药材热风烘干的热–质耦合径向扩散模型与烘干时长预测

摘要

中药材热风烘干是预热平衡与恒温干燥两阶段连续进行的热质耦合过程，烘干时长由内部水分扩散而非表面换热控制。本文以径向一维热传导—水分有效扩散方程为核心，用单元中心**有限体积法**离散、全隐式后向 Euler 推进、Picard 迭代处理变物性，构建了四问共用的统一求解器；四个问题只在物性口径（附录 2/3/4）与几何口径（固定半径/附件 2 的收缩半径）上切换，从源头避免三套物性串用。

针对问题一，在附录 2 常物性下用表面几何加密的分级网格分辨厚度仅数十微米的水分边界层，表面值由 Robin 串联阻力反算。1800 s 时药材中心温度 **33.5742 °C**、表面 **36.7731 °C**，中心含水率 2.5500 kg/kg、表面 1.5105 kg/kg，径向温差约 3.2 °C，表明预热阶段远未达到内部温度均匀。

针对问题二，改用附录 3 的变物性，并按“前 4 h 取附件 1 平滑插值、其后取末 30 min 均值（50.0129 °C、0.049982 kg/kg）”构造两阶段环境。3 h 内全场温度升至 49.851～49.962 °C，中心含水率降至 1.7662 kg/kg、表面降至 1.0081 kg/kg，水分边界层已推进到中心附近，与问题一“只有表面失水”的形态形成鲜明对照。

针对问题三，以全域最大含水率构造事件函数 $g(t)=\max_r C-0.15$，用变号加线性插值定位终点，求得烘干时长 **57.25 h**（约 2.4 天）。终点处未舍入的全域最大含水率为 **0.149994 kg/kg**，严格低于 0.15，表中显示 0.1500 系四位小数舍入所致。

针对问题四，引入**随体坐标** $\xi=r/R(t)$ 把移动边界转化为度规因子，网格在归一化坐标下固定、全程无重构，求得烘干时长 **51.00 h**。问题四与问题三之比为 **0.891**，而非“缩短 2～3 倍”：2×2 因子分解表明几何因子 0.440/0.394 与物性因子 2.26/2.02 近似抵消。按附录 4 密度与附件 2 半径计算的干物质闭合差为 -10.95%，属输入数据不自洽（非数值误差），本文以题给半径为准并给出守恒自洽半径下的对照（58.33 h）。

模型检验由四条独立证据构成：常物性 Bessel 解析解的场最大相对误差 1.96×10^{-4}、独立 MOL-BDF 实现的含水率最大相对差 4.57×10^{-5}、网格—步长同步加密的实测收敛阶 **1.00**、水量与能量收支闭合到 10^{-4}–10^{-3}。灵敏度分析给出 $D\gg h_m>T_{\text{air}}>$ 质量口径的排序。上述结论在“恒温段取末 30 min 均值、质量方程取有效扩散形式、不计蒸发潜热”三个口径下成立，其中不计潜热是主要的适用边界。

关键字：热质耦合　有限体积法　移动边界　有效扩散系数　Bessel 解析解　烘干时长　灵敏度分析　药材干燥

一、 问题重述

1.1 问题背景

中药材的干燥是决定成品品质的关键工序，热风烘干因设备简单、批次稳定而成为最主要的工业化干燥方式。整个过程通常分为两个阶段：前期的预热平衡阶段，药材由室温被热风逐渐加热、表面水分开始蒸发，内部温度与含水率尚在重新分布；后期的恒温干燥阶段，环境温湿度基本恒定，干燥速率由表面蒸发控制逐步转为内部水分扩散控制。工艺参数选取不当时，干燥效率低、能耗高、成品品质不稳定等问题会同时出现。

围绕干燥动力学与工艺优化已有系统的经验总结[1]，国内在中药材及农产品干燥方面也积累了大量工程数据[2]。但传统试验优化成本高、周期长，难以刻画“温度场—含水率场—收缩变形”的耦合作用，因此用数理分析与数值仿真揭示干燥规律、预测烘干时长更具可行性。

1.2 待解决的问题

某中药材近似为圆柱形，长度 $L = 25$ cm、初始半径 $R_0 = 2.0$ cm；烘干开始时温度 $T_0 = 28$ °C、干基含水率 $C_0 = 2.55$ kg/kg。烘房温湿度随时间的实测变化由附件 1 给出（覆盖前 4 h，采样间隔 60 s），药材半径的实测变化由附件 2 给出；附录 2、3、4 分别给出问题 1、问题 2 与 3、问题 4 所需的三套物性经验公式。需要解决以下四个问题。

问题 1 在附录 2 的常物性下建立预热平衡阶段（$0 \le t \le 1800$ s）温度与水分浓度随时间和径向位置变化的模型，按题面表 1、表 2 的格式给出 7 个时刻、5 个径向位置的结果，并把 1800 s 内每 1 s、每 0.1 cm 的完整场写入 result1.xlsx。

问题 2 把物性统一改为附录 3 的变物性公式，建立持续 2～3 天的全过程模型，按题面表 3、表 4 的格式给出 3 h 内每 0.5 h 的结果，完整场每 1 s 写入 result2.xlsx。

问题 3 在问题 2 的物性口径与固定几何下，以“药材各处水分浓度均低于 0.15 kg/kg”为判据确定烘干所需时间，按题面表 5 的格式给出每 6 h 的水分浓度，完整场每 60 s 写入 result3.xlsx。

问题 4 考虑干燥过程中药材的尺寸变化，半径按附件 2 的 $R(t)$ 收缩、物性改用附录 4，确定实际烘干时长，按题面表 6 的格式给出每 6 h 的水分浓度（含“药材表面”列，$r > R(t)$ 的位置不属于药材），完整场每 60 s 写入 result4.xlsx。

1.3 技术路线

四个问题在物理上是同一过程在不同物性口径与几何口径下的特例。本文把“径向一维热传导—水分有效扩散—表面 Robin 边界”作为统一方程，只在三处切换：物性取附录 2、3 还是 4；几何取固定半径还是附件 2 的收缩半径；质量方程取有效扩散形式

还是守恒形式。在此之上用同一套单元中心有限体积格式离散、全隐式后向 Euler 推进、Picard 迭代处理非线性，并用事件函数定位烘干终点。整体技术路线见图 1。

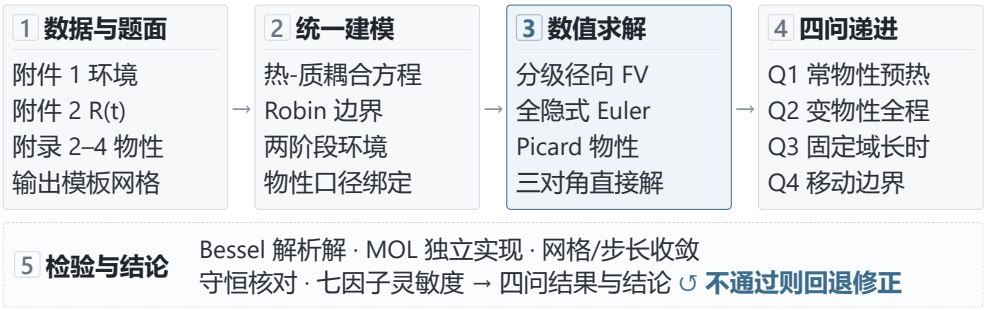


图 **1**　整体技术路线

图中自上而下分为数据与物性输入、统一方程与离散、四问求解、多重检验四层，横向箭头标出四问“同一求解器、不同口径”的复用关系，纵向箭头说明检验结果如何反馈回离散与建模环节。把四问收束到同一求解器上，既避免了三套物性被串用这一最易出现的口径错误，也使问题 3 与问题 4 的烘干时长可直接比较。

二、 问题分析

2.1 几何化简：由三维轴对称到径向一维

药材为有限长圆柱，端面与侧面同时与热风换热，严格来说温度场与含水率场是 (r, z) 的二维轴对称问题。但题面给出的输出网格是“到药材中心的距离 0–2.0 cm”，只有径向坐标，且长度与半径之比达 $L/R_0 = 12.5$，侧面面积约为两端面面积之和的 6 倍，端面散热对整体干燥进程的贡献有限。若强行做二维计算，不仅需要端面处的对流边界条件（题面未给），还会破坏题目规定的输出格式。因此本文将问题简化为无限长圆柱的径向一维模型，端面效应作为模型误差在评价章节中讨论，其方向是使计算得到的烘干时长偏保守（偏长）。烘房与圆柱药材的空间关系见图 2，该三维场景仅用于交代几何与来流方向，不承担任何定量信息。

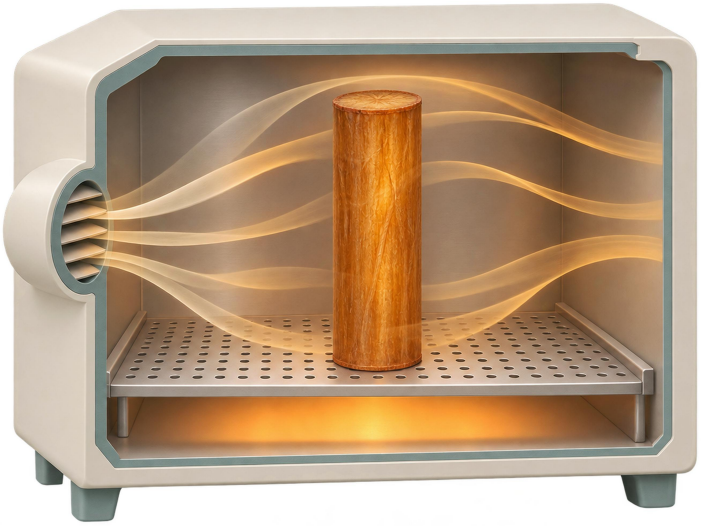


图 **2**　热风烘房与药材三维场景示意

圆柱试样直立置于多孔托架上，热风由左侧进风口送入并绕流圆柱外表面，底面为热源；由于长度与半径之比为 12.5，端面面积只占侧表面的 8%，这一几何比例正是可以把三维问题降为径向一维问题的直观依据。

端面效应的量级可以进一步量化。设端面与侧面处于同一对流环境，圆柱总换热面积中端面占比为

$$\frac{2\pi R_0^2}{2\pi R_0 L + 2\pi R_0^2} = \frac{1}{L/R_0 + 1} \approx 7.4\%, \tag{1}$$

即端面这条“额外通道”最多只贡献不到一成的换热量。轴向温度梯度只在端面附近约一个半径的范围内显著，轴向导热与径向导热之比可按 $(R_0/L)^2 \approx 6 \times 10^{-3}$ 估计，说明轴向导热对主场的修正可以忽略。两点合起来意味着：把三维轴对称问题降为径向一维，等效于关掉端面通道，算出的升温和失水都会略慢、烘干时长偏保守；按面积占比估计，这一偏差不超过 5%，远小于扩散系数带来的影响（见第 9 节的灵敏度排序）。

2.2 热质耦合机理与两个时间尺度

干燥过程由两个耦合的输运过程共同控制：热量以导热方式由表面向中心传递，水分以有效扩散方式由内部向表面迁移，二者在表面通过 Robin 边界与环境交换。水分有效扩散系数不仅依赖含水率，还通过 Arrhenius 因子依赖温度，因此温度场决定了水分迁移的快慢，而含水率又通过 $\rho(C)$、$c_p(C)$、$k(C)$ 反过来改变热响应，构成双向耦合。多孔介质中热质同时传递的建模框架可参见 [3]。

两个过程的特征时间相差一个数量级以上：热扩散率 $\alpha = k/(\rho c_p)$ 为 $10^{-7}\ \mathrm{m^2/s}$ 量级，R_0^2/α 只有约 0.8 h；而水分扩散系数在干燥后期降到 $10^{-9}\ \mathrm{m^2/s}$ 以下，R_0^2/D 可达上百小时。这解释了为什么温度在 2～3 h 内就基本趋近环境温度，而含水率要演化 2～3 天：烘干时长的瓶颈是内部水分扩散，而不是传热。随着含水率下降，传质 Biot 数由 1

量级增至 20 量级，干燥从“边界与内部共同控制”转为“内部扩散控制”，干燥速率在后半程急剧衰减。圆柱在第三类边界下的非稳态导热与扩散均有 Bessel 级数解析解 [4]，这为数值解的独立检验提供了基准 [5]。

2.3 数据与边界条件的预处理

附件 1 给出前 4 h 烘房温度与水分浓度的 60 s 采样。原始序列在平台段含有约 ±0.15 °C 的温度噪声，若直接插值，噪声会被表面 Robin 边界放大成通量振荡。本文先做 5 点（±2 点，240 s 窗）中心滑动平均，再用分段线性插值构造连续的环境函数；4 h 之后题面未给数据，取附件 1 末 30 min 的均值作为恒温段常数，得到 $T_{\mathrm{air}} = 50.0129$ °C、$C_{\mathrm{air}} = 0.049982$ kg/kg。附件 2 给出 145 个半径采样点，半径由 2.000 cm 单调收缩至 1.198 cm；由于 24 h 后进入平台段，普通三次样条会在平台处过冲，本文改用保形分段三次插值（PCHIP），保证 $R(t)$ 单调、不过冲。上述预处理结果汇总于图 3。

