反射偶区或奇区时的热流 $q_{\pm}$ 。每个点均为五个驱动频率的中位值, 单自旋值作为共同参考; 负 J 暂无 $N = 4$ 数据。

5.2 总热流整体接近随 N 线性增加

在同样五个驱动频率上, 单自旋总热流的中位值为

$$Q_{\text{median}}^{(1)} = 0.05917. \quad (24)$$

单自旋的两个初态给出相同结果。把正相互作用参数网格 ($J/\Omega = 0-1$) 的全部 50 条一一对应 (J, ω_d, ρ_0) 曲线合并后, 三个多自旋尺寸的总热流中位值为

$$Q_{\text{median}} = 0.1080, \quad 0.1631, \quad 0.2093 \quad (N = 2, 3, 4). \quad (25)$$

对应的每自旋热流为

$$(Q/N)_{\text{median}} = 0.05400, \quad 0.05438, \quad 0.05234,$$

与单自旋的 0.05917 处于同一量级。也就是说, 在本文未按尺寸归一化的集体耦合 $S_N = \sum_i \sigma_i^z$ 下, 参数平均后的总热流从 $N = 2$ 到 4 接近线性增长, 而每自旋热流基本不变; 绝大多数逐条对应的曲线也支持这一单调趋势 (附录 E)。

不过, 这一近线性趋势不宜解读为热力学尺寸律: 可用尺寸只有三个, S_N 的范数本身随 N 增大, 而且各对称区的贡献随 N 的变化并不平滑。图 8 下排显示, $J = 0$ 时奇区热流依次为

$$q_-^{(2)} = 0, \quad q_-^{(3)} = 0.05917, \quad q_-^{(4)} = 0.1410,$$

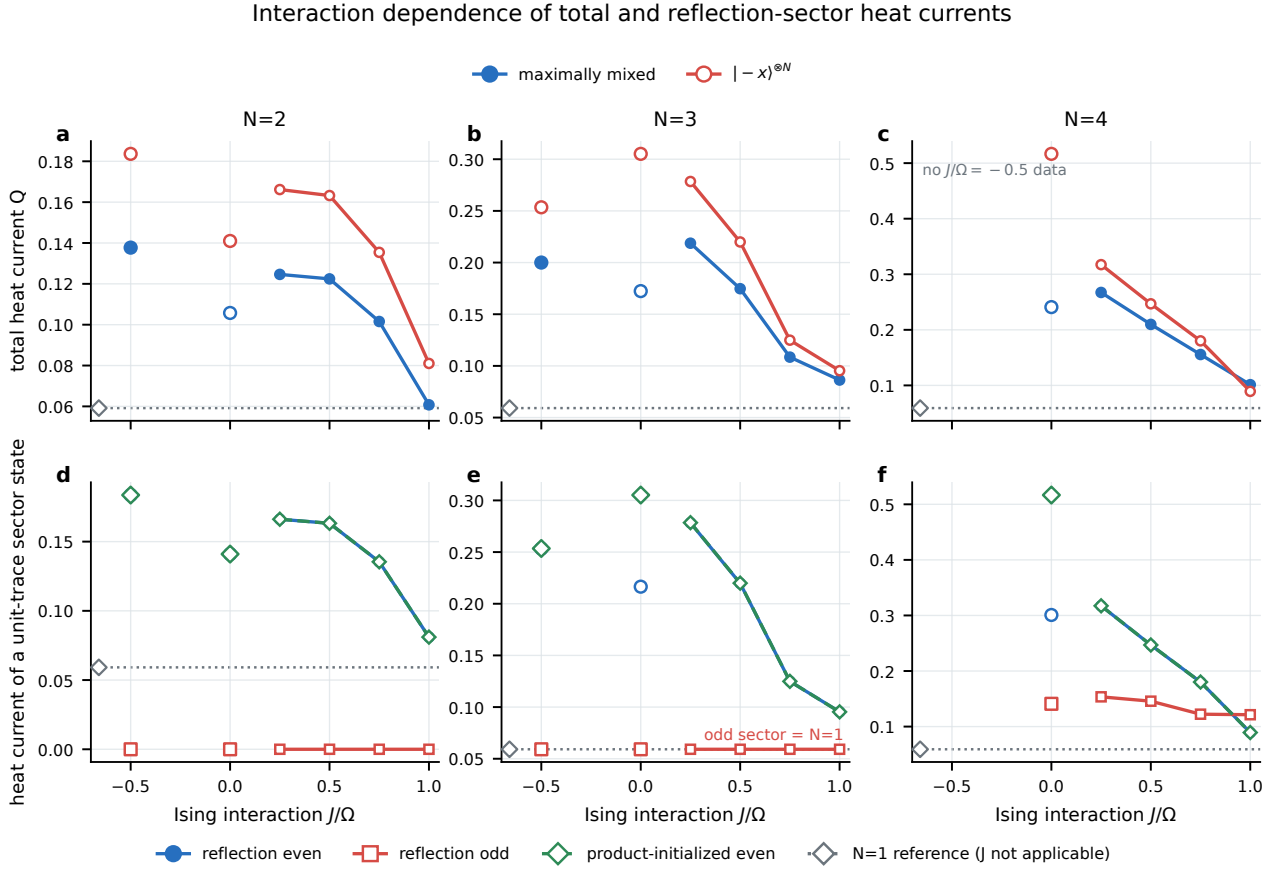


图 9: 固定系统尺寸后热流随 Ising 相互作用的变化。上排为最大混合初态与全对称乘积初态的总热流，下排为反射偶区、奇区和乘积初态的分区热流；每个点是五个驱动频率的中位值。 $J = 0$ 用空心点单独标出，因为此时总自旋额外守恒；折线连接 $J/\Omega = 0.25-1$ 四个参数点， $J/\Omega = -0.5$ 为单个离散点，不与 $J = 0$ 连线。灰色菱形和水平虚线为 $N = 1$ 参考值；负 J 暂无 $N = 4$ 数据。

分别对应暗的 $S = 0$ 、活跃的 $S = 1/2$ 和两个活跃 $S = 1$ 副本。这一序列由各区所含表示的改变驱动，无法用统一的 N^p 描述。

$J = 0$ 时，总自旋守恒还保留了明显的初态差别：最大混合初态被较低总自旋表示和暗态稀释，而 $|-x\rangle^{\otimes N}$ 只占据最高总自旋 $S = N/2$ 。从 $N = 2$ 到 4，两者的有限尺寸有效斜率分别约为 1.06 和 1.69，后者反映最高总自旋通道更快的增长。