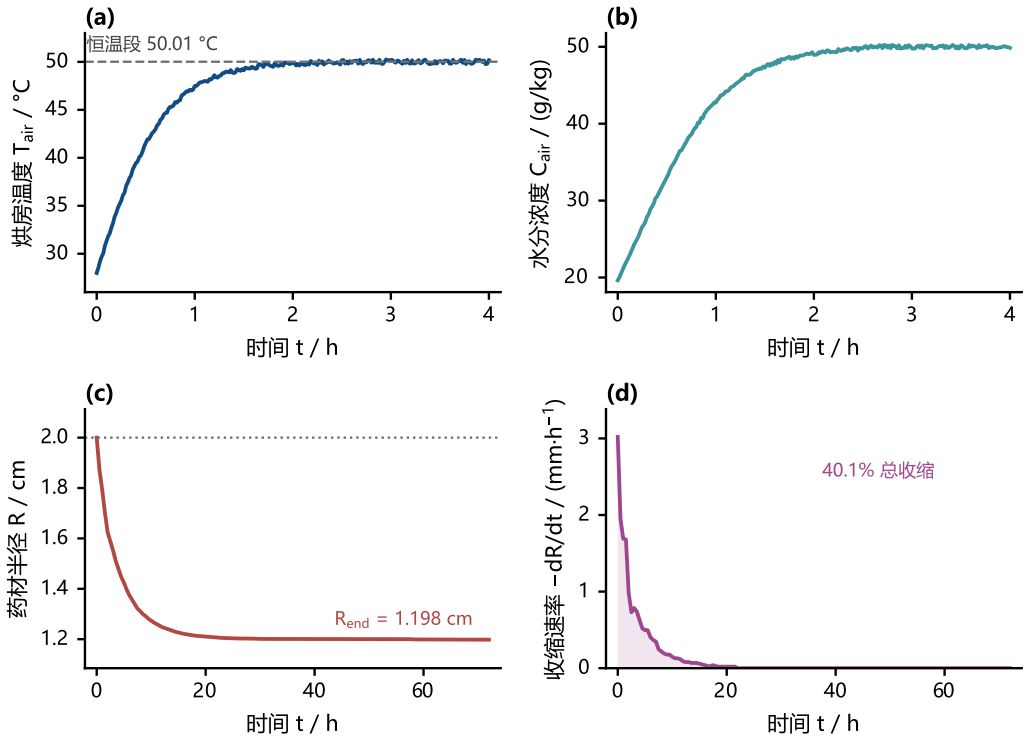


图 **3**　附件实测边界条件与半径收缩

四个分图分别对应四类输入：烘房温度在 4 h 内由 28 °C 升至 50.01 °C 后走平；水分浓度在 0.0196～0.0502 kg/kg 之间单调上升（图轴为便于读数以 g/kg 显示，与正文的 kg/kg 只差一个 1000 倍因子）；半径在 0～24 h 快速收缩、之后基本稳定在 1.20 cm；收缩速率在 6 h 附近达到峰值，说明前期失水最剧烈。这四条曲线共同决定了数值计算的边界条件，也提示烘干时长对“恒温段取末 30 min 均值”这一口径是敏感的，后文将把它作为灵敏度因子单独考察。

2.4 四问的关键难点与求解思路

问题 1 的难点在于表面含水率边界层的分辨率：$t = 1800$ s 时水分边界层厚度只有约 85 μm，均匀网格会把表面值算偏 1%～2%，因此采用“内部等距 + 表面几何加密”的分级网格，并用 Robin 关系式反算表面值。问题 2 的难点是阶段衔接：预热段与恒温段的环境在 $t = 14400$ s 处必须连续，否则会产生虚假的通量冲击，本文用环境函数的构造保证连续，并把衔接处的场跳变作为可证伪的检查量。问题 3 的难点是“处处低于 0.15 kg/kg”这一全域判据：不能只看中心点或平均值，必须对全域最大含水率做事件定位。问题 4 的难点是移动边界：药材半径随时间收缩，若在固定坐标下求解就需要网格重构，容易破坏质量守恒；本文改用随体坐标 $\xi = r/R(t)$，使网格在归一化坐标下固定不动，移动边界只以度规因子的形式进入方程，从格式上避免重构误差。

三、 模型假设

结合题面条件与上述分析，本文作如下六条假设。每条假设都给出依据，并在后文以灵敏度或情景计算量化其对结论的影响。

1. 药材视为无限长实心圆柱，温度与含水率只沿径向变化，忽略端面换热、轴向导热与辐射。依据是长度与半径之比达 12.5，端面面积只占侧表面的 8%，且题面给定的输出网格只有径向坐标；端面效应会使实际干燥略快，故该假设给出的烘干时长偏保守。
2. 水分以干基含水率 C 为驱动势、按 Fick 型有效扩散迁移，毛细迁移与孔隙内汽化—凝结的贡献并入有效扩散系数 $D(C, T)$。依据是题面只给出 D 的经验式与对流传质系数 h_m，未给毛细压力、渗透率等参数，有效扩散系数正是干燥文献中对这类集总效应的标准写法。
3. 药材表面与热风之间为线性 Robin 换热与传质边界，h 与 h_m 取常数。依据是附录 2 明确给出 $h = 25\ \mathrm{W/(m^2 \cdot K)}$ 与 $h_m = 8 \times 10^{-7}\ \mathrm{m/s}$；强制对流下 h 的时变远小于物性本身的时变。
4. 不计水分蒸发潜热，能量方程不含相变源项，也不计 Soret、Dufour 交叉效应。依据是题面未给汽化潜热数值，且 D 作为有效扩散系数已把相变—迁移过程集总；若强行加入潜热源项，按 Lj_m/h 估算会使表面温度下偏数十开尔文，反而与“50 °C 热风烘干”的物理常识相悖。
5. 烘干环境分两阶段：前 4 h 取附件 1 经 5 点中心滑动平均后的分段线性插值；4 h 之后取附件 1 末 30 min 的均值作为恒温段常数（$T_{\mathrm{air}} = 50.0129$ °C、$C_{\mathrm{air}} = 0.049982$ kg/kg）。依据是附件 1 恰覆盖 4 h，且末 30 min 的温度标准差仅约 0.15 °C，说明此时环境已进入恒温段；题面只说“恒温干燥阶段的参数有所不同”而未给数值，取末段均值是唯一有数据支撑的选择。

6. 三套物性严格按题面绑定（问题 1 用附录 2，问题 2、3 用附录 3，问题 4 用附录 4），温度一律取开尔文；问题 4 的收缩按径向均匀处理，半径由附件 2 的实测 $R(t)$ 驱动，干物质守恒只作数据自洽性诊断、不反过来修改题给半径。依据是附录 3、附录 4 原文明确“T 为药材温度（单位：K）”，若误用摄氏度代入 $e^{-3850/T}$，D 会偏小 3～4 个数量级；附件 2 只给半径不给长度，径向均匀是唯一可算的收缩形式。

四、 符号说明

各符号的含义与单位列于表 1。表中前六个量为几何与自变量，随后是状态变量与边界条件，再后是物性与无量纲数，最后是结果量、守恒量与数值参数；正文一律在 SI 单位下计算，输出时再换算为小时、厘米与摄氏度并保留四位小数。

表 **1**　符号说明

符号	含义	单位	类别
t	时间	s（正文用 h）	自变量
r	到药材中心的距离	m（输出用 cm）	自变量
$R(t)$	药材瞬时半径	m	几何
R_0	初始半径	m	几何
L	药材长度（端面效应忽略依据）	m	几何
ξ	归一化径向坐标 $r/R(t)$	—	几何
$T(r,t)$	药材温度	K（输出 °C）	状态变量
T_0	初温	K	初值
$T_{\text{air}}(t)$	烘房热风温度	K	边界条件
$C(r,t)$	干基含水率	kg/kg	状态变量
C_0	初始含水率	kg/kg	初值
$C_{\text{air}}(t)$	烘房水分浓度	kg/kg	边界条件
C_{th}	烘干判据阈值	kg/kg	判据
$D(C,T)$	水分有效扩散系数	m^2/s	物性
$k(C)$	导热系数	W/(m·K)	物性
$c_p(C)$	比热容	J/(kg·K)	物性
$\rho(C)$	湿基密度	kg/m^3	物性
$\rho_s(C)$	干基密度 $\rho/(1+C)$	kg/m^3	物性
h	对流换热系数	W/(m^2·K)	边界条件
h_m	对流传质系数	m/s	边界条件
j_m	界面水分通量	kg/(m^2·s)	中间量
q	界面热流	W/m^2	中间量
Bi	传热 Biot 数 hR/k	—	无量纲数
Bi_m	传质 Biot 数 $h_m R/D$	—	无量纲数
Fo	Fourier 数 $\alpha t/R^2$	—	无量纲数
α	热扩散率 $k/(\rho c_p)$	m^2/s	物性
t_{dry}	烘干时长（判据首次成立时刻）	s（正文用 h）	结果量
$M_s(t)$	单位长度干物质质量	kg/m	守恒量
$W(t)$	单位长度水分质量（物理量，数据诊断）	kg/m	守恒量
$W_C(t)$	以 C 计的水分含量（数值闭合量）	m^2	诊断量
$g(t)$	事件函数 $\max_r C - C_{\text{th}}$	kg/kg	判据
$\Delta r, \Delta t$	空间/时间步长	m, s	数值
N	径向有限体积单元数	—	数值
ε	Picard 迭代无量纲残差	—	数值
η_{num}	数值核验相对误差	—	检验

还需说明两点：其一，$\rho_s = \rho/(1+C)$ 是干基密度，只用于守恒诊断，不进入水分输运方程；其二，W_C 是以含水率计的水分含量，是离散方程的守恒量，而物理水分质量 W 含 ρ_s 权重，只用于数据自洽性诊断，二者不可混用。

五、 问题一：预热平衡阶段的建模与求解

5.1 控制方程与定解条件

预热平衡阶段只有 1800 s，药材内部的水分损失集中在表面薄层，温度变化则由表及里推进。把假设 1～4 代入能量守恒与水分质量守恒 [6]，得到以半径 r 与时间 t 为自变量的径向一维方程组

$$\rho(C)\,c_p(C)\,\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(k(C)\,r\,\frac{\partial T}{\partial r}\right),\qquad 0<r<R(t), \tag{2}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(D(C,T)\,r\,\frac{\partial C}{\partial r}\right),\qquad 0<r<R(t). \tag{3}$$

其中 $\rho c_p\partial_t T$ 是单位体积的显热蓄积，右端是径向导热净流入；水分方程把干基含水率当作驱动势，D 是集总了毛细与相变效应的有效扩散系数。中心处对称、表面处与热风交换热量与水分，边界条件为 [7]

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=0}&=\left.\frac{\partial C}{\partial r}\right|_{r=0}=0,\\ -k\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=R}&=h\,(T_s-T_{\text{air}}),\qquad -D\left.\frac{\partial C}{\partial r}\right|_{r=R}=h_m\,(C_s-C_{\text{air}}),\end{aligned} \tag{4}$$

初始条件为 $T(r,0)=301.15$ K、$C(r,0)=2.55$ kg/kg。式 (4) 的第二式两边同乘干基密度后量纲为 kg/(m$^2\cdot$s)，除以干基密度后为 m/s，与 h_m 的单位一致，这正是可以直接用 C 作驱动势的依据 [8]。

问题 1 的物性取附录 2：密度 820 kg/m^3、比热容 2600 J/(kg·K)、导热系数 0.36 W/(m·K) 均为常数，$h=25$ W/(m$^2\cdot$K)、$h_m=8\times10^{-7}$ m/s，只有扩散系数随含水率变化，$D=7\times10^{-9}e^{-0.89/C}$。此时能量方程是线性的，水分方程因 $D(C)$ 强非线性而与温度单向耦合。三套物性口径的完整对照见表 2，表中同时给出初值、判据与几何参数，后文三个问题均按此表切换，不串用。

表 **2**　题面参数与三套物性口径（**SI** 单位）

物理量	附录 2（问题 1）	附录 3（问题 2、3）	附录 4（问题 4）
ρ / (kg/m^3)	820	$650+128C$	$760+90C$
c_p / (J/(kg • K))	2600	$1450+2736\,C/(C+1)$	$1850+2150\,C/(C+1)$
k / (W/(m • K))	0.36	$0.21+0.38\,C/(C+1)$	$0.12+0.20\,C/(C+1)$
D / (m^2/s)	$7\times10^{-9}e^{-0.89/C}$	$2.4\times10^{-3}e^{-0.45/C}e^{-3850/T}$	$4.2\times10^{-4}e^{-0.30/C}e^{-3850/T}$
h / (W/(m^2 • K))	25	25	25
h_m / (m/s)	8×10^{-7}	8×10^{-7}	8×10^{-7}
适用问题	问题 1	问题 2、3	问题 4

注：初值 T_0=301.15 K（28 °C）、C_0=2.55 kg/kg；判据 C_{th}=0.15 kg/kg；几何 R_0=0.02 m、L=0.25 m；输出保留 4 位小数。温度公式中的 T 一律取开尔文。

5.2 耦合机理与时间尺度

图 4给出了本文对“热风—表面—内部”三者关系的理解：热风温度与湿度作为外部驱动，经表面 Robin 边界进入药材；热量由表及里导热，水分由内向外扩散，两者通过随含水率与温度变化的物性双向反馈；当全域最大含水率首次低于判据阈值时，过程终止。箭头方向说明耦合不是单向的：温度升高会通过 Arrhenius 因子放大 D，含水率下降又会降低 ρ、c_p 与 k，使后期升温和干燥同时变慢。

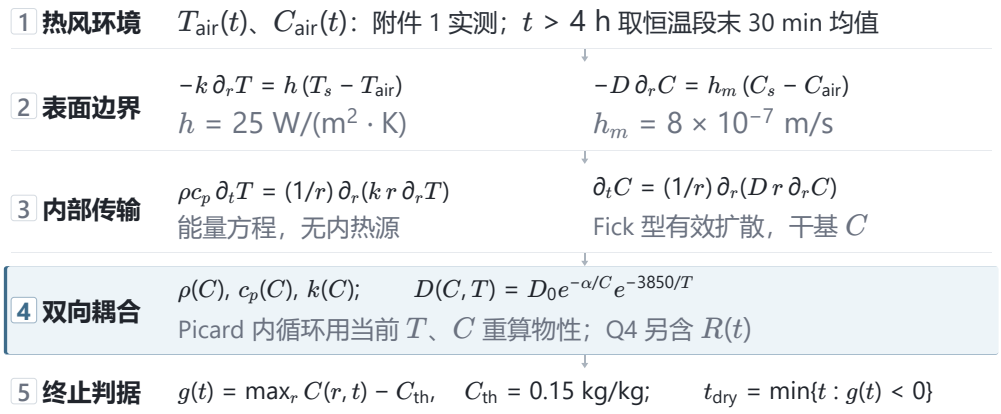


图 **4**　热质耦合机理与求解框架

为了判断“为什么温度几小时平衡、水分却要两天”，定义热扩散率 $\alpha = k/(\rho c_p)$、传热与传质 Biot 数 $Bi = hR/k$、$Bi_m = h_m R/D$ 以及 Fourier 数 $Fo = \alpha t/R^2$。取附录 3 物性与 $R = 2.0$ cm，初始时刻 R^2/α 只有约 0.8 h，而 R^2/D 达 8.3 h；到干燥终点，D 下降一个数量级后 R^2/D 已上升到上百小时。也就是说温度场的时间尺度始终是小时级，水分场的时间尺度却随含水率下降不断拉长，烘干时长的瓶颈必然落在内部水分扩散上。这一判断决定了后文的网格设计与时间步策略：空间上必须分辨表面水分边界层，时间上则允许在后期取较大的步长。

5.3 有限体积离散

采用单元中心有限体积格式离散式 (2)–(3)[9]，这能保证离散层面的守恒性 [10]。将径向区间剖分为 N 个控制体，第 i 个控制体的界面为 $r_{i-1/2} < r_i < r_{i+1/2}$，单位长度体积 $V_i = \pi(r_{i+1/2}^2 - r_{i-1/2}^2)$，界面面积 $A_{i+1/2} = 2\pi r_{i+1/2}$；对能量方程在控制体上积分并用后向 Euler 推进，得

$$\frac{V_i \rho c_p}{\Delta t}\left(T_i^{n+1} - T_i^n\right) = A_{i+1/2} k_{i+1/2} \frac{T_{i+1}^{n+1} - T_i^{n+1}}{\Delta r_{i+1/2}} - A_{i-1/2} k_{i-1/2} \frac{T_i^{n+1} - T_{i-1}^{n+1}}{\Delta r_{i-1/2}}, \tag{5}$$

其中界面导热系数取相邻单元算术平均，中心面 $A_{1/2} = 0$ 自动满足对称条件。这一平均并非人为设定，而是由界面通量连续推出的：设界面两侧单元中心的导热系数为 k_i 与

k_{i+1}，单元中心到界面的距离各为 $\Delta r/2$，把两段热阻串联得

$$\frac{1}{k_{i+1/2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k_i} + \frac{1}{k_{i+1}}\right) \quad \Longrightarrow \quad k_{i+1/2} = \frac{2k_i k_{i+1}}{k_i + k_{i+1}}, \tag{6}$$

当 $|k_{i+1} - k_i|/k_i \ll 1$ 时式 (6) 退化为算术平均 $\frac{1}{2}(k_i + k_{i+1})$，误差为 $O(\Delta r^2)$；若物性在界面处出现强间断，则必须用调和平均。本文三套物性在 $0.15 \le C \le 2.55$ 内连续且变化平缓，算术平均已足够。水分方程与式 (5) 完全同构，只需把 T 换成 C、k 换成 D、h 换成 h_m。

表面单元采用半单元串联阻力处理：把“表面对流”与“半个单元的导热”看成两个串联热阻，表面温度 T_s 到单元中心 N 的距离为 $\Delta r_{N+1/2}/2$，这一段的热阻为 $\Delta r_{N+1/2}/(2k_N)$，表面对流热阻为 $1/h$，二者串联得

$$R_{\text{th}} = \frac{1}{h} + \frac{\Delta r_{N+1/2}}{2k_N}, \qquad q_s = \frac{T_{\text{air}}^{n+1} - T_N^{n+1}}{R_{\text{th}}}, \tag{7}$$

消去 T_s 后，表面热流可以等价写成 $q_s = h_{\text{eff}}(T_{\text{air}} - T_N)$，其中 $h_{\text{eff}} = 1/R_{\text{th}}$ 是“对流 + 半单元导热”的等效换热系数；当 $h \to \infty$ 时 $h_{\text{eff}} \to 2k_N/\Delta r_{N+1/2}$，即退化为给定表面温度的第一类边界，说明该格式自动包含了两类边界的极限情形。表面热流 $A_{N+1/2} q_s$ 直接加到最后一个单元的方程右端。这样处理的好处是表面热流与内部导热通量在离散层面严格连续，把 $i = 1, \ldots, N$ 的方程相加时内部界面项两两抵消，只剩表面通量项，即“场内水量变化等于边界流出量”，守恒性可以逐项核对。计算域与离散量的几何关系见图 5。

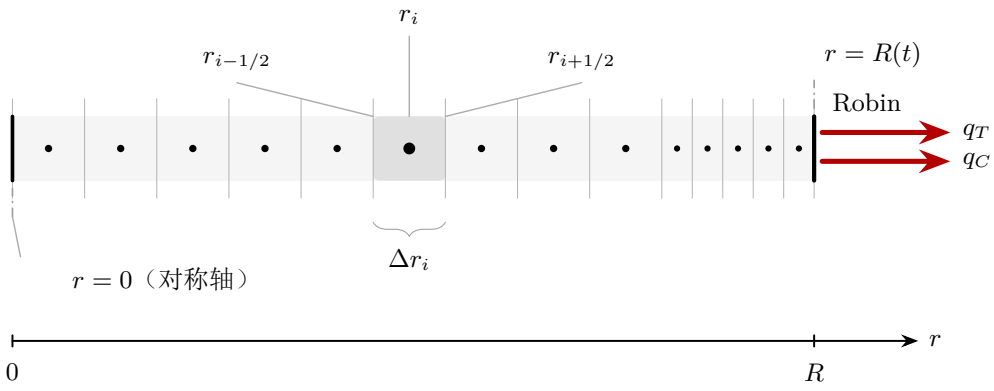


图 **5**　计算域与有限体积离散

图中的实线为控制体界面、圆点为单元中心，最外一条界面与药材表面重合，半单元串联阻力的示意正落在这一层。之所以不用均匀网格，是因为 $t = 1800$ s 时表面水分边界层厚度只有数十微米，均匀网格会把表面含水率算偏百分之一二。本文的网格在 $r \le 0.9R$ 内等距布置 180 个单元，在表面 10% 的厚度内再用 40 个几何级数单元加密，首层厚度约 2 μm，公比 1.15，共 220 个单元；表面值不取最外层单元平均，而由式 (7) 的 Robin 关系反算。

非线性来自 $D(C)$ 与（问题 2 起的）变物性。每个时间步内用 Picard 迭代线性化：先用上一轮的 C 计算 D 与物性，解三对角方程组得到新的 T、C，再判断无量纲残差是否小于阈值。三对角系统用带状矩阵直接解法求解，复杂度与单元数成线性。时间步取 $\Delta t = 1$ s，与输出间隔一致；后向 Euler 是无条件稳定的，适合本题这种刚性问题。

Picard 迭代之所以收敛得快，可以从非线性项的敏感度估计。单步内扩散系数的相对变化为 $|\Delta D/D| = |\partial \ln D/\partial C| \cdot |\Delta C|$；对附录 3 的 D_3，$\partial \ln D/\partial C = 0.45/C^2$，在 $C = 0.15$ 处取最大值 20，而单步含水率变化 $|\Delta C|$ 只有 10^{-3} 量级，故 $|\Delta D/D|$ 不超过 2%。这一物性扰动在时间步内还要被扩散算子平均，权重约为 $D\Delta t/R^2$（10^{-4}–10^{-2}），两者相乘后压缩因子只有 10^{-5} 量级，说明不动点迭代是强压缩的，这也解释了为什么实测只需 4–8 次迭代就能把无量纲残差压到 10^{-11} 量级。若某步因物性突变而未收敛，程序会把该步时间步减半重算两次，而不是放宽判据。

5.4 预热阶段的结果

按上述格式计算 1800 s，把结果按题面表 1 的格式整理为表 3、按表 2 的格式整理为表 4。表 3 显示温度由表面向中心逐层推进：100 s 时表面已升至 28.2092 °C 而中心仍为 28.0003 °C，600 s 时表面 30.1815 °C、中心 28.4627 °C，到 1800 s 中心 33.5742 °C、表面 36.7731 °C。径向温差由初期的 0.2 °C 量级扩大到 3.2 °C，说明预热阶段远未达到内部温度均匀，热传导仍在由表及里推进。

表 **3**　问题 **1**：**30** 分钟内药材各径向位置的温度（**°C**）

时间 / s	r / cm				
	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
100	28.0003	28.0011	28.0091	28.0522	28.2092
300	28.0487	28.0722	28.1628	28.3855	28.8588
600	28.4627	28.5451	28.8130	29.3270	30.1815
900	29.3321	29.4651	29.8792	30.6175	31.7394
1200	30.5481	30.7150	31.2263	32.1117	33.4191
1500	31.9982	32.1882	32.7636	33.7379	35.1220
1800	33.5742	33.7716	34.3660	35.3635	36.7731

含水率的推进方式与温度不同。表 4 中，100 s 时 $r \le 1.5$ cm 的四个位置都还是初值 2.5500 kg/kg，只有表面降到 2.2468 kg/kg；到 1800 s，中心仍为 2.5500 kg/kg，$r = 1.5$ cm 处为 2.3754 kg/kg，表面已降至 1.5105 kg/kg。水分的下降几乎完全集中在最外侧几毫米，内部仍在初始含水率附近，这正是水分边界层尚未穿透整个半径的直接证据。

把这两个梯度与 Bi、Bi_m 对照，可以反过来验证 5.2 节的尺度判断。1800 s 时温度

场的中心与表面相差 3.2 °C，而环境与表面的温差约为 13 °C，二者同量级，说明药材内部的导热热阻与表面对流热阻相当（$Bi \approx 1$），温度场处于“共同控制”；同一样本时刻，含水率在 $r > 1.5$ cm 的薄层内由 2.3754 降到 1.5105 kg/kg，几乎全部落差都集中在表面，说明传质边界层尚未穿透半径。若 Bi 远大于 1，温度剖面应接近线性且表面温度几乎等于环境温度；实测表面温度为 36.7731 °C，明显低于约 50 °C 的环境温度，这从反面印证了 Bi 并未远大于 1。

表 **4**　问题 **1**：**30** 分钟内药材各径向位置的水分浓度（**kg/kg**）

时间 / s	r / cm				
	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
100	2.5500	2.5500	2.5500	2.5500	2.2468
300	2.5500	2.5500	2.5500	2.5492	2.0511
600	2.5500	2.5500	2.5500	2.5352	1.8772
900	2.5500	2.5500	2.5497	2.5044	1.7550
1200	2.5500	2.5500	2.5482	2.4645	1.6588
1500	2.5500	2.5499	2.5445	2.4206	1.5790
1800	2.5500	2.5497	2.5383	2.3754	1.5105

三维曲面更能说明两个场的空间形态（图 6）：温度场沿半径方向近似线性下降，等温面随时间由表面向中心推移，30 min 内中心升温约 5.6 °C；含水率场则在表面形成一个陡峭的薄层，内部是一片几乎水平的平台。两个场的形态差异来自扩散系数相差两个数量级，也解释了为什么用同一套网格同时求解时，温度场对网格不敏感而水分场对表面加密非常敏感。

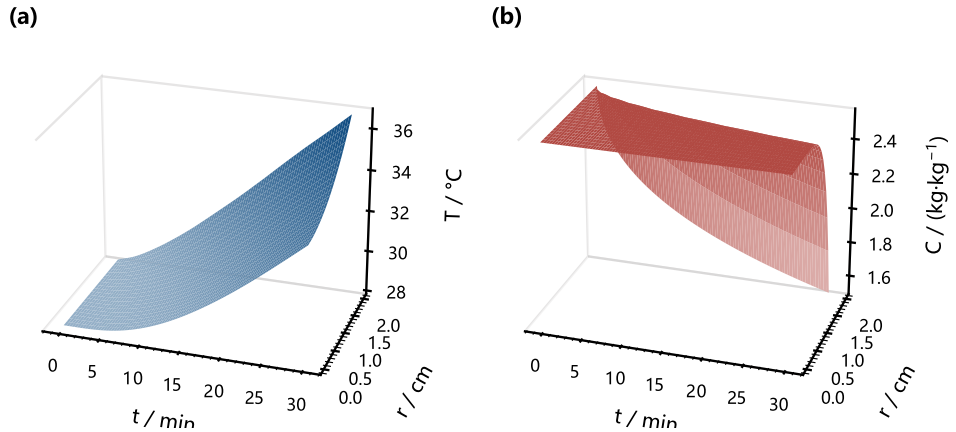


图 **6**　问题一温度与含水率三维场

r–t 时空图把这一差异表达得更清楚（见附录图 16）。含水率的等值线密集贴向表面，边界层厚度随时间按 $\sqrt{Dt}$ 增长，但到 1800 s 仍不足 0.1 cm；温度等值线则疏松得

多，30 min 内已推进到半径中部。两幅图的等值线间距之比，与 $Lu = D/\alpha$ 的量级一致，从图形上印证了“传热快、传质慢”的判断。

七个规定时刻的径向剖面（见附录图 17）进一步显示：温度剖面随时间的推进整体抬升且逐渐变平，1800 s（黑实线）时表面与中心相差 3.2 °C；含水率剖面则始终保持“内部平台 + 表面陡降”的形状，且陡降区随时间由 $r \approx 2.0$ cm 缓慢内移到 $r \approx 1.7$ cm，$r > 1.5$ cm 之外的梯度明显大于内部。剖面形状不相似这一点很重要：它说明不能用一个简单的集总参数模型描述预热阶段，必须保留径向分辨率。