5.3 相互作用在不同反射区中产生不同响应

图 9 把三个多自旋尺寸的差别直接展开，并以式 (24) 的单自旋热流为共同参照。 $N = 2$ 的奇单重态对任意大小和符号的 J 都严格暗，因此奇区热流始终为零。偶区热流在 $J/\Omega = 0.25-0.5$ 附近较大，随后随着 Ising 相互作用改变共振条件而下降。

$N = 3$ 的奇区严格等价于 $N = 1$ ，所以它的热流与 J 的大小和符号都无关，在图中表现为一条水平线。偶区则明显受到相互作用影响，其五个驱动频率的中位热流从 $J/\Omega = 0.25$ 时的 0.278 降至 $J/\Omega = 1$ 时的 0.0954。 $J = 0$ 的全对称乘积态与偶区最大混合态不同，是因为二者分别占据纯 $S = 3/2$ 和 $S = 3/2 \oplus S = 1/2$ ； $J > 0$ 后两个总自旋成分被混合，两种初态到达的长期偶区状态在当前精度内一致。

$N = 4$ 的奇区不是固定的单自旋通道。两个 $S = 1$ 副本可以被相互作用重新混合，因此其热流

中位值从 $J/\Omega = 0.25$ 时的 0.154 缓慢降至 $J/\Omega = 1$ 时的 0.121。偶区同时包含 $S = 2$ 、 $S = 1$ 和 $S = 0$ 成分，对相互作用更敏感，相应中位值从 0.317 降至 0.0893。到 $J/\Omega = 1$ 时，完全制备在奇区得到的 q_- 已大于 q_+ ；但最大混合初态中两个区的概率分别是 $3/8$ 和 $5/8$ ，所以判断完整状态中哪一部分贡献更多时，仍必须比较 $(3/8)q_-$ 和 $(5/8)q_+$ 。

把三个尺寸放在一起看，各反射区对相互作用的响应可以按表 1 的通道内容分为四类：完全暗的区（ $N = 2$ 奇区）对任何 J 都没有响应；受对称性保护的嵌入通道（ $N = 3$ 奇区）严格不含 J ，热流保持在单自旋值；由两个等价 $S = 1$ 副本构成的 $N = 4$ 奇区只能在副本之间重新混合，响应温和；包含多个不同总自旋表示乃至暗成分的偶区响应最强， $N = 3, 4$ 偶区热流在 J/Ω 从 0.25 增至 1 时下降约三倍。一个反射区对相互作用有多敏感，取决于它包含多少种可以被 J 混合的表示——这正是表 1 中“混合通道”的动力学含义。

总体而言，有限 J 破坏总自旋守恒，在固定反射区内混合原本分开的表示，并同时改变跃迁频率和共振条件。这种重排通常压低 $N = 3, 4$ 偶区的热流，也使从 $N = 2$ 到 4 的增长比 $J = 0$ 最高总自旋通道更平缓。图中 $J/\Omega = -0.5$ 的离散点还表明，重排的方向依赖相互作用符号，并随驱动频率反转；详细的正负 J 热谱比较见附录 D.1。更准确的图像不是“相互作用统一增强或抑制热流”，而是它按符号和强度在不同反射区中重新分配可见通道及其谱权重。

6 总结

本文从已发表的强耗散单自旋热谱出发，研究了与公共浴耦合的 $N = 2, 3, 4$ 周期驱动 Ising 自旋链。单自旋在 $\omega_d/\Omega = 1$ 和 1.5 时的谱形与峰位得到复现。在多自旋体系中，决定热流的首要因素不是自旋数或孤立系统最低能隙，而是公共浴耦合算符在各对称子空间中是否具有非零作用。

三个尺寸给出了性质各不相同的奇宇称通道： $N = 2$ 奇区是被驱动和公共浴同时湮灭的 $S = 0$ 单重态，热流严格为零； $N = 3$ 奇区精确等价于一个与 Ising 相互作用无关的活跃 $N = 1$ 通道； $N = 4$ 奇区由两个 $S = 1$ 副本构成，能够放热，但不再等价于单自旋。偶宇称通道经历平行的演化：从 $N = 2$ 的单一 $S = 1$ 亮通道，变为 $N = 3, 4$ 含多个总自旋成分的混合通道，其中 $N = 4$ 还包含两个暗的 $S = 0$ 副本。由这些分解得到的热谱恒等式都与数值结果一致，把初态依赖直接追溯到不可互相转化的对称通道。

Ising 相互作用保留反射宇称，却通常破坏总自旋守恒。其主要作用是在同一反射区内混合原本分开的总自旋成分，并由此改变共振位置 and 谱权重。 $N = 3$ Floquet 态和影响泛函周期态都直接显示了这种混合。它解释了为什么 $J = 0$ 时不同初态可以保留明显差别，而 $J \neq 0$ 后偶区初态差异大幅减小；也解释了为什么 $N = 3$ 奇区对 J 完全不敏感，而 $N = 4$ 奇区仍会随 J 变化。

有限相互作用下的热谱比较进一步验证了这一点： $N = 2$ 的暗态比例关系保持到数值精度， $N = 3$ 偶区的直接谱与反射分区重构谱在所有参数点上一致到 1% 以内， $N = 4$ 的周期态和反推出的奇区能流也符合同一分解。附录中的两组对照把这一图像再推进一步：翻转 J 的符号会显著重排 $N = 2, 3$ 偶区的峰位与权重，其方向随驱动频率改变；而在横向驱动下，正负 J 的闭合系统动力学可以精确么正等价，公共浴算符却在变换下变为交错算符，开放热谱因此仍然不同。有限 J 改变的是每个反射区内部的动力学和浴可见的矩阵元，而不是奇、偶区的划分本身。

在本文采用的未归一化集体耦合下，全部参数合并后的总热流从 $N = 2$ 到 4 近似随 N 线性增加，每自旋热流基本不变。但分区结果显示，这个总体趋势掩盖了暗态、嵌入式单自旋和多重 $S = 1$ 通道之间的转换。因此，当前结果支持“由对称表示控制的有限尺寸交叉”，而不是一个统一的热流