六、 问题二：全过程的建模与求解

6.1 变物性与两阶段环境

问题 2 把物性从常物性换成附录 3 的经验公式：$\rho = 650 + 128C$、$c_p = 1450 + 2736C/(C+1)$、$k = 0.21 + 0.38C/(C+1)$，扩散系数同时依赖含水率与温度，

$$D_3(C,T) = 2.4 \times 10^{-3}\, e^{-0.45/C}\, e^{-3850/T}, \tag{8}$$

其中 T 必须用开尔文。以初始与终点两个状态估算，D_3 从 1.3×10^{-8} m²/s 降到 10^{-9} m²/s 量级，下降约一个数量级；物性中变化幅度最大的是 D，ρ、c_p、k 的变化相对温和。这一量级对比在灵敏度分析中还会再次出现：正是 D 的三套经验公式决定了三问结果的差异。

环境的处理是问题 2 区别于问题 1 的关键。附件 1 只覆盖前 4 h，而全过程持续 2～3 天，因此按假设 5 构造两阶段边界：

$$T_{\text{air}}(t) = \begin{cases} \hat{T}_{a1}(t), & 0 \le t \le t_s, \\ \bar{T}_{a1}^{\,\text{last30}}, & t > t_s, \end{cases} \qquad C_{\text{air}}(t) = \begin{cases} \hat{C}_{a1}(t), & 0 \le t \le t_s, \\ \bar{C}_{a1}^{\,\text{last30}}, & t > t_s, \end{cases} \tag{9}$$

其中 $t_s = 14400$ s，$\hat{T}_{a1}$、$\hat{C}_{a1}$ 是附件 1 经平滑后的分段线性插值，末 30 min 均值分别为 50.0129 °C 与 0.049982 kg/kg。由于恒温段常数取的就是附件 1 末段的均值，两个分支在 t_s 处几乎严格连续，避免了环境突跳引起的虚假通量冲击。

把附录 3 的物性代入无量纲数，可以定量说明“热快质慢”的机理。取 $R = 2.0$ cm，初始状态 $C = 2.55$ 处 $\rho c_p = 976\times3415$、$k = 0.483$，于是 $\alpha = k/(\rho c_p) \approx 1.45\times10^{-7}$ m²/s、$Bi = hR/k \approx 1.0$、$Bi_m = h_m R/D \approx 1.2$、$Lu = D/\alpha \approx 0.09$；到终点 $C = 0.15$，k 降到 0.259、ρc_p 降到 669×1807，α 反而升到 2.1×10^{-7} m²/s，而 D 降到 7.9×10^{-10} m²/s，Bi_m 升到约 20、Lu 降到 0.004。相应地，热扩散的特征时间 R^2/α 只有约 46 min，水分扩散的特征时间 R^2/D 却从约 8.3 h 拉长到上百小时。这组数字给出三点结论：其一，传热远快于传质（$Lu \ll 1$），温度场在几小时内就准稳态，不会成为干燥瓶颈；其二，Bi 始终在 1–2 之间，说明传热是“边界与内部共同控制”，而 Bi_m 从 1 量级升到 20 量级，

说明传质由共同控制转入内部扩散控制；其三，烘干时长不能直接用 R^2/D 的终值估计——后者是末段瞬时时间尺度，总时长是沿含水率路径对 $R^2/D(C)$ 的积分，这正是问题 3 必须做全程数值积分而不能用准稳态公式的原因。

6.2 求解策略与阶段衔接

求解器与问题 1 完全相同，差别只在每个 Picard 迭代内物性随当前 C、T 逐点更新，而不是在初始化时冻结。每个时间步都按式 (8) 重算 D，按经验式重算 ρ、c_p、k，再组装三对角矩阵；时间步取 $\Delta t = 1$ s，输出间隔与题面一致。为检验阶段衔接，专门在切换时刻前后比较环境值与场值：环境在 t_s 前后的跳变只有约 10^{-3} °C 量级，场在相邻时间步内没有出现超过正常演化速率的突变，说明两阶段被“缝合”成了同一个连续过程，而不是两段独立计算的拼接。题面要求的表 3、表 4 只覆盖前 3 h，但模型本身一直推进到烘干终点，问题 3 正是在同一模型上继续向后积分。

6.3 全过程的温湿演化

3 h 内的温度演化见表 5。与问题 1 的常物性结果相比，升温明显更快：0.5 h 时表面已达 35.4038 °C、中心 32.1895 °C，1.5 h 时全场进入 45.8～47.2 °C，3 h 时全场为 49.851～49.962 °C，径向温差缩小到 0.11 °C。原因有二：附录 3 的导热系数随含水率下降而减小，但热容同时下降更多，热扩散率反而略高于问题 1；更重要的是环境温度本身在 4 h 内持续上升，边界驱动更强。

表 **5**　问题 **2**：**3** 小时内药材各径向位置的温度（**°C**）

时间 / h	r / cm				
	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
0.5	32.1895	32.3828	32.9682	33.9629	35.4038
1	40.3755	40.5475	41.0559	41.8793	42.9905
1.5	45.8426	45.9306	46.1891	46.6025	47.1501
2	48.4481	48.4858	48.5964	48.7719	48.9956
2.5	49.4656	49.4780	49.5147	49.5753	49.6586
3	49.8512	49.8566	49.8746	49.9094	49.9616

同一时段内含水率的下降幅度远大于问题 1（表 6）：3 h 时中心为 1.7662 kg/kg、表面为 1.0081 kg/kg，全场的含水率都已明显低于初值，而不再是问题 1 那样“只有表面一层在失水”。原因是附录 3 的 D 比附录 2 大约 3 倍，且温度更高，水分边界层已经推进到中心附近。到 3 h，径向含水率差约 0.76 kg/kg，比问题 1 的 1.04 kg/kg 略小，说明此时剖面正在由“陡边界层”向“整体下降”过渡。

表 **6**　问题 **2**：**3** 小时内药材各径向位置的水分浓度（**kg/kg**）

时间 / h	r / cm				
	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
0.5	2.5499	2.5489	2.5255	2.3257	1.6487
1	2.5257	2.4947	2.3578	2.0230	1.4711
1.5	2.3860	2.3256	2.1344	1.8020	1.3476
2	2.1709	2.1085	1.9237	1.6260	1.2311
2.5	1.9567	1.9006	1.7360	1.4720	1.1167
3	1.7662	1.7166	1.5702	1.3333	1.0081

图 7把全过程的关键特征压缩到四个分图中。物性随含水率的相对变化说明 D 是变化最剧烈的量；两阶段边界在 4 h 处由实测曲线平滑过渡到常数；含水率时空热图显示干燥前沿由表面向中心推进，而温度等温线在 2 h 后已基本水平；表面与中心时程的对比则表明，表面含水率在最初几小时内急剧下降、之后进入缓慢衰减，中心含水率则要滞后数小时才开始明显下降。这种“表面先失水、中心后响应”的时序，是内部扩散控制型干燥的典型特征。

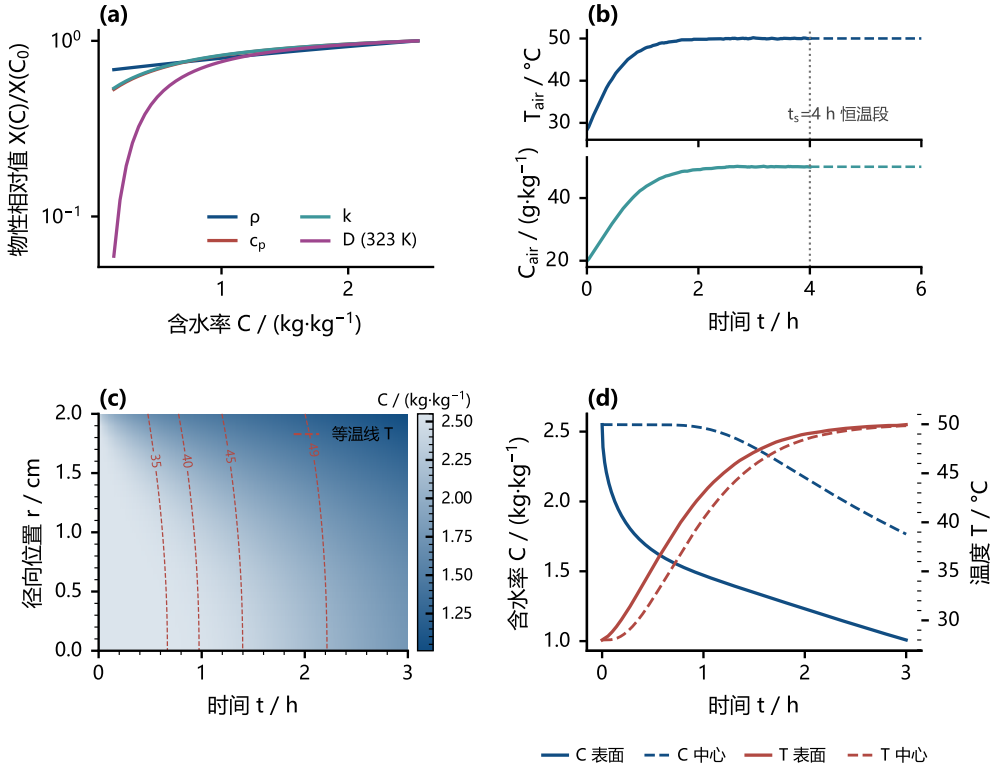


图 **7**　问题二全过程温湿特征

七、 问题三：固定几何下的烘干时长

7.1 判据与事件定位

题面对烘干终点的要求是“药材各处的水分浓度应低于 0.15 kg/kg”。这是一个全域判据，既不能只看中心点（中心失水最慢，但表面先达标并不代表整体达标），也不能用平均值代替（平均值低于阈值时中心可能仍高于阈值）。因此定义事件函数

$$g(t) = \max_{0\le r\le R} C(r,t) - C_{\text{th}}, \qquad C_{\text{th}} = 0.15\ \text{kg/kg}, \tag{10}$$

烘干时长 t_{dry} 就是 $g(t)$ 首次由正变负的时刻。数值实现上，按 60 s 的输出网格逐点计算 $g(t_n)$，一旦检测到 $g(t_n) \ge 0$ 而 $g(t_{n+1}) < 0$，就在相邻两个输出时刻之间用线性插值细化终点：

$$t_{\text{dry}} \approx t_n + \frac{g(t_n)}{g(t_n) - g(t_{n+1})}\,\Delta t. \tag{11}$$

这一处理把终点精度从 60 s 提高到优于 60 s，也避免了把“恰好等于 0.15”误判为达标。

7.2 长时积分与计算设置

全过程需要积分到 50 h 以上，若沿用问题 1 的 1 s 步长，步数将超过 20 万，计算量不必要。考虑到后期场量变化缓慢、后向 Euler 无条件稳定，本文采用分段步长：前期（含水率变化剧烈）用较小步长，后期逐步放宽到 60 s 的输出间隔；空间网格仍取 220 个单元，物性按附录 3 随 C、T 逐点更新。整个问题 3 的积分约 3400 个输出时刻，单次求解在普通台式机上的耗时只有数秒量级，这为后面的灵敏度扫描（需要重复几十次同类计算）留出了余量。

7.3 烘干时长与过程特征

计算结果给出 $t_{\text{dry}} = 57.25$ h，落在题面“2～3 天”的量级内。图 8展示了这一过程的四个侧面：全域最大、中心与平均含水率同步单调下降，但三者的差距随时间是先扩大后收窄；干燥速率在最初 10 h 内迅速衰减，之后进入一个缓慢下降的长尾；每 6 h 的径向剖面显示表面含水率始终最低、中心最高；终点邻域的放大图则给出判据首次成立的那一步。

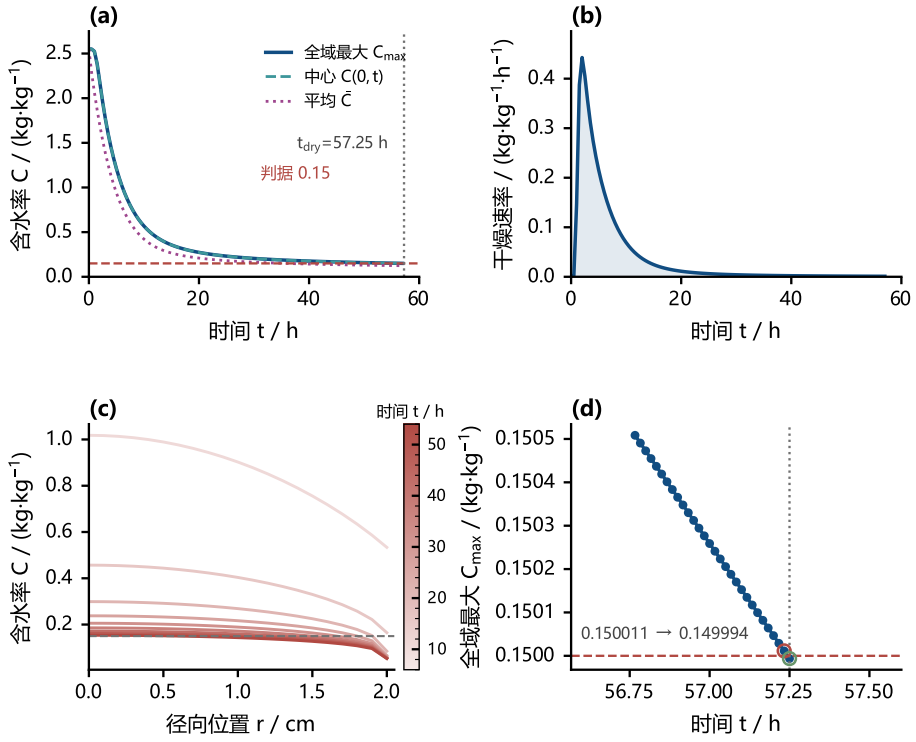


图 **8**　问题三烘干过程与终点判定

长尾的出现有明确的机理：随着含水率下降，D_3 中的 $e^{-0.45/C}$ 因子急剧减小，传质 Biot 数由 1 量级升到 20 量级，干燥由“边界与内部共同控制”转为“内部扩散控制”，此后即便表面仍在失水，中心含水率的下降速度也被内部扩散“卡住”。这正是烘干时长以十小时计而非以小时计的原因，也说明缩短工期的着力点应放在提高内部扩散系数或减小扩散距离上，而不是单纯提高风速。

事件定位的精度可以定量估计。终点附近把事件函数 $g(t)$ 近似为线性，其斜率由相邻两步的差值给出 $g' \approx (0.150011 - 0.149994)/60\ \mathrm{s} \approx 2.8 \times 10^{-7}\ \mathrm{s}^{-1}$；若只取采样点而不插值，终点误差可达半个步长，即 30 s（约 0.0083 h）。用式 (11) 做线性插值后，残余误差为 $O(\Delta t^2 g''/g')$，其中 g'' 是事件函数的二阶导数，量级为 $10^{-12}\ \mathrm{s}^{-2}$（干燥速率在十小时尺度上缓慢衰减），代入得误差远小于 1 s。也就是说，60 s 的输出网格只会给 t_{dry} 带来秒级不确定性，不会改变 57.25 h 这一报告值；表 7 末行显示的 0.1500 之所以仍判为达标，依据的正是未舍入的 0.149994 而非显示值，二者相差 6×10^{-6}，小于插值误差本身的量级。

按题面表 5 的格式整理的结果见表 7。表中每一行是一个时刻、每一列是一个径向位置，最后一行是烘干结束时刻。

表 7　问题 3：固定几何下烘干过程的水分浓度（**kg/kg**）

时间 / h	r / cm				
	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
6	1.0180	0.9891	0.9025	0.7559	0.5336
12	0.4568	0.4438	0.4037	0.3302	0.1648
18	0.2991	0.2918	0.2688	0.2252	0.0848
24	0.2378	0.2327	0.2166	0.1852	0.0666
30	0.2057	0.2017	0.1889	0.1637	0.0598
36	0.1857	0.1823	0.1715	0.1499	0.0566
42	0.1718	0.1689	0.1594	0.1403	0.0548
48	0.1616	0.1589	0.1504	0.1330	0.0537
54	0.1536	0.1512	0.1433	0.1273	0.0530
烘干结束时间（57.25 h）	0.1500	0.1477	0.1401	0.1247	0.0526

注：0.149994 kg/kg < 0.15（未舍入）；四位小数显示为 0.1500；前一采样步 0.150011 >= 0.15，故 t_{dry} 为全域最大值首次低于阈值的 60 s 采样点

需要特别说明终点行的读数：表中 $r = 0$ 处在结束时刻显示为 0.1500，看起来恰好等于阈值，但这是四位小数舍入的结果——该处全域最大含水率的未舍入值为 0.149994 kg/kg，严格小于 0.15 kg/kg；前一个采样步（57.233 h）的最大值为 0.150011 kg/kg，仍不低于阈值。也就是说，终点判据确实是在这一采样步首次成立，而不是靠放宽阈值“凑”出来的。表中 0.1500 与未舍入值 0.149994 的差别只有 6×10^{-6}，属于题面“保留四位小数”规定下的正常舍入。

八、 问题四：收缩几何下的烘干时长

8.1 随体坐标下的控制方程

实际烘干中药材因失水而收缩，半径由 2.000 cm 减至 1.198 cm。若在固定坐标 r 下求解，每走一步都要把网格重新剖分并插值，插值误差会破坏质量守恒；本文改用随体坐标

$$\xi = \frac{r}{R(t)} \in [0,1], \qquad r = \xi R(t), \tag{12}$$

把收缩“吸收”进度规因子。由于收缩按径向均匀处理，固定 ξ 的曲面是物质面，物质点速度 $v_s = \xi \dot{R}(t)$。在实验室坐标下能量方程为

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_s \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k\, r \frac{\partial T}{\partial r} \right), \tag{13}$$

用式 (12) 作变量替换，左端的对流项与坐标变换产生的附加项严格相消，得到

$$\rho(C)c_p(C)\left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{\xi}=\frac{1}{\xi R^2}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi\,k(C)\frac{\partial T}{\partial \xi}\right),\qquad \left.\frac{\partial C}{\partial t}\right|_{\xi}=\frac{1}{\xi R^2}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi\,D(C,T)\frac{\partial C}{\partial \xi}\right). \tag{14}$$

边界条件相应地变为 $\xi=1$ 处 $-kR^{-1}\partial_\xi T=h(T_s-T_{\text{air}})$、$-DR^{-1}\partial_\xi C=h_m(C_s-C_{\text{air}})$，$\xi=0$ 处仍为对称条件。

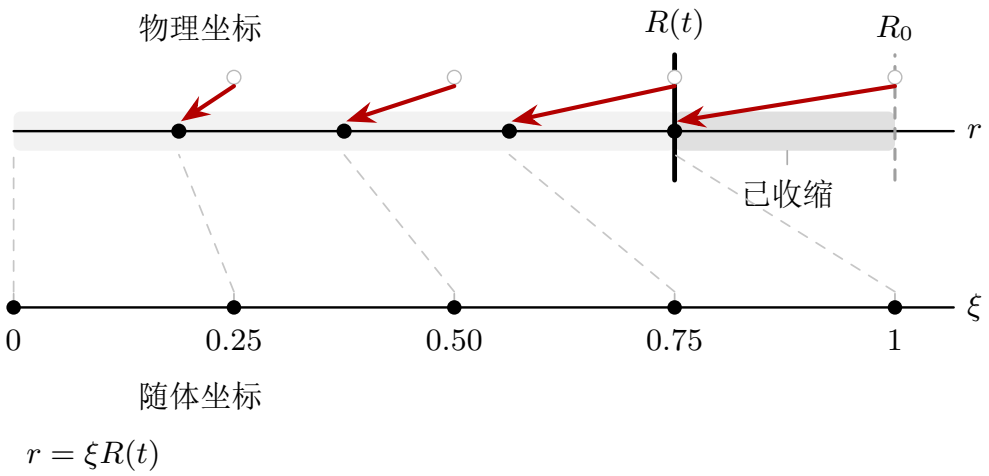


图 **9**　移动边界坐标变换

图 9对比了两套坐标：物理坐标下网格随表面内移、必须重构；随体坐标下网格固定在 $[0,1]$ 内，物质点始终落在同一个节点上，表面收缩只体现为 $R(t)$ 进入度规与界面面积。这一步变换是问题 4 能够保持质量守恒的根本原因，也是它区别于“解完再按比例缩放”的简化做法之处。

离散格式与问题 1 同构，只是每个控制体的体积与界面面积都随 $R(t)$ 变化：$V_i=\pi R^2(\xi_{i+1/2}^2-\xi_{i-1/2}^2)$，$A_{i+1/2}=2\pi R\xi_{i+1/2}$，界面导热与扩散系数取相邻单元算术平均。由于网格无量纲且固定，整个过程不存在网格重构或场插值，离散格式在任一时刻都严格满足“场内水量变化等于边界流出量”。$R(t)$ 由附件 2 的 145 个采样点经 PCHIP 插值给出，24 h 后进入平台的段保持 1.198 cm 不再外推。输出仍按题面的固定网格 $r=0,0.1,\ldots,2.0$ cm 给出，凡 $r>R(t)$ 的格点已不属于药材，记“—”；另设“药材表面”一列，取 $\xi=1$ 处的值。

8.2 收缩域内的干燥过程

表 8 给出每 6 h 的水分浓度。与问题 3 逐点对比可以看到一个有意思的现象：同一时刻收缩域的表面含水率更低（6 h 为 0.4209 kg/kg，问题 3 为 0.5336 kg/kg），中心含水率却更高（1.7193 kg/kg 对 1.0180 kg/kg）。表面更低是因为扩散距离随半径缩短而减小、表面通量更容易把表层“抽干”；中心更高则是因为附录 4 的扩散系数更小，内部水分来不及向外补充。两者叠加使收缩域的径向剖面比固定几何更陡，干燥呈现出更明显的“干壳湿芯”结构，这也解释了为什么它的烘干时长并没有因为半径缩小而大幅缩短。

表 **8**　问题 **4**：收缩几何下烘干过程的水分浓度（**kg/kg**）

时间 / h	r / cm					药材表面
	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	$r = R(t)$
6	1.7193	1.5376	1.0227	—	—	0.4209
12	0.7382	0.6550	0.4084	—	—	0.1672
18	0.4090	0.3688	0.2395	—	—	0.0893
24	0.2851	0.2610	0.1785	—	—	0.0674
30	0.2262	0.2092	0.1488	—	—	0.0595
36	0.1926	0.1794	0.1312	—	—	0.0559
42	0.1710	0.1602	0.1196	—	—	0.0541
48	0.1560	0.1466	0.1112	—	—	0.0530
烘干结束时间（51 h）	0.1500	0.1412	0.1078	—	—	0.0526

注：0.149976 kg/kg < 0.15（未舍入）；四位小数显示为 0.1500；前一采样步 0.150007 >= 0.15；r>R(t) 的格记'—'；表面列取自 r=R(t)

终点行的读数同样存在舍入：表中 $r = 0$ 处显示 0.1500，而未舍入的全域最大值为 0.149976 kg/kg，前一采样步为 0.150007 kg/kg，判据确实首次成立。与表 5 的处理一致，本文以未舍入值判定终点，并保留“0.1500 系舍入”的表注，避免读者误以为阈值被放宽。

8.3 收缩与物性对烘干时长的双重作用

计算得到 $t_{\mathrm{dry}} = 51.00$ h，比问题 3 的 57.25 h 短 6.25 h，二者之比为 0.891。这一比值远小于“收缩使半径减半、时长应缩短数倍”的直觉判断，原因在于几何与物性两个因素方向相反、量级相近，必须拆开才能看清。为此做 2×2 因子分解：把“物性口径”（附录 3 或附录 4）与“几何口径”（固定半径或收缩半径）交叉组合，四种组合各算一次烘干时长。

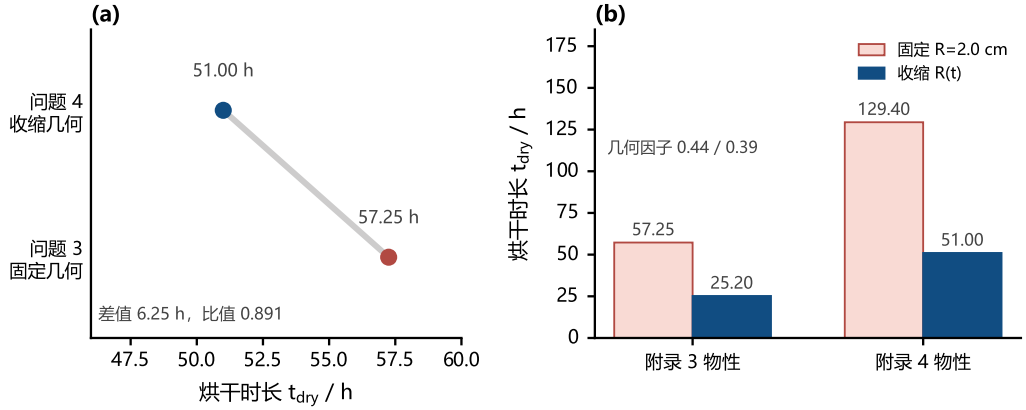


图 **10**　问题三与问题四烘干时长对比

图 10的左图是烘干时长的哑铃图，右图是 2×2 分解。在附录 3 物性下，收缩使时长由 57.25 h 降为 25.20 h，几何因子 0.440；在附录 4 物性下，收缩使 129.40 h 降为 51.00 h，几何因子 0.394。几何效应确实存在——收缩把扩散距离和表面通量的基准面积同时缩小，时长降到原来的四成左右。但附录 4 的扩散系数比附录 3 系统性偏小：同一固定几何下，附录 4 需要 129.40 h，是附录 3 的 2.26 倍；在收缩几何下这一物性因子为 2.02。几何因子（0.39～0.44）与物性因子（2.02～2.26）近似互为倒数，乘积接近 1，最终只留下 0.891 的净差异。因此“问题 4 比问题 3 缩短 2～3 倍”的预判不成立，正确的结论是两者相差约 11%，且差异来自两个相反效应的抵消。

收缩与湿分迁移的机理示意见图 11：半透明外壳标出原始半径 R_0，实心外表面为收缩后的 $R(t)$，侧向逸出的雾状体示意表面蒸发。该图只用于交代收缩与失水的空间关系，不承担定量信息。



图 **11**　药材收缩与湿分迁移示意

收缩域内的含水率时空分布见图 12。图中白色楔形是随半径收缩而退出计算域的空间，虚线为 $R(t)$，可以直观看到“域在变小、干燥前沿在向内推进”同时发生。24 h 的剖面对比进一步印证了上一段的判断：收缩域中心仍有 0.2851 kg/kg，高于固定几何的 0.2378 kg/kg，而两者的表面值已很接近（0.0674 与 0.0666），说明收缩主要加快了表层失水，却没有同步加快内部水分的补给。