幂律。事实上，热力学极限不应依靠 $N = 2-4$ 外推：本文的对称结构允许直接建立一个在 $N \rightarrow \infty$ 下闭合的解析框架，小尺寸数值的角色是验证它而非替代它；第 7 节勾勒这一框架。

7 讨论：走向热力学极限

第一步是约定极限本身。把系统-浴耦合写成 $H_{\text{SB}} = g_N S_N \otimes B$ ，本文取 $g_N = 1$ ：积分掉浴后有效作用量为 $O(N^2)$ ，对应一个奇异的强集体耦合极限。具有正规广延极限的是 Kac 缩放 $g_N = g/\sqrt{N}$ ——此时 $S_N \sim N$ 使浴作用量恰为 $O(N)$ 。本文的跨尺寸热流比较应理解为前一约定下的有限尺寸结果，两种约定在大 N 下描述不同的物理。

$J = 0$ 的热力学极限可以严格分析，因为总自旋 S 及其副本指标被系统、驱动和浴共同保留，问题化为初态在各表示中的权重分布。自旋- S 表示的重数为

$$m_N(S) = \binom{N}{N/2 - S} - \binom{N}{N/2 - S - 1},$$

最大混合初态落在自旋- S 通道的概率 $p_N(S) = (2S + 1)m_N(S)/2^N$ 在大 N 下收敛为标度形式

$$p_N(S) \simeq \frac{1}{\sqrt{N}} f\left(\frac{S}{\sqrt{N}}\right), \quad f(x) = 8\sqrt{\frac{2}{\pi}} x^2 e^{-2x^2}, \quad (26)$$

因此典型总自旋只有 $O(\sqrt{N})$ ，且 $\langle S \rangle \simeq \sqrt{2N/\pi}$ 。结合能量账本 $Q = P_{\text{drive}}$ 与固定通道内 $|\langle S_N \rangle| \leq 2S$ ，立即得到严格上界

$$Q_{\text{mix}} \leq 2\epsilon_d \omega_d \sum_S p_N(S) S \simeq 2\epsilon_d \omega_d \sqrt{\frac{2N}{\pi}}. \quad (27)$$

即 $J = 0$ 时最大混合初态的总热流至多是次广延的 $O(\sqrt{N})$ ，每自旋热流在热力学极限中必然消失；而全对称乘积初态位于 $S = N/2$ 的宏观通道，允许 $Q = O(N)$ 与有限热流密度。第五节观察到的初态依赖因此不会随尺寸消失，反而成为宏观差别； $N = 2-4$ 的近线性总热流也必然在更大 N 处发生交叉——这正是小尺寸不能外推的原因。同样的计数给出最大混合态每自旋磁化 $|m_z| \lesssim \sqrt{8/(\pi N)} \rightarrow 0$ ，故 Kac 缩放下其严格周期谱线的每自旋权重 $W_n/N \rightarrow 0$ ：正文中离散谱贡献很小，可能正是这一热力学趋势的早期表现。

这些结果同时说明 $J = 0$ 是一个奇异点。 $\sigma_i^z \sigma_{i+1}^z$ 在全局旋转群下只含标量与秩二张量成分，因此 Ising 项只连接 $|S' - S| \leq 2$ 的表示；微扰区的跃迁率正比于 J^2 ，给出总自旋混合时间 $\tau_{\text{mix}} \sim J^{-2}$ 。 $t \ll \tau_{\text{mix}}$ 时系统近似保持 $J = 0$ 的总自旋碎片化， $t \gg \tau_{\text{mix}}$ 后只剩反射宇称守恒。 $J \rightarrow 0$ 与 $t \rightarrow \infty$ 、 $N \rightarrow \infty$ 的极限因此可能不对易： $J = 0$ 不是有限 J 结果的平滑极限，而是带有额外强对称性的奇异动力学点。

有限 J 、 $N \rightarrow \infty$ 的可控理论由 Keldysh 鞍点给出。Kac 缩放下可精确积分掉玻色浴，所得影响作用量正比于 N ，鞍点在 $N \rightarrow \infty$ 时精确（涨落修正按 $N^{-1/2}$ 消失）：体系等价于一条无限 Ising 链处在自治纵向场

$$h_{\text{eff}}(t) = \epsilon_d \cos(\omega_d t) + \phi(t), \quad \phi(t) = g^2 \int_{-\infty}^t D^R(t - t') m_z(t') dt'$$

中，其中 D^R 是浴的推迟核， $m_z = \langle S_N \rangle / N$ 。弱驱动线性响应给出 RPA 型公式

$$\chi_{\text{eff}}^R(\omega) = \frac{\chi_0^R(\omega)}{1 - g^2 D^R(\omega) \chi_0^R(\omega)}, \quad q = \frac{Q}{N} = \frac{\epsilon_d^2 \omega_d}{2} \text{Im} \chi_{\text{eff}}^R(\omega_d), \quad (28)$$

χ_0^R 为无驱动无限链的 $k=0$ 纵向磁化率。热流密度不再由有限尺寸的峰数控制，而由无限体系的动态磁化率决定；分母接近零对应集体共振、鞍点失稳乃至耗散相变。相应地，连续热谱的角色由动态结构因子接管（未归一化约定下 $j_{\text{cont}}(\omega)/N \propto J_{\text{bath}}(\omega) \omega S_{zz}(k=0, \omega)$ ），而 Kac 约定下宏观热流由相干谱线承载， $W_n/N \propto |\bar{m}_n|^2$ 成为宏观锁相 Floquet 响应的序参量。

高频驱动提供一个明确的可解析窗口。对驱动项作周期旋转并取高频展开最低阶，得到有效横场 Ising 链：横场重整为

$$\Omega_{\text{eff}} = \Omega J_0 \left(\frac{2\epsilon_d}{\omega_d} \right), \quad (29)$$