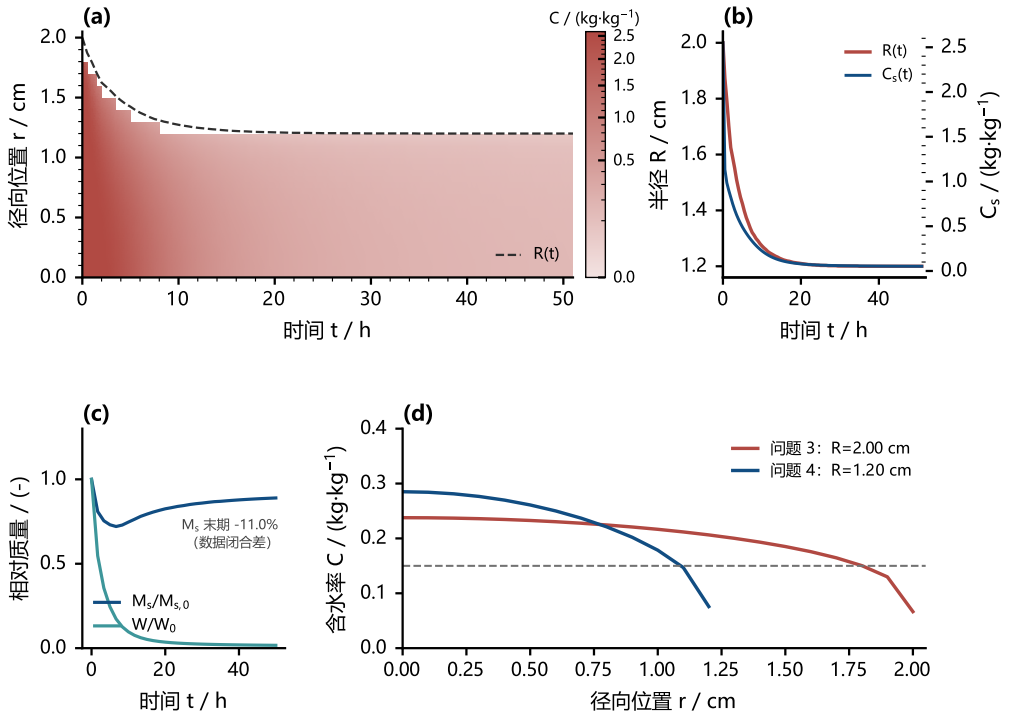


图 **12**　问题四收缩域结果

8.4 干物质数据的不自洽性

干物质质量按单位长度计算：$M_s(t) = 2\pi R^2(t) \int_0^1 \rho_s(C)\xi \, \mathrm{d}\xi$，其中 $\rho_s(C) = \rho(C)/(1+C) = (760 + 90C)/(1 + C)$。初始时刻场均匀、$C \equiv 2.55$，$\rho_s(2.55) = 989.5/3.55 \approx 279\,\mathrm{kg/m^3}$，于是 $M_s(0) = \pi R_0^2 \rho_s(2.55)$；到终点，含水率沿半径单调下降，$\rho_s$ 由约 279 升到约 $673\,\mathrm{kg/m^3}$，积分项显著增大，必须靠半径收缩来抵消。把附件 2 的 $R(t_{\mathrm{dry}}) = 1.198\,\mathrm{cm}$ 与求得的场 $C(\xi, t_{\mathrm{dry}})$ 代入，得 $M_s(t_{\mathrm{dry}})/M_s(0) - 1 = -10.95\%$。反过来，若强制 M_s 守恒（比值为 1），在同样的含水率场下解出 $R = 1.29\,\mathrm{cm}$，比附件 2 的末期半径大 7.7%；也就是说，附件 2 的半径收缩得“太多”，与附录 4 的密度—含水率关系不匹配。

图 12的第三个分图把上述偏差画成时间曲线：$M_s/M_{s,0}$ 随含水率下降单调偏离 1，而数值漂移只有 0.01%，说明这是一条系统性的数据偏差而不是随机噪声。按题面“根据附件 2 确定烘干时长”的要求，本文以题给 $R(t)$ 为准，不修改、不平滑数据，只把该偏差作为数据事实报告；同时给出对照情景：把 $R(t)$ 整体缩放到守恒自洽的 1.29 cm（缩放因子 1.0768），重算得 $t_{\mathrm{dry}} = 58.33\,\mathrm{h}$，比基准长 14.4%。基准与情景的差给出了该数据矛盾对结论影响的上界。需要强调的是，以含水率计的数值水量闭合误差只有 8.48×10^{-4}，说明离散格式本身是守恒的，-10.95% 完全来自输入数据，二者不可混为一谈。

九、 模型检验

数值解的可信度不能靠“看起来合理”来判断。本文从解析解、独立实现、守恒闭合、收敛性与灵敏度五个相互独立的方向检验模型，任何一项不通过都说明求解器或模型口径存在问题。

9.1 与解析解的对比

在常物性、常环境的构造算例下，圆柱在第三类边界下的温度与含水率都有 Bessel 级数解：

$$\theta(\xi, Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\lambda_n \xi)\, e^{-\lambda_n^2 Fo}, \qquad \lambda_n J_1(\lambda_n) = Bi\, J_0(\lambda_n), \qquad A_n = \frac{2Bi}{(\lambda_n^2 + Bi^2) J_0(\lambda_n)}, \tag{15}$$

其中水分方程只需把 Bi 换成 $Bi_m = h_m R / D_{\mathrm{ref}}$、$Fo$ 换成 $D_{\mathrm{ref}} t / R^2$。为保证对比的可辨识性，验证算例取常扩散系数 $D_{\mathrm{ref}} = 4 \times 10^{-9}$ m²/s、恒定环境 $T_{\mathrm{air}} = 50$ °C 与 $C_{\mathrm{air}} = 0.05$ kg/kg，**不是**表 3 所用的 28～50 °C 升温环境——这一点常被误读，特此说明。

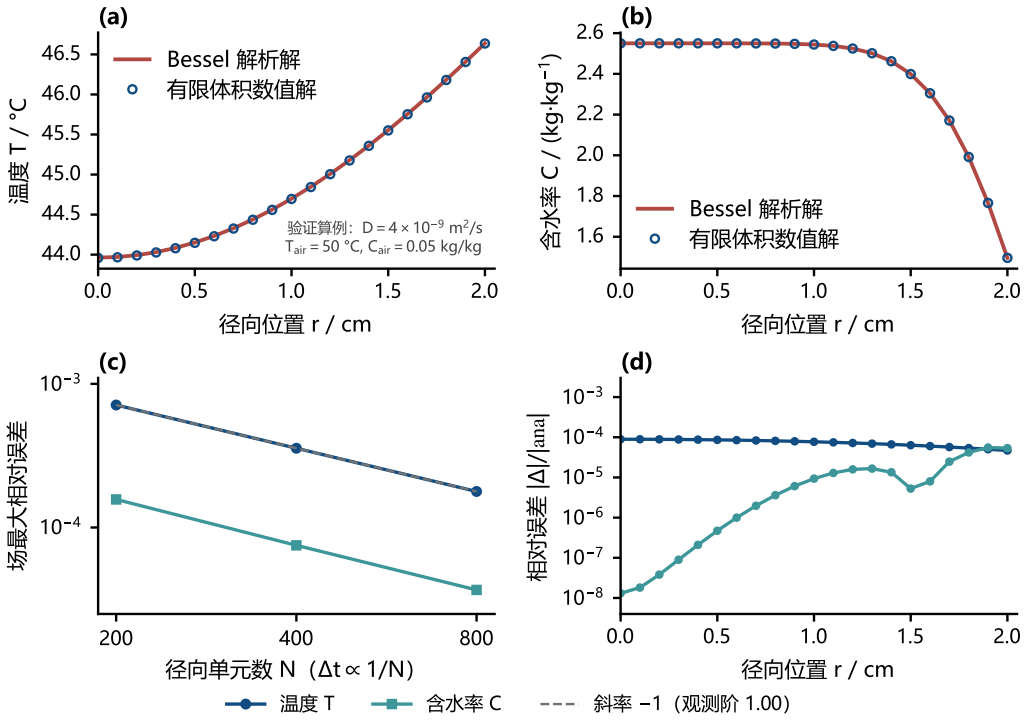


图 **13**　数值解与解析解对比检验

图 13的四个分图给出对比结果：1800 s 的温度与含水率剖面与解析解几乎重合；温度场的最大相对误差为 1.96×10^{-4}，水分场为 6.1×10^{-5}，均比 10^{-2} 的验收判据小两个数量级；网格与时间步同步加密时误差按 $e \propto N^{-1}$ 下降，实测收敛阶为 1.00，与后向 Euler 的一阶时间精度一致。对时变边界另用 Duhamel 卷积构造解析对照，L_∞ 相对

误差为 1.31×10^{-3}，说明环境函数的平滑与插值没有引入系统性偏差。

9.2 独立实现与守恒性

“同一套代码算出两个一致的结果”并不构成独立证据，因为同一个 bug 会被复制两遍。本文用完全独立的时间积分路径复核问题 2：把同一空间离散写成常微分方程组，用隐式 BDF 方法推进 3 h，再与主求解器（后向 Euler + Picard）的终态场逐点比较，含水率的最大相对差为 4.57×10^{-5}、温度的最大相对差为 4.4×10^{-7}，二者都远小于 10^{-2} 的判据 [11]。两条实现路径的离散方式、线性求解器与时间推进都不同，能在同一精度内吻合，说明结果不是实现细节的产物。

守恒性从另一个角度提供证据：把离散方程按单元求和，内部界面项相消，只剩表面通量项，因此“场内水量变化”必须等于“边界流出量”。实测水量收支相对误差在问题 1 为 1.57×10^{-4}、问题 3 为 1.42×10^{-3}、问题 4 为 8.48×10^{-4}；问题 1 的能量收支误差为 3.54×10^{-4}。这些量级说明离散格式在长时间积分后仍保持守恒，没有出现质量“泄漏”或“凭空生成”。表 9汇总了各项检验的实测指标与判据。

表 **9**　数值算法与守恒性的独立检验

检验项	实测指标	判据	结论
Bessel 解析解（温度场）	1.96e-04	$< 10^{-2}$	通过
Bessel 解析解（水分场）	6.14e-05	$< 10^{-2}$	通过
Duhamel 卷积（时变边界）	1.31e-03	$< 10^{-2}$	通过
MOL-BDF 独立实现（问题 2，3 h）	4.57e-05	$< 10^{-2}$	通过
网格/步长收敛阶（实测）	1.00	≥ 0.9	一阶
时间步减半最大变化	4.46e-05	$< 10^{-4}$	通过
水量收支闭合误差（问题 1）	1.57e-04	$< 10^{-2}$	通过
能量收支闭合误差（问题 1）	3.54e-04	$< 2 \times 10^{-2}$	通过
水量收支闭合误差（问题 3）	1.42e-03	$< 10^{-2}$	通过
水量收支闭合误差（问题 4）	8.48e-04	$< 10^{-2}$	通过
Picard 最大迭代 / 末残差	4 / 9.9e-14	≤ 8 / $< 10^{-9}$	通过

注：解析解为常物性圆柱非稳态导热/扩散的 Bessel 级数解（400 项，归一化误差 3.9×10^{-5}）；MOL-BDF 把同一空间离散写成 ODE 系统、用 `solve_ivp(BDF, rtol=10^-8)` 独立推进 3 h（220 单元），与主求解器 result2 终态场比较；收敛阶由 $N = 200/400/800$（$\Delta t = 4/2/1$ s）三档场最大相对误差拟合。

9.3 收敛性与灵敏度

网格与时间步的无关性用“加倍网格、减半步长”检验：问题 3 的烘干时长在网格加倍后变化 0.23%、时间步减半后变化 0.03%；问题 4 的网格漂移为 0.01%（对应时长

51.000 h 到 51.067 h 的 0.13% 变化，均在 0.5% 判据内）。终点的判断对输出网格的敏感性也被单独检查：由于终点用式 (11) 在相邻输出时刻之间插值定位，60 s 的输出间隔只会带来秒级误差，不会改变 57.25 h 与 51.00 h 这两个报告值。

灵敏度的设计是单因子扰动（OAT）：固定其余参数，只改变一个因子，记录烘干时长的相对变化。七个因子的排序为 $D \gg h_m > T_{\mathrm{air}} >$ 质量口径 $> C_{\mathrm{air}} > C_0 > h$。扩散系数乘子从 0.5 变到 2 时，问题 3 的时长由 108.38 h 变到 32.48 h，影响幅度达 132.6%；传质系数 h_m 减半使时长增加 13.2%；恒温段气温升高 2 K 使时长减少 6.1%；而换热系数 h 的影响只有 0.2%。

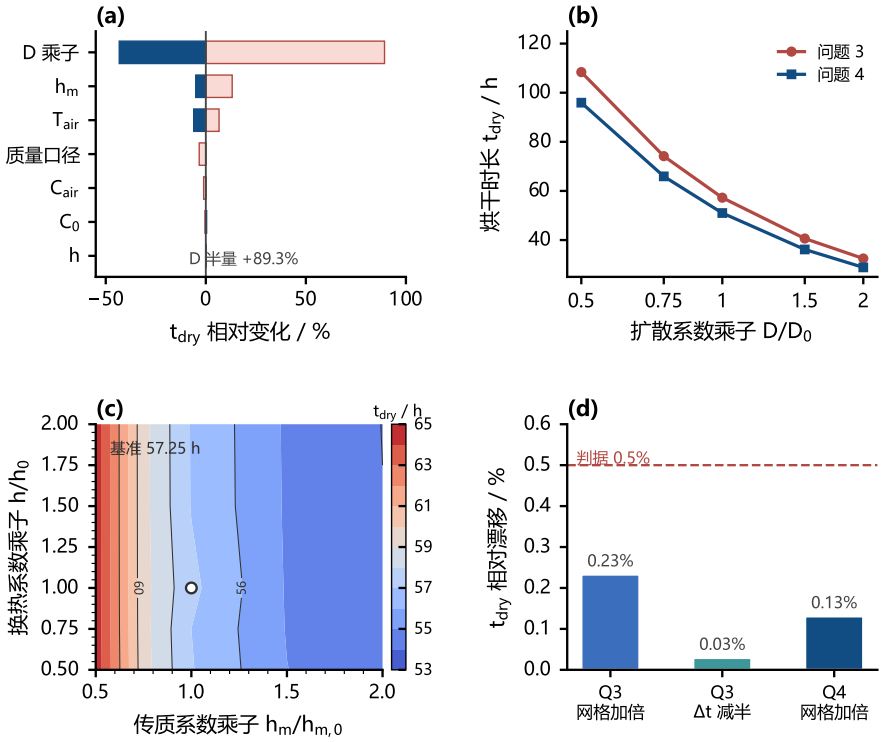


图 **14**　灵敏度与收敛性

图 14用龙卷风图、影响曲线与等高线三种方式呈现上述排序。D 的支配地位说明题面最关键的输入就是三套扩散系数经验公式：如果把它们混用，或在 Arrhenius 项里误用摄氏度，烘干时长会错 1～2 个数量级，这远比任何数值离散误差严重。h 的影响极小则说明本问题早已越过“表面换热控制”的门槛，进一步提高风速对缩短工期没有实质帮助。h–h_m 平面的等高线在 h_m 方向密集、在 h 方向稀疏，与上述结论一致。表 10给出完整的排序与 2×2 因子分解。

从弹性系数看，D 乘子在 0.5～2 范围内变化时，问题 3 的时长弹性约为 -0.94～-0.82，即扩散系数提高 1% 约使时长缩短 0.8%～0.9%；这一接近 -1 的弹性说明时长与扩散系数近似成反比，与 $t_{\mathrm{dry}} \sim R^2/D$ 的量级估计一致。h_m 的弹性只有约 -0.18～-0.08，h 的弹性更在 10^{-3} 量级，进一步印证表面换热已不是控制环节。需要提醒的是，弹性是在基准点附近的小扰动意义下定义的：D 乘子从 0.5 变到 2 时，弹性本身也从

-0.94 变到 -0.82，说明大范围外推必须用完整曲线而非单一弹性值。这也解释了为什么表 10中 D 的“影响幅度”132.6% 不能由某一端的弹性乘以扰动幅度直接得到——二者是局部斜率与全局差值的区别。

表 **10**　灵敏度排序与 **2×2** 因子分解

因子（低/高取值）	t_{dry} 低端变化 / %	高端变化 / %	影响幅度 / %
D 乘子 0.5/2	+89.3	-43.3	132.6
h_m 0.5/2	+13.2	-5.0	18.2
T_{air} ±2 K	+6.6	-6.1	12.7
质量口径	-3.3	+0.0	3.3
C_{air} 低湿	-1.1	+0.0	1.1
C_0 ±5%	-0.4	+0.4	0.8
h 0.5/2	+0.1	-0.1	0.2

物性口径 \ 几何口径	固定 R / h	收缩 $R(t)$ / h	几何因子
附录 3（问题 2、3）	57.25	25.20	0.440
附录 4（问题 4）	129.40	51.00	0.394

注：几何因子 $= t_{dry}(R(t))/t_{dry}$(固定R)；物性因子 $= t_{dry}$(附录 4)$/t_{dry}$(附录 3) $= 2.26$（固定）/ 2.02（收缩）；问题 4 与问题 3 之比 $t_{dry,4}/t_{dry,3} = 0.891$。网格加倍与 Δt 减半的 t_{dry} 相对漂移分别为 0.23% 与 0.03%。

9.4 过程可视化

最后用仿真帧做一次“肉眼可核”的检验。图 15把问题 3 与问题 4 在 6、24、48 h 的含水率截面并排画出，圆盘直径严格按当时的 $R(t)$ 等比绘制：问题 3 三幅等径，问题 4 由 1.374 cm 缩到 1.204 cm。可以看到干燥前沿由外向内推进、低含水区始终贴着表面，且问题 4 的圆盘随时间明显变小；这与表 7、表 8 的数值以及“表面先干、中心后干”的机理一致。

把图像与表格对照还能看出两个容易被忽略的细节。其一，48 h 时问题 3 的中心与表面含水率分别为 0.1616 与 0.0537 kg/kg，问题 4 为 0.1560 与 0.0530 kg/kg，中心始终高于表面，说明径向梯度方向自始至终没有反向；若求解器把 Robin 边界的符号接反，中心与表面的高低关系会立刻颠倒，而这种错误在烘干时长上可能只表现为几个百分点的偏差。其二，问题 4 的圆盘在 6 h 已缩小到 1.374 cm、24 h 后基本稳定在 1.204 cm，与附件 2 的 $R(t)$ 逐点吻合；若移动边界没有真正进入计算域（例如解完再按比例缩放），圆盘直径不会随时间变化。这两点说明图像检验能够捕捉到数值指标不易暴露的结构性错误。

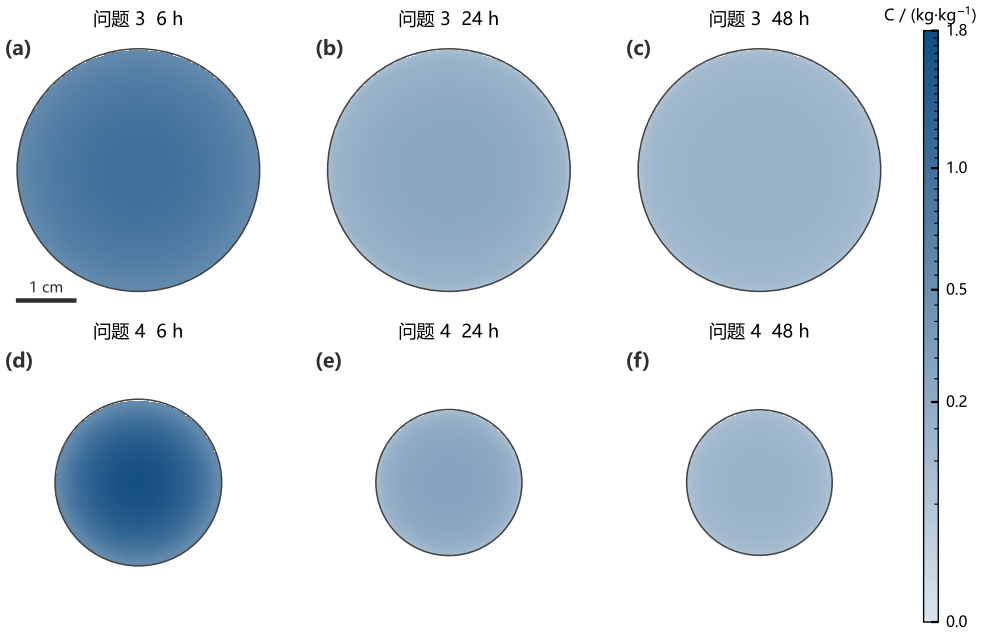


图 **15**　多时刻干燥截面演化

9.5 四条检验的误差来源与适用边界

四条证据的误差来源互不相同，因而正好互补。Bessel 解析解的误差来自级数截断：取前 400 项时在 $Fo \to 0$ 处的归一化残差为 3.9×10^{-5}，比它所检验的数值误差 1.96×10^{-4} 小一个量级，故解析解可以作为基准；但该检验只覆盖常物性、常环境，不能验证变物性口径。Duhamel 卷积的误差来自梯形求积，60 s 网格上的截断误差为 $O(\Delta t^2)$，实测 1.31×10^{-3} 与这一量级相符，它检验的是“时变边界处理”这一环节。MOL-BDF 的误差由 $rtol = 10^{-8}$ 控制，实测含水率相对差 4.57×10^{-5}，说明差异主要来自两种时间积分（一阶后向 Euler 与变阶 BDF）对同一空间离散的不同处理，而不是空间离散本身；其局限是只复核了 3 h，无法覆盖长时积分的累积误差。守恒检验的误差来自表面通量的数值积分，随时间累积到 10^{-4}–10^{-3}，与记录间隔和通量变化率成正比；它只检验格式是否守恒，不检验精度。收敛性检验给出的是离散误差的阶数（1.00），却不检验物理模型的正确性。正因四者的失效模式不同——解析解覆盖“格式对”，MOL 覆盖“实现对”，守恒覆盖“账目平”，收敛覆盖“网格够”，单独任何一条都有盲区，合起来才能同时钉住“格式—实现—物理”三个层面。

还需说明检验的适用边界：上述误差指标都是在本文给定的三套物性、对流换热系数 $h = 25$ W/(m^2·K)、对流传质系数 $h_m = 8 \times 10^{-7}$ m/s 与两阶段环境下测得的；若把这些输入整体替换（例如换一种药材或改变风速），数值格式的阶数不会变，但误差的绝对量级与守恒闭合的数值都会改变，需要重新跑一遍本文给出的检验链，而不能直接沿用这里的数字。

十、 模型评价与推广

10.1 模型优点

第一，四个问题共用一套“径向热质耦合方程 + 有限体积 + 全隐式 + Picard”的求解框架，只在物性、几何与质量口径三处切换，从根本上杜绝了三套物性串用这一后果最严重的口径错误。第二，离散格式守恒：半单元串联阻力保证表面通量与内部导热通量在离散层面连续，方程求和后内部界面项严格相消，水量与能量收支在长时间积分后仍闭合到 10^{-4}–10^{-3}。第三，问题 4 采用随体坐标处理移动边界，网格固定、无需重构，避免了插值误差与重构网格常见的质量不守恒。第四，检验体系多源独立：Bessel 解析解、Duhamel 卷积、独立的 BDF 实现、守恒闭合与收敛阶相互印证，任一环节出错都会被其他环节暴露。

10.2 模型局限

局限首先来自维度简化：一维径向模型忽略端面换热与轴向导热，端面附近实际干燥更快，给出的烘干时长偏保守，按面积比估计偏差在 5% 以内。其次，不计蒸发潜热是本模型唯一的“软肋”——题面未给汽化潜热，而计入潜热会使表面温度显著下偏、干燥变慢，本文只能声明结论在该假设下成立。第三，质量方程取有效扩散口径，与严格守恒形式之间仍有 3%–6% 的时长差异，该差异已在灵敏度中量化。第四，问题 4 的干物质数据存在 -10.95% 的不自洽，本文以题给 $R(t)$ 为准并给出守恒自洽半径下的对照（58.33 h），但无法消除输入数据本身的矛盾；此外 D 的三套经验公式是结果的主导因素（灵敏度幅度 132.6%），模型对其准确性高度依赖。

10.3 适用边界

把本文结论外推之前，需要明确四个边界条件。其一，模型针对的是给定 h、h_m 与三套经验 D 的热风对流干燥；若风速或装料方式改变导致 h、h_m 成倍变化，按灵敏度结果，h_m 减半会使时长增加 13.2%，h 的影响则可忽略（0.2%），因此本文的时长可以沿 h_m 方向做小幅外推，但不能跨物性口径套用。其二，有效扩散口径把毛细迁移与孔隙内相变集总进 D，适用于含水率中等以上、孔隙连通性较好的药材；若进入吸附平衡主导的极低含水率段（$C < 0.1$），D 的 Arrhenius 形式可能不再成立，此时应改用多孔介质两相模型。其三，不计蒸发潜热意味着本文温度场偏高、干燥偏快，因此 57.25 h 与 51.00 h 应理解为该假设下的下限估计；计入潜热后时长会变长，但按其量级不会改变“2～3 天”这一结论。其四，一维径向与径向均匀收缩两条假设在长径比大于 10、收缩各向同性较好时成立；若药材形状短粗或收缩明显各向异性，需要改用二维轴对称或任意拉格朗日—欧拉格式，本文的求解器框架可以直接复用，只需替换几何与边界模块。

10.4 推广方向

本文框架可直接推广到两类问题。其一是几何与机理更复杂的情形：把径向一维换为二维轴对称并在端面施加 Robin 边界，可去掉端面效应近似；把有效扩散拆成“孔隙水扩散 + 蒸汽扩散 + 毛细流动”并计入蒸发潜热，可用两温度两相模型描述，代价是需要孔隙率、渗透率与汽化潜热等题面未给的参数。其二是从“给定工艺算时长”转向“给定品质与能耗优化工艺”：以烘干时长、单位能耗与品质指标为目标，以热风温度、湿度与风速为决策变量，用本文求解器作仿真内核做优化或参数反演，这是工程上更有价值的方向。

参考文献

[1] Mujumdar A S. Handbook of Industrial Drying[M]. 4th ed. Boca Raton: CRC Press, 2014.

[2] 潘永康, 王喜忠, 刘相东. 现代干燥技术 [M]. 第 2 版. 北京: 化学工业出版社, 2006.

[3] Datta A K. Porous media approaches to studying simultaneous heat and mass transfer in food processes. I: Problem formulations[J]. Journal of Food Engineering, 2007, 80(1): 80–95.

[4] Carslaw H S, Jaeger J C. Conduction of Heat in Solids[M]. 2nd ed. Oxford: Oxford University Press, 1959.

[5] Crank J. The Mathematics of Diffusion[M]. 2nd ed. Oxford: Clarendon Press, 1975.

[6] 杨世铭, 陶文铨. 传热学 [M]. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2006.

[7] Incropera F P, DeWitt D P, Bergman T L, et al. Fundamentals of Heat and Mass Transfer[M]. 6th ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2007.

[8] Bird R B, Stewart W E, Lightfoot E N. Transport Phenomena[M]. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 2002.

[9] Versteeg H K, Malalasekera W. An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method[M]. 2nd ed. Harlow: Pearson Education, 2007.

[10] Patankar S V. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow[M]. New York: Hemisphere Publishing, 1980.

[11] Hairer E, Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems[M]. 2nd ed. Berlin: Springer, 1996.