浴算符 S_N 不变。热力学极限于是映射为带集体 Ohmic 耗散的横场 Ising 链，最低阶临界线为 $J_c = |\Omega_{\text{eff}}|/2$ ：周期驱动可以通过 Bessel 函数移动甚至反复穿越量子临界点。在一维 Ising 临界点，序参量标度维数 $1/8$ 给出 $\chi''(k=0, \omega) \sim \omega^{-7/4}$ ，从而 $q \sim \epsilon_d^2 \omega_d^{-3/4}$ ；实际发散会被耗散、失谐与非线性截断，但它给出一个明确预测——热流谱可以作为 Floquet 调控量子临界性的探针。

按照这一路线，下一步不是把数值推进到 $N=5$ ，而是三项解析工作：证明 $J=0$ 的次广延热流定理（式 (26) 与 (27)）；在 Kac 缩放下推导 Keldysh 鞍点与式 (28)；在高频弱驱动区间给出临界线附近的热流标度。届时，本文 $N=2-4$ 的对称通道分解将成为总自旋碎片化热力学定理与集体耗散临界理论的有限尺寸验证。

A 横向驱动对照：公共浴区分闭合系统等价的正负相互作用

作为驱动方向的对照，把式 (1) 中的纵向驱动改为横向驱动 $\epsilon_d \cos(\omega_d t) \sum_i \sigma_i^x$ ，记相应哈密顿量为 $H_x(J, t)$ 。此时正负相互作用之间存在一个精确变换：取

$$U_B = \prod_{i \text{ even}} \sigma_i^x,$$

则每条最近邻 Ising 键恰有一个端点的 σ^z 变号，而所有 σ^x 项保持不变，因此

$$U_B H_x(J, t) U_B^\dagger = H_x(-J, t). \quad (30)$$

数值构造一周期传播器验证，这一等价的相对残差为 5.6×10^{-15} 。也就是说，横向驱动下正负 J 的闭合系统 Floquet 动力学严格等价。

关键在于公共浴算符不具有这一对称性：

$$U_B S_N U_B^\dagger = \sum_{i \text{ odd}} \sigma_i^z - \sum_{i \text{ even}} \sigma_i^z \neq S_N. \quad (31)$$

均匀公共浴因而把两个闭合系统完全等价的问题看成不同的空间通道：正负 J 的开放热谱差别不来自准能谱，而来自浴算符矩阵元的改变。

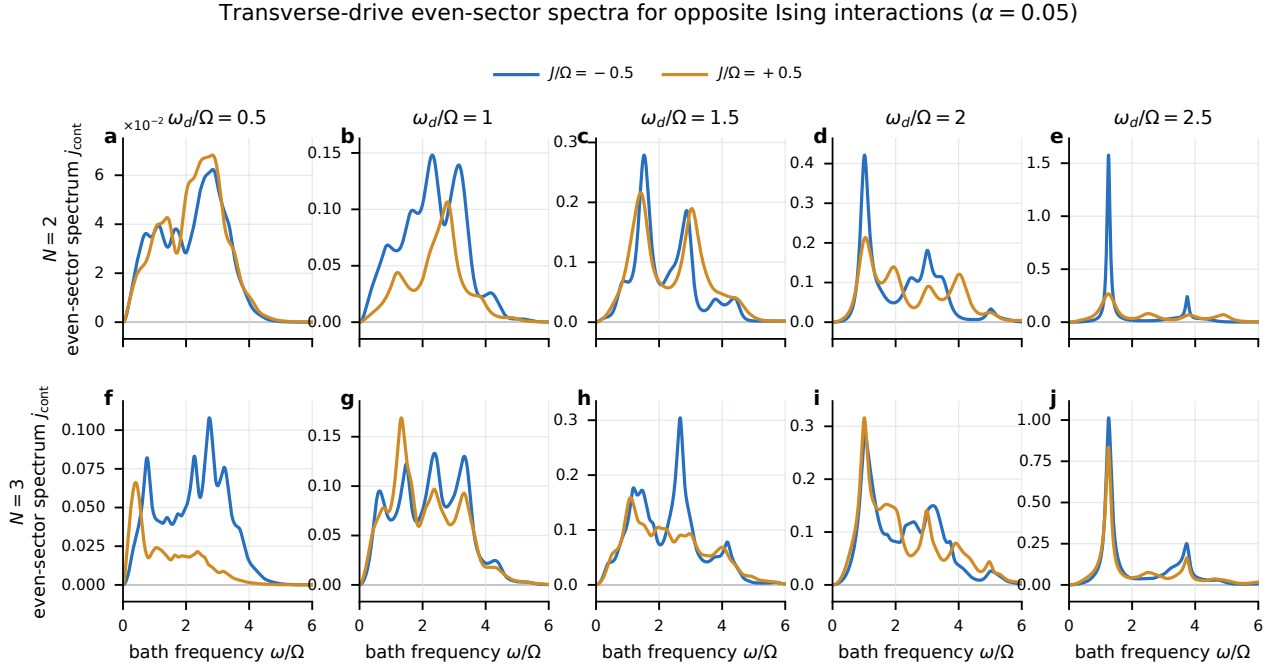


图 10: 横向驱动下相反符号 Ising 相互作用的偶区连续热谱。上、下两排分别为 $N = 2$ 和 $N = 3$, 五列依次取 $\omega_d/\Omega = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5$; 固定 $\alpha = 0.05$ 和 $|J|/\Omega = 0.5$ 。蓝色和橙色分别表示负、正 J , 两条曲线都从完全位于反射偶区的 $|-x\rangle^{\otimes N}$ 出发。

图 10 证实, 闭合系统的精确等价并不要求开放热谱相同。把五个驱动频率和两个初态合并后, $Q(J = -0.5)/Q(J = +0.5)$ 的中位数在 $N = 2$ 和 $N = 3$ 分别为 1.057 和 1.138; 单点比值范围分别为 0.860–2.006 和 0.953–2.719, 均跨过 1。相互作用符号对热流的影响因此不能用统一倍数概括, 而是由浴所见的通道结构逐频率决定。横向驱动结果只作为机制对照, 不进入正文图 8 和图 9 的纵向驱动统计。

B 热谱计算与数值设置

B.1 周期状态和两时关联函数

环境的非马尔可夫记忆通过 Feynman–Vernon 影响泛函表示 [3], 并用均匀时间演化矩阵乘积算符方法压缩 [4, 2]。本文使用官方 UniformTEMPO.jl 构造环境张量; 系统传播、周期状态、两时关联函数和频谱处理由项目代码完成。

对每个初态反复作用一个驱动周期的传播映射, 直到归一化后的周期残差不超过 10^{-9} 。如果希尔伯特空间被强对称性分成互不混合的区域, 则分别保留各区的初始概率, 而不是强迫所有初态收敛到同一个状态。

长期周期状态中的周期平均两时关联函数为

$$C(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \langle S_N(t+\tau) S_N(t) \rangle dt. \quad (32)$$

它包含永久周期部分和随时间差衰减的部分:

$$C(\tau) = C_{\text{asym}}(\tau) + C_{\text{decay}}(\tau). \quad (33)$$

C_{asym} 产生无限窄的严格周期谱线, C_{decay} 产生有限线宽的连续谱。分开处理这两部分可以避免有限时间傅里叶变换把永久振荡误画成振铃和假峰。

零温下的连续热谱写成

$$j_{\text{cont}}(\omega) = 2J_{\text{bath}}(\omega)\omega \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{-i\omega\tau} C_{\text{decay}}(\tau) d\tau. \quad (34)$$

若

$$C_{\text{asym}}(\tau) = c_0 + \sum_{n \geq 1} c_n \cos(n\omega_d \tau),$$

则第 n 条严格周期谱线的积分权重为

$$W_n = \pi J_{\text{bath}}(n\omega_d)(n\omega_d)c_n. \quad (35)$$

不同不可混合对称区的 C_{asym} 必须先按初始概率线性组合, 不能先混合平均磁化再平方, 否则会产生不存在的区间交叉项。

B.2 驱动功率与能量守恒

周期平均驱动功率由

$$P_{\text{drive}} = \frac{1}{T} \int_0^T \operatorname{Tr} \left[\rho(t) \frac{\partial H_N(t)}{\partial t} \right] dt \quad (36)$$

直接计算。长期周期状态在一个周期前后没有净储能变化, 因此应满足

$$P_{\text{drive}} = Q.$$

这一关系同时检查热流的符号、连续谱积分和严格周期谱线权重。全部数据中, $N = 1, 2$ 的相对差中位数为 0.272%, $N = 3$ 的最坏差异约为 1.8%, $N = 4$ 的中位数和最大值分别为 0.504% 和 2.106%; 不存在统一的符号、2 或 π 因子差异。

B.3 主要数值设置

主热谱使用时间步

$$\delta t = \frac{\pi}{60\Omega}$$

和频率网格 $0.005 \leq \omega/\Omega \leq 15$, 频率间隔为 0.005。相关函数只有在 C_{decay} 的相对包络连续三个驱动周期低于 2×10^{-6} 后才停止。连续谱不裁剪负值, 也不进行平滑; 严格周期谱线单独保存, 不人为赋予线宽。

数值可靠性以原始迹变化为主要指标: $N = 2, 3$ 的全部参数点不超过 2%; $N = 4$ 仅 $J/\Omega = 1$, $\omega_d/\Omega = 0.5$ 的乘积态分支达到 2.72%, 其周期残差、厄米性、反射守恒和相关尾部仍满足与其余点相同的要求。所有结果均未经过投影或事后修正。

C $N = 4$ 反射分解的详细推导

将外侧自旋 (1, 4) 和内侧自旋 (2, 3) 分别组成单重态 s 或三重态 t 。反射 $R = P_{14}P_{23}$ 同时交换这两对自旋。单重态在交换下取负号, 三重态取正号, 因此

$$\mathcal{H}_+ = (t_{14} \otimes t_{23})^{(9)} \oplus (s_{14} \otimes s_{23})^{(1)}, \quad (37)$$

$$\mathcal{H}_- = (t_{14} \otimes s_{23})^{(3)} \oplus (s_{14} \otimes t_{23})^{(3)}. \quad (38)$$

这立即给出 $\dim \mathcal{H}_+ = 10$ 和 $\dim \mathcal{H}_- = 6$ 。

四个自旋 $1/2$ 的总自旋分解为

$$(1/2)^{\otimes 4} = 2 \oplus 3(1) \oplus 2(0).$$

完全对称的 $S = 2$ 表示位于反射偶区。三个 $S = 1$ 副本中，一个位于偶区，另外两个位于奇区；两个 $S = 0$ 副本都位于偶区。因此

$$\mathcal{H}_+ = (S = 2)^{(5)} \oplus (S = 1)_e^{(3)} \oplus 2(S = 0)^{(1)}, \quad (39)$$

$$\mathcal{H}_- = 2(S = 1)_o^{(3)}. \quad (40)$$

由于六维奇区本身就是整个反射奇子空间，任何保持反射宇称的算符都无法把它带入 $S = 2$ 或 $S = 0$ 。最近邻 Ising 相互作用可以混合两个奇宇称 $S = 1$ 副本，但不会离开它们的直和。

在反射偶区中，Ising 项具有非零的跨表示矩阵元。按每单位 J 计，直接投影得到

$$\|P_{2,e}H_{\text{Ising}}P_{1,e}\|_F = \sqrt{2}, \quad \|P_{2,e}H_{\text{Ising}}P_{0,e}\|_F = \sqrt{\frac{8}{3}}.$$

这说明 $J > 0$ 后 $S = 2$ 、 $S = 1$ 和 $S = 0$ 不再分别守恒。两个 $S = 0$ 态只在 $J = 0$ 时同时被 $H_4(t)$ 和 S_4 湮灭；相互作用开启后，它们可以在偶区内与活跃表示混合。

最大混合初态的反射偶、奇权重为 $5/8$ 和 $3/8$ ，总自旋 $S = 2, 1, 0$ 的权重分别为 $5/16, 9/16, 2/16$ 。全对称乘积初态 $|-x\rangle^{\otimes 4}$ 完全位于反射偶的 $S = 2$ 表示。这些权重直接导出式 (18)。

D 补充物理结果

D.1 正负 Ising 相互作用的热谱比较

本文的相互作用项为 $-J \sum_i \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z$ ， $J > 0$ 和 $J < 0$ 分别偏好相邻自旋同向和反向。翻转 J 的符号不破坏反射对称性，也不改变 $N = 2$ 的暗奇区和 $N = 3$ 的嵌入式单自旋奇区；它改变的是各反射区内部的能级、Floquet 跃迁频率及其谱权重。