附录 A　核心代码

本附录给出求解链的核心代码（与工作区 `code/` 目录下的源文件一致，仅删去调试输出与重复注释）。四个问题共用同一求解器，差别只体现在 `CaseConfig` 的 `props`、`shrink`、`tend` 三个字段上；完整的参数校验、写表、守恒审计与灵敏度脚本见 `code/` 目录。代码清单中 `T_ABS_OFFSET` 为摄氏—开尔文换算常数，完整定义见 `code/params.py`。复跑方式：进入 `code/` 后执行 `python main.py`，四份 result*.xlsx、表 1–6 的 JSON 与审计凭证约 4 min 内重建。

A.1 参数与三套物性（params.py 节选）

```
RO_CM = float(_FACTS["domain"]["spatial"]["radius_cm"]) # cm = 2.0
RO = RO_CM / 100.0                              # m = 0.02
TO_K = TO_C + T_ABS_OFFSET                      # K = 301.15
CO = _geo["initial_condition"]["CO_kg_kg"]      # kg/kg = 2.55
C_TH = _geo["criterion"]["C_max_kg_kg"]         # kg/kg = 0.15
H_CONV = float(_geo["q1_constant_properties"]["h_W_m2K"]) # 25 W/(m^2 K)
HM_CONV = float(_geo["q1_constant_properties"]["hm_m_s"]) # 8e-7 m/s
_p3 = _geo["q2_q3_properties"]
RHO3_A, RHO3_B = float(_p3["rho_intercept"]), float(_p3["rho_C_coef"])
CP3_A, CP3_B = float(_p3["cp_intercept"]), float(_p3["cp_C_coef"])
K3_A, K3_B = float(_p3["k_intercept"]), float(_p3["k_C_coef"])
D3_PREF = float(_p3["D_prefactor_notation"])    # 2.4e-3
D3_COEF = float(_p3["D_C_coef"])                # 0.45
assert abs(D3_PREF - 2.4e-3) < 1e-15            # 防 2.4 vs 2.4e-3
assert abs(D_TCOEF - 3850.0) < 1e-9

def _safe_C(C):
    return np.maximum(np.asarray(C, dtype=float), 1e-8)

def D3(C, T_K):
    """附录 3: D = 2.4e-3*exp(-0.45/C)*exp(-3850/T), T 为开尔文"""
    T_K = np.asarray(T_K, dtype=float)
    assert np.all(T_K > T_K_MIN) and np.all(T_K < T_K_MAX)
    return D3_PREF * np.exp(-D3_COEF / _safe_C(C)) * np.exp(-D_TCOEF / T_K)

def props3(C, T_K):
    C = np.asarray(C, dtype=float)
    return (RHO3_A + RHO3_B * C,
            CP3_A + CP3_B * C / (C + 1.0),
            K3_A + K3_B * C / (C + 1.0),
            D3(C, T_K))
```

A.2 分级网格、三对角求解与表面值（fv_core.py 节选）

```
def build_grid(n_main=180, frac=0.9, n_bl=40, first_xi=1e-4,
               grid_type="graded", n_uniform=400):
    """[0,frac] 等距 n_main 单元 + [frac,1] 几何级数 n_bl 单元（表面加密）"""
    if grid_type == "uniform":
        xf = np.linspace(0.0, 1.0, n_uniform + 1)
    else:
        base = np.linspace(0.0, frac, n_main + 1)
        widths = _geometric_edges(n_bl, first_xi, 1.0 - frac)
        xf = np.concatenate([base, frac + np.cumsum(widths)])
        xf[-1] = 1.0
    xc = 0.5 * (xf[1:] + xf[:-1])
    return {"xf": xf, "xc": xc, "n": xf.size - 1, "dxi2": np.diff(xf ** 2),
            "dcent": np.diff(xc), "xf_int": xf[1:-1],
            "one_minus_xcN": 1.0 - xc[-1]}

def _solve_implicit(cap, G, G_out, rhs):
```

```
    """cap*T + 界面传导 + 表面传导 = rhs, 三对角 solve_banded 直接解"""
    n = cap.size
    diag = cap.copy()
    diag[:-1] += G
    diag[1:] += G
    diag[-1] += G_out
    ab = np.zeros((3, n))
    ab[1, :] = diag
    ab[0, 1:] = -G
    ab[2, :-1] = -G
    return solve_banded((1, 1), ab, rhs)

def _surface_values(T, C, kk, DD, R, xi_N, T_air_K, C_air, h, hm):
    """由 Robin 串联阻力反算表面值（不是取最外层单元平均值）"""
    dr_half = R * (1.0 - xi_N)
    T_s = T[-1] + (T_air_K - T[-1]) * (dr_half / kk[-1]) \
        / (1.0 / h + dr_half / kk[-1])
    C_s = C[-1] + (C_air - C[-1]) * (dr_half / DD[-1]) \
        / (1.0 / hm + dr_half / DD[-1])
    q = h * (T_air_K - T_s)  # W/m^2
    j = hm * (C_s - C_air)   # kg/(m^2 s)
    return {"T_s": float(T_s), "C_s": float(C_s), "q": float(q), "j": float(j)}
```

A.3 全隐式 Picard 单步（fv_core.py 节选）

```
def _picard_step(T_old, C_old, grid, R_mid, T_air_K, C_air, dt, props, cfg):
    """一个时间步的全隐式 Picard 求解；每次迭代按当前 C,T 重算物性与矩阵"""
    xc, dxi2, dcent = grid["xc"], grid["dxi2"], grid["dcent"]
    xf_int, one_m_xcN = grid["xf_int"], grid["one_minus_xcN"]
    V_unit = math.pi * dxi2 * R_mid * R_mid # Q4 中随 R(t) 缩小
    h, hm = H_CONV * cfg.h_gain, HM_CONV * cfg.hm_gain
    dr_half = R_mid * one_m_xcN
    T_cur, C_cur = T_old.copy(), C_old.copy()
    for k in range(cfg.picard_max):
        rho, cp, kk, DD = props(C_cur, T_cur)
        DD = DD * cfg.D_gain
        # ---------- 能量方程 ----------
        cap_T = V_unit * rho * cp / dt
        G_T = TWO_PI * xf_int * (0.5 * (kk[:-1] + kk[1:])) / dcent
        h_eff_T = 1.0 / (1.0 / h + dr_half / kk[-1])
        G_out_T = TWO_PI * R_mid * h_eff_T
        rhs_T = cap_T * T_old
        rhs_T[-1] += G_out_T * T_air_K
        T_new = _solve_implicit(cap_T, G_T, G_out_T, rhs_T)
        # ---------- 水分方程 ----------
        G_C = TWO_PI * xf_int * (0.5 * (DD[:-1] + DD[1:])) / dcent
        h_eff_C = 1.0 / (1.0 / hm + dr_half / DD[-1])
        G_out_C = TWO_PI * R_mid * h_eff_C
        cap_C = V_unit / dt
        rhs_C = cap_C * C_old
        rhs_C[-1] += G_out_C * C_air
        C_new = _solve_implicit(cap_C, G_C, G_out_C, rhs_C)
        dT = float(np.max(np.abs(T_new - T_cur)))
```

```
        dC = float(np.max(np.abs(C_new - C_cur)))
        T_cur, C_cur = T_new, C_new
        res = max(dT / PICARD_T_REF, dC / PICARD_C_REF) # 无量纲残差
        if res < PICARD_TOL_SCALED:
            break
    surf = _surface_values(T_cur, C_cur, kk, DD, R_mid, xc[-1],
                           T_air_K, C_air, h, hm)
    return T_cur, C_cur, k + 1, res < PICARD_TOL_SCALED, surf
```

A.4 终点事件定位与输出插值（fv_core.py 节选）

```
# ---- 主推进循环中的记录与事件检测 ----
if is_record:
    _fill_output_row(rowT, rowC, T, C, surf, grid, _radius(cfg, t))
    out_T = np.vstack([out_T, rowT])
    out_C = np.vstack([out_C, rowC])
    t_hist.append(float(t))
    if cfg.tend is None:
        g = float(np.max(C)) - C_TH   # 事件函数 g(t)=max_r C-0.15
        if g < 0.0:                   # 首次由正变负
            t_dry_grid = float(t)
            Cmax_end = float(np.max(C))
            if g_prev is not None:
                Cmax_prev = float(g_prev + C_TH)
                t_dry_interp = t_prev_rec + (t - t_prev_rec) * g_prev \
                    / (g_prev - g)
            break
        g_prev = g
        t_prev_rec = float(t)

def _fill_output_row(rowT, rowC, T, C, surf, grid, R):
    """插值到 0,0.1,...,2.0 cm; 末位为表面值; r>R(t) 的格留空（NaN）"""
    nodes = np.concatenate(([0.0], grid["xc"], [1.0]))
    T_nodes = np.concatenate(([T[0]], T, [surf["T_s"]]))
    C_nodes = np.concatenate(([C[0]], C, [surf["C_s"]]))
    fT, fC = PchipInterpolator(nodes, T_nodes), PchipInterpolator(nodes, C_nodes)
    r_out_m = OUT_R_CM * 1e-2
    inside = r_out_m <= R + 1e-12
    xi_t = np.clip(r_out_m / R, 0.0, 1.0)
    rowT[:] = np.nan
    rowC[:] = np.nan
    idx = np.where(inside)[0]
    rowT[idx] = fT(xi_t[idx]) - T_ABS_OFFSET
    rowC[idx] = fC(xi_t[idx])
    rowT[0], rowC[0] = T[0] - T_ABS_OFFSET, C[0]
    rowT[OUT_R_CM.size] = surf["T_s"] - T_ABS_OFFSET
    rowC[OUT_R_CM.size] = surf["C_s"]
```

A.5　随体坐标与移动边界的实现要点

问题 4 的收缩通过“每步取 R_n、R_{n+1} 的中点值进入度规”实现：单元体积按 $V_i = \pi R^2(\xi_{i+1/2}^2 - \xi_{i-1/2}^2)$ 逐记录重算，界面面积按 $2\pi R\xi_{i+1/2}$ 重算，网格本身始终固定在 $[0,1]$ 上；输出时用 PCHIP 把 ξ 网格映射回固定 r 网格，$r > R(t)$ 的格点写空。这一实现与 A.2 的离散格式一一对应，代码见 `code/problem4.py` 与 `code/fv_core.py` 的 `_radius`。

附录 B　补充图

为控制正文篇幅，问题一的 r–t 时空图与七个规定时刻的径向剖面移至本附录；两张图与正文图 6 使用同一组计算结果，仅展示方式不同。

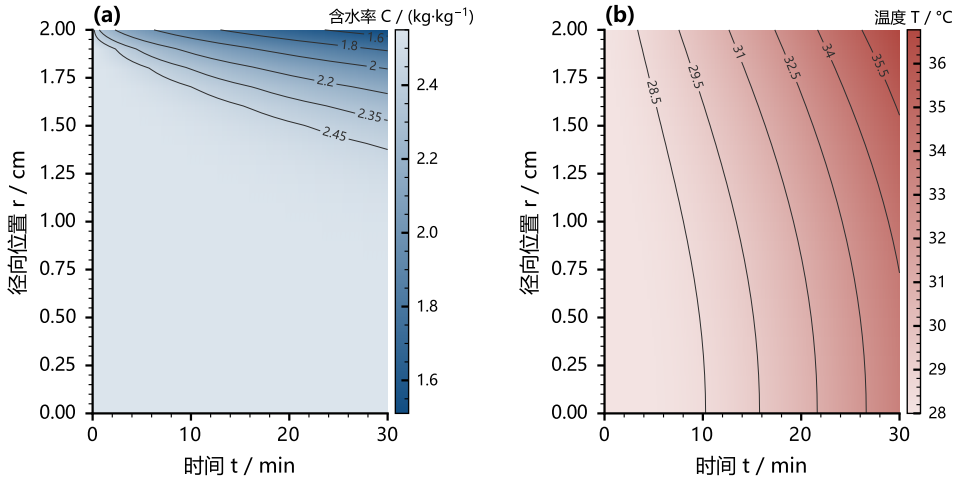


图 **16**　问题一时空演化热图

含水率的等值线密集贴向表面，边界层厚度随时间按 $\sqrt{Dt}$ 增长；温度等值线则疏松得多，30 min 内已推进到半径中部。两者间距之比与 $Lu = D/\alpha$ 的量级一致，直观印证了“传热快、传质慢”的判断。

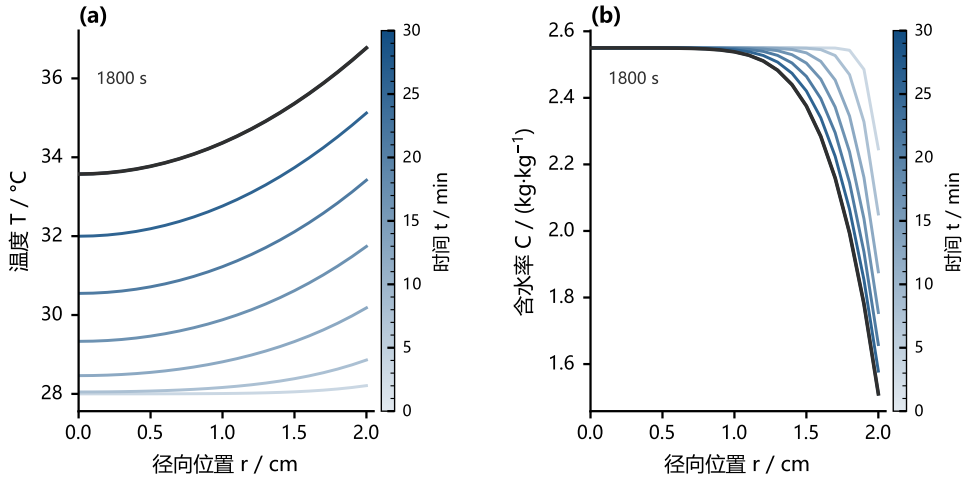


图 **17**　问题一径向剖面

温度剖面随时间的推进整体抬升且逐渐变平，1800 s 时表面与中心相差 3.2 °C；含水率剖面始终保持“内部平台 + 表面陡降”的形状，陡降区随时间由 $r \approx 2.0$ cm 缓慢内移，$r > 1.5$ cm 之外的梯度明显大于内部。剖面形状不相似，说明预热阶段不能用一个集总参数模型描述，必须保留径向分辨率。