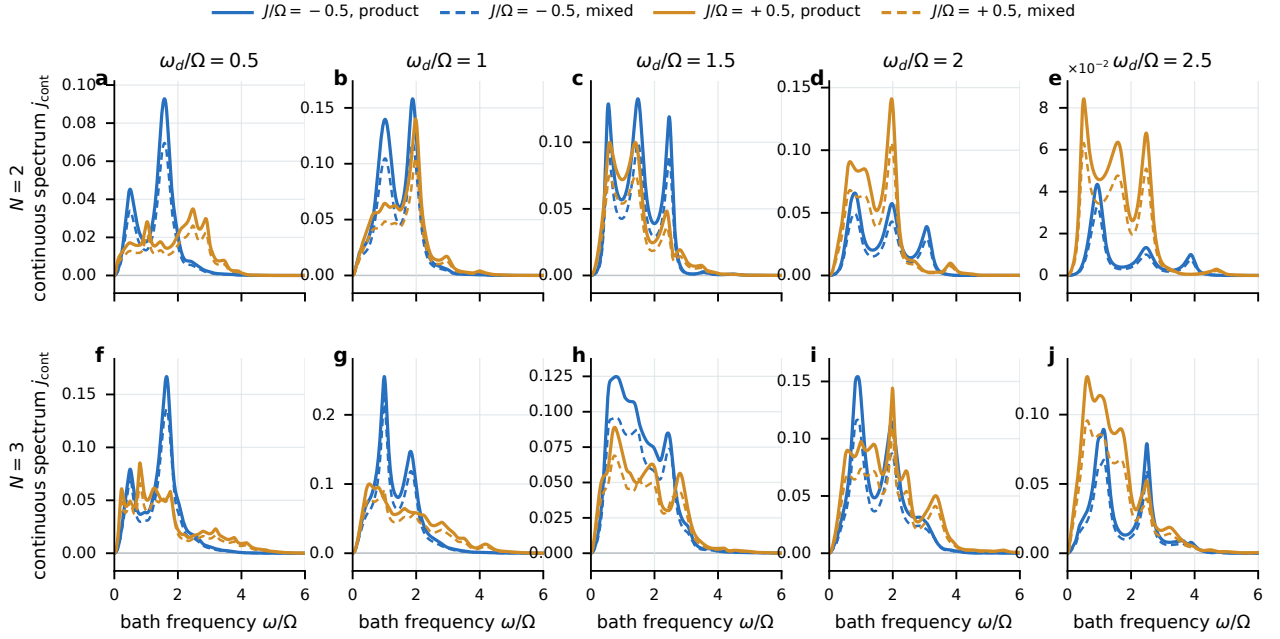
Longitudinal-drive spectra for opposite Ising interactions ($\alpha = 0.05$)

图 11: 相同相互作用绝对值下正负 J 的连续热谱。上、下两排分别为 $N = 2$ 和 $N = 3$, 五列依次取 $\omega_d/\Omega = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5$; 固定纵向驱动、 $\alpha = 0.05$ 和 $|J|/\Omega = 0.5$ 。蓝色和橙色分别表示负、正 J , 实线和虚线分别表示全对称乘积初态和最大混合初态。

图 11 表明, 改变相互作用符号不是把整条谱乘上一个常数。 $N = 2$ 在前四个驱动频率上 $J/\Omega = -0.5$ 的总热流高于 $+0.5$, 在 $\omega_d/\Omega = 2.5$ 时反而低约 21.6%; $N = 3$ 在前三个驱动频率上由负 J 给出更大的总热流, 在 $\omega_d/\Omega = 2$ 和 2.5 时则分别略低和明显更低。对五个驱动频率取中位数后, $J/\Omega = -0.5$ 的最大混合态和乘积态总热流在 $N = 2$ 为 0.1377 和 0.1836, 比 $+0.5$ 高约 12.5%; 在 $N = 3$ 为 0.2000 和 0.2535, 分别高约 14.5% 和 15.3%。由于 $N = 3$ 奇区严格等价于 $N = 1$, 这些差别全部来自反射偶区的峰位和权重重排, 而不是奇区通道本身的变化。目前尚无 $N = 4$ 的负相互作用数据。

D.2 Floquet 允许跃迁与热谱峰

闭合系统 Floquet 态写成

$$|\psi_\alpha(t)\rangle = e^{-i\varepsilon_\alpha t} |u_\alpha(t)\rangle.$$

公共浴可以连接的第 m 个边带跃迁由

$$S_{\alpha\beta}^{(m)} = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-im\omega_d t} \langle u_\alpha(t) | S_N | u_\beta(t) \rangle dt \quad (41)$$

决定, 对应正频率

$$\nu_{\alpha\beta m} = \varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha + m\omega_d > 0.$$

准能量可以平移整数个驱动频率, 因此分析中合并了属于同一物理频率的重复表示。

对全部参数点的统计表明, 真实热谱强峰比随机平移后的通道集合更靠近具有较大 $|S_{\alpha\beta}^{(m)}|^2$ 的允许频率。 $N = 3$ 每条曲线的最强峰中, 62% 位于强通道 0.02Ω 以内, 78% 位于 0.05Ω 以内。 $N = 4$ 的全部 367 个可见峰中, 17.7%、28.3% 和 42.0% 分别位于最近强通道的 0.01Ω 、 0.02Ω 和 0.05Ω 以

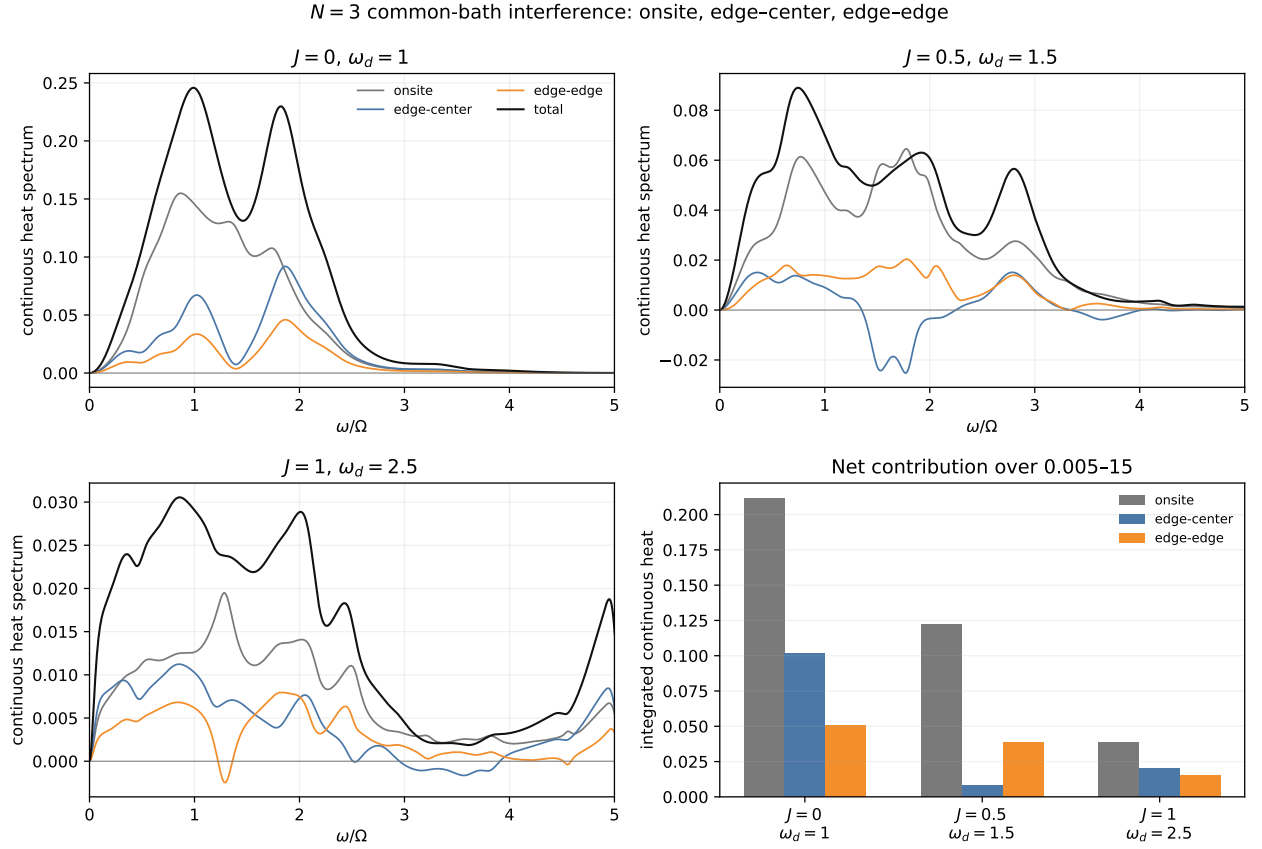


图 12: $N = 3$ 三个代表点的公共浴交叉热谱。主峰处中心-边缘和边缘-边缘交叉项均为正，说明主要峰包含相长的集体耗散；部分其他频率区间的交叉项为负，表明局部相消可以与主峰增强同时存在。

内，而保持通道密度不变的随机平移在 0.01Ω 内只有 5.8%。这支持“对称性允许的 Floquet 跃迁选择主要峰位”，但不能把闭合系统矩阵元单独当作开放体系峰高公式。

D.3 三自旋公共浴中的相长与相消

三自旋总相关函数可以按站点对写成

$$C_{\text{onsite}} = C_{11} + C_{22} + C_{33}, \quad (42)$$

$$C_{\text{edge-center}} = C_{12} + C_{21} + C_{23} + C_{32}, \quad (43)$$

$$C_{\text{edge-edge}} = C_{13} + C_{31}, \quad (44)$$

并逐项转换为热谱。三者满足

$$\dot{j}_{\text{total}} = \dot{j}_{\text{onsite}} + \dot{j}_{\text{edge-center}} + \dot{j}_{\text{edge-edge}},$$

数值相对差不超过 4.2×10^{-14} 。

在 $(J/\Omega, \omega_d/\Omega) = (0, 1)$ 、 $(0.5, 1.5)$ 和 $(1, 2.5)$ 三个点，中心-边缘项分别占主峰高度的 26.9%、15.3% 和 36.8%，边缘-边缘项分别占 13.5%、16.3% 和 22.3%。三个主峰都含相长的公共浴干涉；同时， $J/\Omega = 0.5, \omega_d/\Omega = 1.5$ 的中心-边缘项在 $\omega/\Omega \simeq 1.77$ 附近为负。因而“公共浴增强热流”只能针对具体频率和通道表述，不能概括为所有频率上的统一增强。

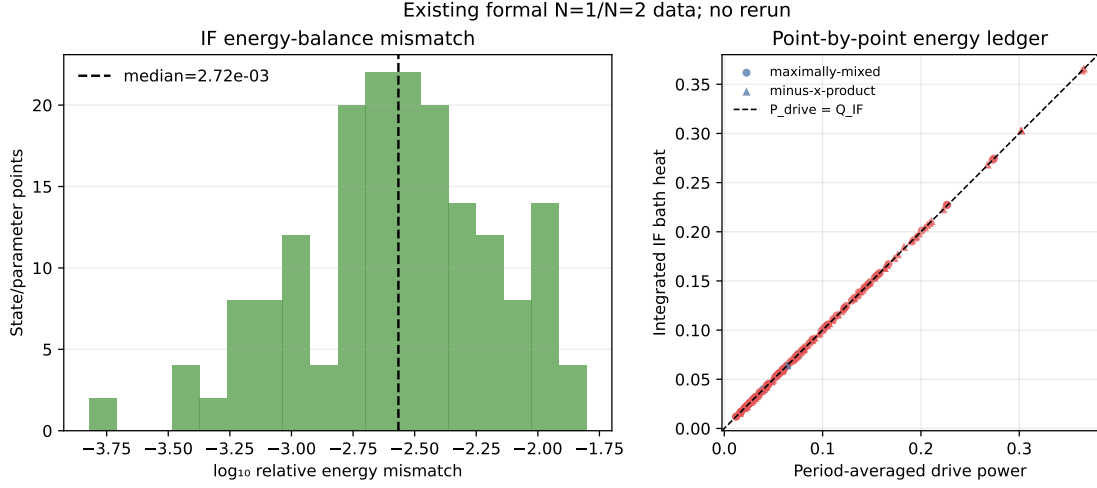


图 13: 热谱积分与周期平均驱动功率的比较。两种计算方式在绝大多数参数点上接近对角线；剩余差异主要来自有限频率窗、相关函数截断和环境张量压缩。

E 补充数值检查

E.1 峰数与热流的逐曲线统计

正文比较不同尺寸时使用 50 条一一对应的 (J, ω_d, ρ_0) 曲线。用相同的峰识别规则计数：从 $N = 2$ 到 $N = 3$ ，峰数增加、不变和减少的曲线分别为 33、15 和 2 条，中位峰数从 5 增至 7.5；从 $N = 3$ 到 $N = 4$ ，对应数量为 16、13 和 21 条，中位峰数从 7.5 降至 6.5。总热流方面， $Q_3 > Q_2$ 、 $Q_4 > Q_3$ 和 $Q_4 > Q_2$ 分别出现在 47/50、42/50 和 48/50 条曲线上。此外，有限 J 下 $N = 3$ 偶区的直接谱与式 (20) 的反射分区重构谱在全部 20 个参数点上的相对差为 0.09%–0.73%。

E.2 能量守恒

图 13 比较彼此独立得到的 Q 和 P_{drive} 。误差没有表现为统一的常数倍或符号翻转，说明谱密度、正频率积分和严格周期谱线的约定彼此一致。正文中的尺寸和相互作用比较均使用同一频率窗和同一热流定义，因此这些小误差不会改变奇区暗态、嵌入式 $N = 1$ 通道或总热流近似广延等主要结论。

E.3 相互作用符号对照数据的数值质量

$J/\Omega = -0.5$ 的纵向驱动扫描包含 $N = 2, 3$ 、五个驱动频率和两个初态，共 20 条热谱。全部曲线通过周期残差、迹变化、厄米性和相关尾部检查：最大周期残差为 9.72×10^{-7} ，最大原始迹变化为 0.143%，热谱积分与驱动功率的最大相对差为 0.201%。该扫描与正文使用相同的时间步和环境张量截断，但相关尾部停止阈值放宽为 10^{-5} ；因此附录图 11 用于比较主要峰位和权重，接近尾部噪声尺度的微弱差异不解释为新峰。

附录 A 的横向驱动子集包含 20 个物理点、40 条初态记录，采用相同的相关尾部设置，也全部通过检查：最大周期残差为 9.29×10^{-7} ，最大原始迹变化为 0.130%，热流与驱动功率的最大相对差为 0.920%。

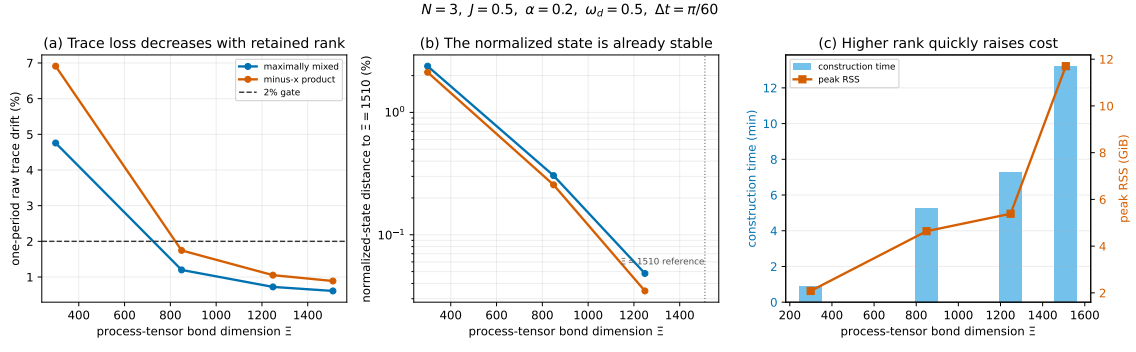


图 14: $\alpha = 0.2$ 代表点的有限 Ξ 检查。增大环境张量内部维数会改变原始迹变化和归一化周期态，但当前成本尚不足以建立完整收敛序列。

E.4 强耦合下的有限环境维数

主文热谱固定在 $\alpha = 0.05$ 。我们另外在 $\alpha = 0.2$ 的代表点检查了环境张量内部维数 Ξ 对结果的影响: $\Xi = 299$ 时原始迹变化可达约 6.9%，归一化周期状态对进一步增大 Ξ 的敏感度约为 2.4%。将 Ξ 提高到 1248 或 1510 会使核心张量作用的计算量增加约 17 或 26 倍，超出本研究的计算预算。

因此， $\alpha = 0.2$ 数据只用于说明强耦合下的有限算力误差，不进入正文的热谱和尺寸比较。主文全部结果使用独立构造的 $\alpha = 0.05$ 环境张量，不受这一取舍影响。

参考文献

- [1] K. Mickiewicz, V. Link, and W. T. Strunz, “Exact Floquet Dynamics of Strongly Damped Driven Quantum Systems,” *Physical Review Letters* **136**, 200201 (2026). <https://doi.org/10.1103/5z1m-122d>.
- [2] V. Link, H.-H. Tu, and W. T. Strunz, “Open Quantum System Dynamics from Infinite Tensor Network Contraction,” *Physical Review Letters* **132**, 200403 (2024). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.132.200403>.
- [3] R. P. Feynman and F. L. Vernon, “The Theory of a General Quantum System Interacting with a Linear Dissipative System,” *Annals of Physics* **24**, 118–173 (1963).
- [4] A. Strathearn, P. Kirton, D. Kilda, J. Keeling, and B. W. Lovett, “Efficient non-Markovian quantum dynamics using time-evolving matrix product operators,” *Nature Communications* **9**, 3322 (2018).
- [5] M. Grifoni and P. Hänggi, “Driven quantum tunneling,” *Physics Reports* **304**, 229–354 (1998).
- [6] H.-P. Breuer and F. Petruccione, *The Theory of Open Quantum Systems* (Oxford University Press, Oxford, 2002).
- [7] P. Zanardi and M. Rasetti, “Noiseless Quantum Codes,” *Physical Review Letters* **79**, 3306–3309 (1997).

- [8] D. A. Lidar, I. L. Chuang, and K. B. Whaley, “Decoherence-Free Subspaces for Quantum Computation,” *Physical Review Letters* **81**, 2594–2597 (1998).